数学Ⅲ

２０　　積分

＜講義ノート＞

積分（数学Ⅲ）

１．計算

＜不定積分＞

＜定積分＞

２．定積分関数（関数決定）

３．面積

（１）基本

（２）区分求積法

（３）不等式への応用
(i)長方形の階段
(ii)定積分と不等式

４．体積

（１）非回転体

（２）回転体

５．曲線の長さ

６．その他

＜物理量＞

1、計算　「不定積分」と「定積分」

いずれも、まずは［基本］
ダメなら［部分積分］
それでもダメなら［置換積分］

1、計算 〈「不定積分」と「定積分」〉

〈不定積分〉

$F'(x) = f(x)$ となる関数$F(x)$を、$f(x)$の原始関数（不定積分）といい、

$$F(x) = \int \underbrace{f(x)}_{\text{被積分関数}} dx$$ ←x：積分定数

と表す。

ある区間で常に $G'(x) = F'(x)$ （$G(x)$は$f(x)$の原始関数）ならば

$$G(x) = F(x) + C$$ （C：定数）

↑積分定積

$F(x) = x^3+2$　$f(x) = 3x^2$

$G(x) = x^3+7$

[基本] まずは、微分の逆演算としての公式利用レベル

$(\sin x)' = \cos x$ より、$\int \cos x\, dx = \sin x + C$ （C：積分定数）

↑以下、略。

$(\cos x)' = -\sin x$ より、$\int \sin x\, dx = -\cos x + C$

$(\tan x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$ より　$\int \dfrac{1}{\cos^2 x} dx = \tan x + C$

$(a^x)' = a^x \log a$ より、$\int a^x dx = \dfrac{a^x}{\log a} + C$ （$a>0$ かつ $a \neq 1$）

$(e^x)' = e^x$ より　$\int e^x dx = e^x + C$

$\left.\begin{array}{l} \left(\dfrac{1}{n+1} x^{n+1}\right)' = x^n \\ (\log|x|)' = \dfrac{1}{x} \end{array}\right\}$ より、$\int x^n dx = \begin{cases} \dfrac{1}{n+1} x^{n+1} + C & (n \neq -1) \\ \log|x| + C & (n = -1) \end{cases}$

さらに、$\{\log|f(x)|\}' = \dfrac{f'(x)}{f(x)}$ から、

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \log|f(x)| + C$$

例 次の不定積分を求めよ。（C：積分定数）

(1) $\int (2^x + 3^x) dx = \dfrac{2^x}{\log 2} + \dfrac{3^x}{\log 3} + C$ //

(2) $\int e^{3x+1} dx = \dfrac{1}{3} e^{3x+1} + C$ //　← $(e^{3x+1})' = 3e^{3x+1}$ より

(3) $\int \dfrac{\cos^3 3x + 1}{\cos^2 3x} dx = \int \left(\cos 3x + \dfrac{1}{\cos^2 3x}\right) dx$

$= \dfrac{1}{3} \sin 3x + \dfrac{1}{3} \tan 3x + C$ //

(4) $\int \tan(-3x+2) dx = \int \dfrac{\sin(-3x+2)}{\cos(-3x+2)} dx$

$= \dfrac{1}{3} \int \dfrac{\{\cos(-3x+2)\}'}{\cos(-3x+2)} dx$

$= \dfrac{1}{3} \log|\cos(-3x+2)| + C$ //

(4)のじゅんび。

$\int \tan x\, dx = \int \dfrac{\sin x}{\cos x} dx$

$= \int \dfrac{(\cos x)'}{\cos x} dx$

$= -\log|\cos x| + C$ //

「三角関数では、2倍角・半角・積和の公式を使いまくろう！」

特に、

$$\begin{cases} \cos^2 x = \frac{1}{2}(1+\cos 2x) \\ \sin^2 x = \frac{1}{2}(1-\cos 2x) \\ \sin x\cos x = \frac{1}{2}\sin 2x \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}\{\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)\} \\ \cos\alpha\sin\beta = \frac{1}{2}\{\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)\} \\ \cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}\{\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)\} \\ \sin\alpha\sin\beta = -\frac{1}{2}\{\cos(\alpha+\beta)-\cos(\alpha-\beta)\} \end{cases}$$

(5) $\int \cos^2 x\,dx = \frac{1}{2}\int(1+\cos 2x)dx$

$= \frac{1}{2}(x+\frac{1}{2}\sin 2x)+C$

$= \frac{1}{2}x+\frac{1}{4}\sin 2x+C$ //

(6) $\int \sin 2x\cos x\,dx = \frac{1}{2}\int(\sin 3x+\sin x)dx$

$= \frac{1}{2}(-\frac{1}{3}\cos 3x-\cos x)+C$

$= -\frac{1}{6}\cos 3x-\frac{1}{2}\cos x+C$ //

[基本] つづき.

(7) $\int \frac{-3}{(2-3x)^4}dx = \int (-3)\times(2-3x)^{-4}dx$

$= (-3)\times\frac{1}{-3}\times\frac{1}{-3}\times(2-3x)^{-3}+C$

$= -\frac{1}{3(2-3x)^3}+C$ //

(8) $\int \frac{1}{2x-3}dx = \frac{1}{2}\log|2x-3|+C$ //

(9) $\int(\sqrt{x}-\frac{1}{\sqrt{x}})dx = \int(x^{\frac{1}{2}}-x^{-\frac{1}{2}})dx$

$= \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}-2x^{\frac{1}{2}}+C$

$= \frac{2}{3}x\sqrt{x}-2\sqrt{x}+C$ //

(10) $\int \frac{2x-1}{x^2-x+1}dx = \int \frac{(x^2-x+1)'}{x^2-x+1}dx$

$= \log|x^2-x+1|+C$

$= \log(x^2-x+1)+C$ //

(11) $\int \frac{1}{x(x+1)}dx = \int(\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1})dx$

$= \log|x|-\log|x+1|+C$

$= \log\left|\frac{x}{x+1}\right|+C$ //

(12) $\int \frac{4x^2+x+1}{x^3-1}dx = \int \frac{4x^2+x+1}{(x-1)(x^2+x+1)}dx$

$= \int(\frac{2}{x-1}+\frac{2x+1}{x^2+x+1})dx$

$= 2\log|x-1|+\log|x^2+x+1|+C$

$= \log(x-1)^2(x^2+x+1)+C$ //

(13) $\int \frac{2x+1}{x(x-1)^2}dx$ について。

$\frac{2x+1}{x(x-1)^2} = \frac{A}{x}+\frac{B}{x-1}+\frac{C'}{(x-1)^2}$ とおくと.

(右辺) $= \frac{A(x-1)^2+Bx(x-1)+C'x}{x(x-1)^2}$

$= \frac{(A+B)x^2+(-2A-B+C')x+A}{x(x-1)^2}$

$\therefore \begin{cases} A+B=0 \\ -2A-B+C'=2 \\ A=1 \end{cases}$

$\Rightarrow B=-1, C'=3.$

(与式) $= \int\{\frac{1}{x}-\frac{1}{x-1}+\frac{3}{(x-1)^2}\}dx$

$= \log|x|-\log|x-1|-3(x-1)^{-1}+C$

$= \log\left|\frac{x}{x-1}\right|-\frac{3}{x-1}+C$ //

1、計算 〈「不定積分」と「定積分」〉 [基本]→[部分]→[置換]

〈不定積分〉

[部分積分] 「積の積分」と「log の積分」は部分積分!

$\{f(x)g(x)\}' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$ より、

$f'(x)g(x) = \{f(x)g(x)\}' - f(x)g'(x)$

よって、$\int f'(x)g(x)dx = \underbrace{\int \{f(x)g(x)\}'dx}_{f(x)g(x)+C} - \int f(x)g'(x)dx$

$= f(x)g(x) - \int f(x)g'(x)dx$

$g(x)$の優先順位
① log
② x^n
③ その他(e^x, $\sin x$ など)

例 次の不定積分を求めよ。(C:積分定数)

(1) $\int x\sin 2x\,dx = \int \left(-\frac{1}{2}\cos 2x\right)' \times x\,dx$

$= \left(-\frac{1}{2}\cos 2x\right) \times x - \int \left(-\frac{1}{2}\cos 2x\right) \times 1\,dx$

$= -\frac{1}{2}x\cos 2x + \frac{1}{2}\int \cos 2x\,dx$

$= -\frac{1}{2}x\cos 2x + \frac{1}{4}\sin 2x + C$ //

(2) $\int \log x\,dx = \int 1 \times \log x\,dx$

$= \int (x)' \times \log x\,dx$

$= x\log x - \int x \times \frac{1}{x}dx$

$= x\log x - x + C$ //

(3) $\int x^2 e^x dx = \int (e^x)' x^2 dx$

$= x^2e^x - 2\int (e^x)' \times x\,dx$

$= x^2e^x - 2\left(e^x \times x - \int e^x \times 1\,dx\right)$

$= x^2e^x - 2xe^x + 2\int e^x dx$

$= (x^2 - 2x + 2)e^x + C$ //

(4) $\int (\log x)^2 dx = \int (x)'(\log x)^2 dx$

$= x(\log x)^2 - \int x \times 2(\log x) \times \frac{1}{x} dx$

$= x(\log x)^2 - 2\int \log x \, dx$

$= x(\log x)^2 - 2\int (x)' \log x \, dx$

$= x(\log x)^2 - 2\left(x\log x - \int x \times \frac{1}{x} dx\right)$

$= x(\log x)^2 - 2x\log x + 2x + C$ //

(5) $\int e^x \cos x \, dx = \int (e^x)' \cos x \, dx$

$= e^x \cos x - \int e^x(-\sin x) dx$

$= e^x \cos x + \int e^x \sin x \, dx$

$= e^x \cos x + \int (e^x)' \times \sin x \, dx$

$= e^x \cos x + e^x \sin x - \int e^x \cos x \, dx$

$= e^x(\cos x + \sin x) - \int e^x \cos x \, dx$

$\int e^x \cos x \, dx = I$ とおくと、

$2I = e^x(\cos x + \sin x)$

$I = \frac{1}{2} e^x(\cos x + \sin x) + C$ //

1、計算　〈「不定積分」と「定積分」〉 [基本]→[部分」→「置換」

〈不定積分〉

[置換積分]　最後の手段!!

代表3タイプ

① 入れ替えがステキ♡

② 微分形単独掛け

③ e^xが単純

例1 $\int x\sqrt{2x+1}\,dx$　(①のタイプ)

$$\int (2x+1)\sqrt{x}\,dx$$
$$= \int (2x\sqrt{x}+\sqrt{x})\,dx$$
$$= \int (2x^{\frac{3}{2}}+x^{\frac{1}{2}})\,dx$$
$$= \frac{4}{5}x^{\frac{5}{2}}+\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}+C$$
$$= \frac{4}{5}x^2\sqrt{x}+\frac{2}{3}x\sqrt{x}+C$$

$2x+1=t$とおくと、$2x=t-1$

$\therefore x=\frac{t-1}{2}$

$2=\frac{dt}{dx} \to dx=\frac{1}{2}dt$

よって、(与式) $=\int \frac{t-1}{2}\sqrt{t}\times\frac{1}{2}dt$

$$= \frac{1}{4}\int (t-1)\sqrt{t}\,dt$$
$$= \frac{1}{4}\int (t\sqrt{t}-\sqrt{t})\,dt$$
$$= \frac{1}{4}\int (t^{\frac{3}{2}}-t^{\frac{1}{2}})\,dt$$
$$= \frac{1}{4}\left(\frac{2}{5}t^{\frac{5}{2}}-\frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}}\right)+C$$
$$= \frac{1}{4}\times\frac{2}{15}t^{\frac{3}{2}}(3t-5)+C$$
$$= \frac{1}{30}(2x+1)^{\frac{3}{2}}\{3(2x+1)-5\}+C$$
$$= \frac{1}{30}(2x+1)\sqrt{2x+1}(6x+1)+C$$
$$= \frac{1}{15}(3x-1)(2x+1)\sqrt{2x+1}+C \text{〃}$$ (C：積分定数)

例2 $\int \cos^3 x\,dx$　(②のタイプ)

(与式) $=\int \cos^2 x\times\cos x\,dx$

$$= \int (1-\sin^2 x)\times\cos x\,dx$$

$\sin x=t$とおくと、$\cos x=\frac{dt}{dx}$

$\therefore \cos x\,dx=dt$

(与式) $=\int (1-t^2)\,dt$

$$= t-\frac{1}{3}t^3+C$$
$$= \sin x-\frac{1}{3}\sin^2 x+C$$ (C：積分定数)

もう1問!

$$\int \frac{(\log x)^2}{x}dx = \int (\log x)^2 \times \frac{1}{x}dx$$

$\log x = t$ とおくと

$$\frac{1}{x} = \frac{dt}{dx} \qquad \therefore \frac{1}{x}dx = dt$$

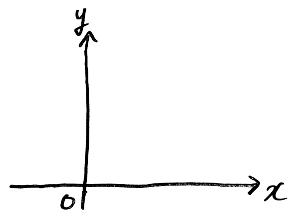
$$(与式) = \int t^2 dt$$
$$= \frac{1}{3}t^3 + C$$
$$= \frac{1}{3}(\log x)^3 + C \text{ // } (C: 積分定数)$$

例3 $\int \frac{1}{e^x+1}dx$ (③のタイプ)

$e^x = t$ とおくと. $e^x = \frac{dt}{dx}$

$$\therefore e^x dx = dt \rightsquigarrow dx = \frac{1}{e^x}dt$$
$$= \frac{1}{t}dt$$

$$(与式) = \int \frac{1}{t+1} \times \frac{1}{t}dt$$
$$= \int \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{t+1}\right)dt$$
$$= \log|t| - \log|t+1| + C$$
$$= \log\left|\frac{t}{t+1}\right| + C$$
$$= \log\left|\frac{e^x}{e^x+1}\right| + C$$
$$= \log\left(\frac{e^x}{e^x+1}\right) + C \text{ // } (C: 積分定数)$$



1、計算 〈「不定積分」と「定積分」〉 [基本] → [部分] → [置換]

〈定積分〉

$f(x)$ の不定積分の1つを $F(x)$ とすると

[基本]

例 次の定積分を求めよ。

(1) $\int_{-2}^{1} \sqrt[4]{x+2}\,dx = \int_{-2}^{1}(x+2)^{\frac{1}{4}}dx$

$= \left[\frac{4}{5}(x+2)^{\frac{5}{4}} + C\right]_{-2}^{1}$

$= \frac{4}{5}\times 1^{\frac{5}{4}} + C - \left(\frac{4}{5}\times 0 + C\right)$

$= \frac{4}{5}$ //

(2) $\int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \sin^4 x = \int_{0}^{\frac{\pi}{4}}(\sin^2 x)^2 dx$

$= \int_{0}^{\frac{\pi}{4}}\left\{\frac{1}{2}(1-\cos 2x)\right\}^2 dx$

$= \frac{1}{4}\int_{0}^{\frac{\pi}{4}}(1-\cos 2x)^2 dx$

$= \frac{1}{4}\int_{0}^{\frac{\pi}{4}}(1-2\cos 2x+\cos^2 2x)dx$

$= \frac{1}{4}\int_{0}^{\frac{\pi}{4}}\left\{1-2\cos 2x+\frac{1}{2}(1+\cos 4x)\right\}dx$

$= \frac{1}{4}\int_{0}^{\frac{\pi}{4}}\left(\frac{3}{2}-2\cos 2x+\frac{1}{2}\cos 4x\right)dx$

$= \frac{1}{4}\left[\frac{3}{2}x-\sin 2x+\frac{1}{8}\sin 4x\right]_{0}^{\frac{\pi}{4}}$

$= \frac{1}{4}\left(\frac{3}{2}\times\frac{\pi}{4}-1\right) = \frac{1}{32}(3\pi-8)$ //

(3) $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{1+\cos x}dx = -\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\frac{(1+\cos x)'}{1+\cos x}dx$

$= -\left[\log|1+\cos x|\right]_{0}^{\frac{\pi}{2}}$

$= -(\log 1-\log 2) = \log 2$ //

(4) $\displaystyle\int_{\log 3}^{\log 5}(e^{x}+e^{-x})\,dx = \left[e^{x}-e^{-x}\right]_{\log 3}^{\log 5}$

$= e^{\log 5}-e^{\log\frac{1}{5}}-(e^{\log 3}-e^{\log\frac{1}{3}})$

$= 5-\frac{1}{5}-(3-\frac{1}{3})$

$= 2-\frac{1}{5}+\frac{1}{3} = \frac{32}{15}$ //

(5) $\displaystyle\int_{-1}^{2}\frac{x}{x^2-x-6}\,dx = \int_{-1}^{2}\frac{x}{(x+2)(x-3)}\,dx$

$\displaystyle\frac{x}{(x+2)(x-3)}=\frac{A}{x+2}+\frac{B}{x-3}$ とおくと

$\displaystyle(\text{右辺})=\frac{A(x-3)+B(x+2)}{(x+2)(x-3)}$

$\displaystyle=\frac{(A+B)x-3A+2B}{(x+2)(x-3)}$

$\begin{cases}A+B=1\\-3A+2B=0\end{cases} \Rightarrow -3A+2(1-A)=0$

$A=\frac{2}{5},\ B=\frac{3}{5}$

$\displaystyle= \int_{-1}^{2}\left(\frac{\frac{2}{5}}{x+2}+\frac{\frac{3}{5}}{x-3}\right)dx$

$\displaystyle= \frac{1}{5}\int_{-1}^{2}\left(\frac{2}{x+2}+\frac{3}{x-3}\right)dx$

$\displaystyle= \frac{1}{5}\left[2\log|x+2|+3\log|x-3|\right]_{-1}^{2}$

$\displaystyle= \frac{1}{5}\left[\log|x+2|^2+\log|x-3|^3\right]_{-1}^{2}$

$= \frac{1}{5}(\log 16-\log 64)$

$= \frac{1}{5}\log\frac{16}{64}$

$= \frac{1}{5}\log 2^{-2}$

$= -\frac{2}{5}\log 2$ //

1、計算 「不定積分」と「定積分」

〈定積分〉

[部分積分]「積の積分」と「logの積分」は部分積分！

例 次の定積分を求めよ。

(1) $\int_0^1 x e^{-\frac{x}{2}} dx = \int_0^1 (-2e^{-\frac{x}{2}})' x \, dx$

$= \left[-2e^{-\frac{x}{2}} \cdot x\right]_0^1 - \int_0^1 (-2) e^{-\frac{x}{2}} \times 1 \, dx$

$= -2e^{-\frac{1}{2}} - 0 + 2\int_0^1 e^{-\frac{x}{2}} dx$

$= -\frac{2}{\sqrt{e}} + 2\left[-2e^{-\frac{x}{2}}\right]_0^1$

$= -\frac{2}{\sqrt{e}} - \frac{4}{\sqrt{e}} + 4 \quad = 4 - \frac{6}{\sqrt{e}}$ //

(2) $\int_1^e x \log x \, dx = \int_1^e \left(\frac{1}{2}x^2\right)' \log x \, dx$

$= \left[\frac{1}{2}x^2 \log x\right]_1^e - \int_1^e \frac{1}{2}x^2 \times \frac{1}{x} dx$

$= \frac{1}{2}e^2 \log e - \frac{1}{2}\log 1 - \left[\frac{1}{4}x^2\right]_1^e$

$= \frac{1}{2}e^2 - \frac{1}{4}(e^2 - 1) = \frac{1}{4}(e^2 + 1)$ //

(3) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \sin x \, dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (-\cos x)' x^2 dx$

$= \left[-x^2 \cos x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} (-\cos x) \times 2x \, dx$

$= 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin x)' x \, dx$

$= 2\left(\left[x \sin x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin x) \times 1 \, dx\right)$

$= 2\left(\frac{\pi}{2} - 0 + \left[\cos x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}\right)$

$= 2\left(\frac{\pi}{2} + 0 - 1\right) \quad = \pi - 2$ //

(4) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \sin x\, dx = I$ とおく。

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (e^x)' \sin x\, dx$$
$$= \left[e^x \sin x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \cos x\, dx$$
$$= e^{\frac{\pi}{2}} - \left\{\left[e^x \cos x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \times (-\sin x)\, dx\right\}$$
$$= e^{\frac{\pi}{2}} - (0 - 1 + I)$$
$$= e^{\frac{\pi}{2}} + 1 - I$$

よって、 $2I = e^{\frac{\pi}{2}} + 1$ より、 $I = \frac{1}{2}(e^{\frac{\pi}{2}} + 1)$ //

1. 計算　「不定積分」と「定積分」　[基本] → [部分] → [置換]

〈定積分〉

[置換積分]　最後の手段！

考え方は不定積分と同じ。でも、　　　　を忘れずに！

↳ 特に「微分形単独掛け」が重要なのも同じ。

例 次の定積分を求めよ。

(1) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x \cos x \, dx$

$\sin x = t$ とおくと、$\cos x = \frac{dt}{dx}$ より $\cos dx = dt$

$(与式) = \int_0^1 t^2 dt$

$= \left[\frac{1}{3}t^3\right]_0^1 = \frac{1}{3}$ //

(2) $\int_0^1 x^3\sqrt{x^4+1}\, dx \quad \left(= \frac{1}{4}\int_0^1 (x^4+1)^{\frac{1}{2}} \times (x^4+1)' dx\right)$

$x^4+1 = t$ とおくと、

$4x^3 = \frac{dt}{dx}$ より $x^3 dx = \frac{1}{4} dt$

x	$0 \to 1$
t	$1 \to 2$

よって、$(与式) = \int_1^2 \sqrt{t} \times \frac{1}{4} dt$

$= \frac{1}{4}\int_1^2 t^{\frac{1}{2}} dt$

$= \frac{1}{4}\left[\frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}}\right]_1^2$

$= \frac{1}{6}(2\sqrt{2}-1)$ //

(3) $\int_e^{e^2} \frac{dx}{x(\log x)^2} = \int_e^{e^2} \frac{1}{(\log x)^2} \times \frac{1}{x} dx$

$\log x = t$ とおくと、$\frac{1}{x} = \frac{dt}{dx}$ より、$\frac{1}{x}dx = dt$

x	$e \to e^2$
t	$1 \to 2$

$(与式) = \int_1^2 \frac{1}{t^2} dt$

$= \left[-\frac{1}{t}\right]_1^2$

$= -\left(\frac{1}{2} - 1\right)$

$= \frac{1}{2}$ //

(4) $\displaystyle\int_2^7 \frac{x}{\sqrt{x+2}}\,dx$

$\sqrt{x+2}=t$ とおくと、$x+2=t^2$ により、$x=t^2-2$

$\therefore \dfrac{dx}{dt}=2t \qquad dx=2t\,dt$

x	$2\to 7$
t	$2\to 3$

$$(与式)=\int_2^3 \frac{t^2-2}{t}\times 2t\,dt$$

$$=2\left[\frac{1}{3}t^3-2t\right]_2^3$$

$$=2\left\{\frac{1}{3}(27-8)-2(3-2)\right\}$$

$$=2\left(\frac{19}{3}-2\right)$$

$$=2\times\frac{13}{3}=\frac{26}{3}$$ //

1、計算 〈「不定積分」と「定積分」〉

〈定積分〉

[置換積分] 短縮編

例) 次の定積分の値を求めよ。

(1) $\int_0^1 2x\sqrt{x^2+1}\,dx$

解) (与式) $= \int_0^1 \sqrt{x^2+1} \times \underline{2x\,dx}$

$x^2+1=t$ とおくと、 $2x=\dfrac{dt}{dx}$ から、 $\underline{2x\,dx}=dt$

$$\begin{array}{c|c} x & 0 \to 1 \\ \hline t & 1 \to 2 \end{array}$$

よって、(与式) $= \int_1^2 \sqrt{t}\,dt$

$= \int_1^2 t^{\frac{1}{2}}\,dt$

$= \left[\dfrac{2}{3}t^{\frac{3}{2}}\right]_1^2$

$= \dfrac{2}{3}(2\sqrt{2}-1)$ 〃

$= \int_0^1 (x^2+1)^{\frac{1}{2}}(x^2+1)'\,dx$

$= \left[\dfrac{2}{3}(x^2+1)^{\frac{3}{2}}\right]_0^1$

$= \dfrac{2}{3}(2^{\frac{3}{2}}-1)$

短縮ヴァージョン!!

(2) $\int_1^e \dfrac{\log x}{x}\,dx$

解) (与式) $= \int_1^e \log x \times \underline{\dfrac{1}{x}dx}$

$\log x = t$ とおくと、 $\dfrac{1}{x}=\dfrac{dt}{dx}$ から $\underline{\dfrac{1}{x}dx}=dt$

$$\begin{array}{c|c} x & 1 \to e \\ \hline t & 0 \to 1 \end{array}$$

よって、(与式) $= \int_0^1 t\,dt$

$= \left[\dfrac{1}{2}t^2\right]_0^1$

$= \dfrac{1}{2}(1^2-0^2)$

$= \dfrac{1}{2}$ 〃

$= \int_1^e (\log x)\times(\log x)'\,dx$

$= \left[\dfrac{1}{2}(\log x)^2\right]_1^e$

$= \dfrac{1}{2}\{(\log e)^2-(\log 1)^2\}$

短縮ヴァージョン!!

(3) $\int_1^e \dfrac{(\log x)^3}{x}\,dx$

解) (与式) $= \int_1^e (\log x)^3 \times \underline{\dfrac{1}{x}dx}$

$\log x = t$ とおくと $\dfrac{1}{x}=\dfrac{dt}{dx}$ から $\dfrac{1}{x}dx=dt$

$$\begin{array}{c|c} x & 1 \to e \\ \hline t & 0 \to 1 \end{array}$$

よって、(与式) $= \int_0^1 t^3\,dt$

$= \left[\dfrac{1}{4}t^4\right]_0^1$

$= \dfrac{1}{4}(1^4-0^4)$

$= \dfrac{1}{4}$ 〃

$= \int_1^e (\log x)^3\times(\log x)'\,dx$

$= \left[\dfrac{1}{4}(\log x)^4\right]_1^e$

$= \dfrac{1}{4}\{(\log e)^4-(\log 1)^4\}$

短縮バージョン!!

(4) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 x\,dx$

解) (与式) $= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-\sin^2 x)\cos x\,dx$

$\sin x = t$ とおくと. $\cos x = \frac{dt}{dx}$ より $\cos x\,dx = dt$

$$\begin{array}{c|c} x & 0 \to \frac{\pi}{2} \\ \hline t & 0 \to 1 \end{array}$$

よって、(与式) $= \int_0^1 (1-t^2)\,dt$

$= \left[t - \frac{1}{3}t^3\right]_0^1$

$= 1 - \frac{1}{3}$

$= \frac{2}{3}$ //

$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-\sin^2 x)(\sin x)'\,dx$

$= \left[\sin x - \frac{1}{3}\sin^3 x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$

$= 1 - \frac{1}{3}$

短縮ヴァージョン!!

(5) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^5 x\,dx$

解) (与式) $= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 x \times \sin x\,dx$

$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin^2 x)^2 \sin x\,dx$

$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-\cos^2 x)^2 \sin x\,dx$ $\qquad (\cos x)' = -\sin x$

$= -\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-\cos^2 x)^2 (-\sin x)\,dx$

$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (-1+2\cos^2 x - \cos^4 x)(\cos x)'\,dx$

$= \left[-\cos x + \frac{2}{3}\cos^3 x - \frac{1}{5}\cos^5 x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$ $\qquad \cos x = t$

$= 0 - \left(-1 + \frac{2}{3} - \frac{1}{5}\right)$

$= \frac{8}{15}$ //

1. 計算 〈「不定積分」と「定積分」〉

〈定積分〉

[置換積分] あの置換

$$\begin{cases} a^2-x^2 \text{形} \rightarrow \\ a^2+x^2 \text{形} \rightarrow \end{cases}$$

例 次の定積分を求めよ。

(1) $\int_0^3 \sqrt{9-x^2}\,dx$

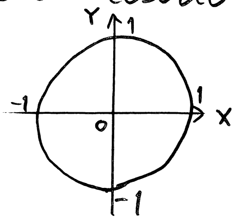
(2) $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}}$

(3) $\int_1^{\sqrt{3}} \frac{dx}{x^2+3}$

解) (1) (与式) $= \int_0^3 \sqrt{3^2-x^2}\,dx$

$x=3\sin\theta$ とおくと、$\frac{dx}{d\theta}=3\cos\theta$ ∴ $dx=3\cos\theta\,d\theta$

x	$0 \rightarrow 3$
θ	$0 \rightarrow \frac{\pi}{2}$



(与式) $= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{3^2-(3\sin\theta)^2} \times 3\cos\theta\,d\theta$

$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} |3\cos\theta| \times 3\cos\theta\,d\theta$

$= 9\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2\theta\,d\theta$

$= \frac{9}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1+\cos2\theta)\,d\theta$

$= \frac{9}{2}\left[\theta+\frac{1}{2}\sin2\theta\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$

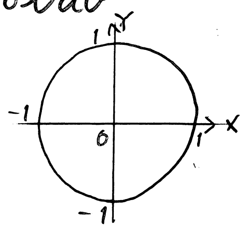
$= \frac{9}{2}\times\frac{\pi}{2}$

$= \frac{9}{4}\pi$ //

(2) $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}}$ について、$x=2\sin\theta$ とおくと

$\frac{dx}{d\theta}=2\cos\theta$ より $dx=2\cos\theta\,d\theta$

x	$0 \rightarrow 1$
θ	$0 \rightarrow \frac{\pi}{6}$



(与式) $= \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{1}{\sqrt{4-4\sin^2\theta}} \times 2\cos\theta\,d\theta$

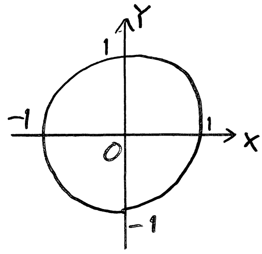
$= \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{2\cos\theta}{|2\cos\theta|}\,d\theta$

$= [\theta]_0^{\frac{\pi}{6}} = \frac{\pi}{6}$ //

(3) $\displaystyle\int_1^{\sqrt{3}} \frac{dx}{x^2+3}$ について、$x=\sqrt{3}\tan\theta$ とおくと $\dfrac{dx}{d\theta}=\dfrac{\sqrt{3}}{\cos^2\theta}$

$\therefore\ dx=\dfrac{\sqrt{3}}{\cos^2\theta}d\theta$

x	$1\to\sqrt{3}$
θ	$\frac{\pi}{6}\to\frac{\pi}{4}$



$$(与式)=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{3\tan^2\theta+3}\times\frac{\sqrt{3}}{\cos^2\theta}d\theta$$

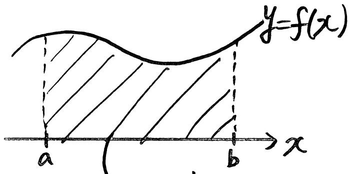
$$=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos^2\theta}{3}\times\frac{\sqrt{3}}{\cos^2\theta}d\theta$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{3}\left[\theta\right]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{36}\pi$$ //

1、計算 〈「不定積分」と「定積分」〉

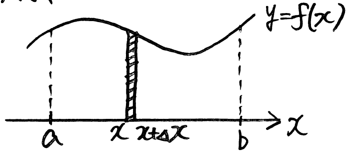
〈定積分の応用〉

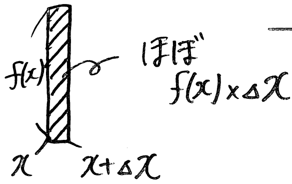
［その1］面積を表す？ $\boxed{\text{数II微積}}$



$S=\int_a^b f(x)dx$ ？

まずは、





$\square \fallingdotseq f(x)\times\Delta x$ …①

一方、$F'(x)=f(x)$ とすると

$$\frac{dF(x)}{dx}=f(x)$$

$$\therefore \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta F(x)}{\Delta x}=f(x)$$

$$\frac{\Delta F(x)}{\Delta x}\fallingdotseq f(x)$$

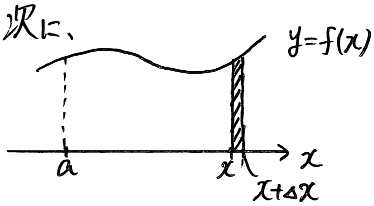
よって、 $\Delta F(x)\fallingdotseq f(x)\times\Delta x$ …②

①②より $\square \fallingdotseq \Delta F(x)$

$$S=\sum_{a\leqq x\leqq b}\square \fallingdotseq \sum_{a\leqq x\leqq b}\Delta F(x)$$

$$\fallingdotseq F(b)-F(a) = \int_a^b f(x)\,dx$$

次に、



$f(x)\,\square_{\Delta x} \fallingdotseq S(x+\Delta x)-S(x)\fallingdotseq f(x)\times\Delta x$

$$\frac{S(x+\Delta x)-S(x)}{\Delta x}=f(x)$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{S(x+h)-S(x)}{h}=f(x)$$

$S(x)$ は $f(x)$ の不定積分。

$S(x)$ を、$f(x)$ の任意の不定積分 $F(x)$ を用いて表すと、

$$S(x)=F(x)+C \quad (C:\text{定数})$$

$x=a$ を代入すると、

$$S(a)=F(a)+C \qquad \therefore C=-F(a)$$

よって、$S=S(b)$

$=F(b)+C$

$=F(b)-F(a)$

$=\int_a^b f(x)dx$

1、計算 〈「不定積分」と「定積分」〉

〈定積分の応用〉

[その2] 絶対値つき

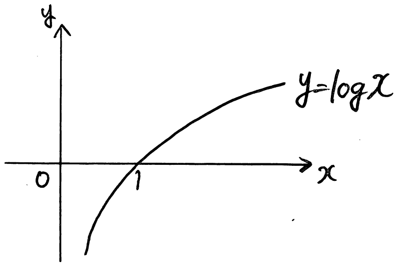
$$|A| = \begin{cases} A & (A \geqq 0) \\ -A & (A < 0) \end{cases}$$

㊀次の定積分の値を求めよ。

(1) $\int_{\frac{1}{2}}^{2} |\log x|\, dx$　　(2) $\int_{-1}^{1} |e^x - 1|\, dx$

(3) $\int_{0}^{\pi} |\sin x - \sqrt{3}\cos x|\, dx$　　(4) $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} |\sin x - 2\cos x|\, dx$

解) (1) $\int_{\frac{1}{2}}^{2} |\log x|\, dx$



$$= -\int_{\frac{1}{2}}^{1} \log x\, dx + \int_{1}^{2} \log x\, dx$$

$$= -[x\log x - x]_{\frac{1}{2}}^{1} + [x\log x - x]_{1}^{2}$$

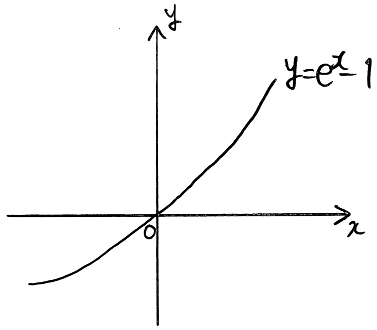
$$= [x\log x - x]_{1}^{\frac{1}{2}} + [x\log x - x]_{1}^{2}$$

$$= \left(\tfrac{1}{2}\log\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2}\right) + (2\log 2 - 2) - 2\times(-1)$$

$$= -\tfrac{1}{2}\log 2 - \tfrac{1}{2} + 2\log 2 - 2 + 2$$

$$= \tfrac{3}{2}\log 2 - \tfrac{1}{2} \quad = \tfrac{1}{2}(3\log 2 - 1) \,/\!/$$

(2) $\int_{-1}^{1} |e^x - 1|\, dx$



$$= \int_{-1}^{0} |e^x - 1|\, dx + \int_{0}^{1} |e^x - 1|\, dx$$

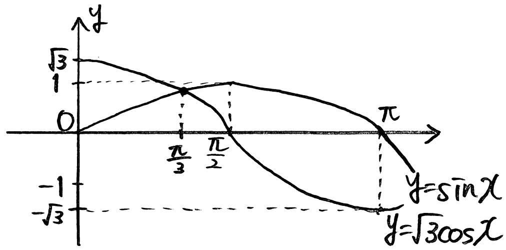
$$= -\int_{-1}^{0} (e^x - 1)\, dx + \int_{0}^{1} (e^x - 1)\, dx$$

$$= [e^x - x]_{0}^{-1} + [e^x - 1]_{0}^{1}$$

$$= e^{-1} - (-1) + e^1 - 1 - 2(1 - 0)$$

$$= e + \tfrac{1}{e} - 2 \,/\!/$$

(3) $\int_{0}^{\pi} |\sin x - \sqrt{3}\cos x|\, dx$



$\sin x = \sqrt{3}\cos x$ について、$x \neq \frac{\pi}{2}$ のとき、

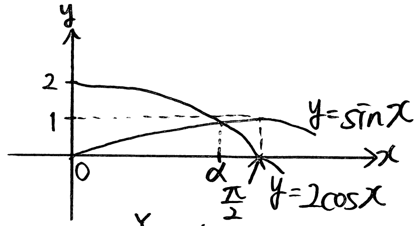
$$\frac{\sin x}{\cos x} = \sqrt{3} \qquad \therefore x = \frac{\pi}{3}$$

$$(\text{与式}) = \int_{0}^{\frac{\pi}{3}} (\sqrt{3}\cos x - \sin x)\, dx + \int_{\frac{\pi}{3}}^{\pi} (\sin x - \sqrt{3}\cos x)\, dx$$

$$= [\sqrt{3}\sin x + \cos x]_{0}^{\frac{\pi}{3}} + [\sqrt{3}\sin x + \cos x]_{\pi}^{\frac{\pi}{3}}$$

$$= 2\left(\sqrt{3}\times\sin\tfrac{\pi}{3} + \cos\tfrac{\pi}{3}\right) - \cos 0 - \cos\pi = 4 \,/\!/$$

(4) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} |\sin x - 2\cos x|\, dx$

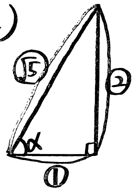


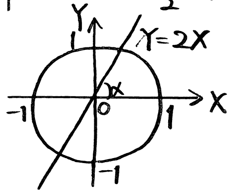
$\sin x = 2\cos x$ について、

$\frac{\sin x}{\cos x} = 2$

これをみたす x を α $\left(0<\alpha<\frac{\pi}{2}\right)$ とすると、

$\left(\begin{array}{l} \tan\alpha = \sqrt{5} \\ \cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \sin\alpha = \frac{2}{\sqrt{5}} \end{array}\right)$





$$(\text{与式}) = \int_0^{\alpha}(2\cos x - \sin x)\,dx + \int_{\alpha}^{\frac{\pi}{2}}(\sin x - 2\cos x)\,dx$$

$$= \left[2\sin x + \cos x\right]_0^{\alpha} + \left[2\sin x + \cos x\right]_{\frac{\pi}{2}}^{\alpha}$$

$$= 2(2\sin\alpha + \cos\alpha) - 1 - 2$$

$$= 2\times\frac{5}{\sqrt{5}} - 3 = 2\sqrt{5} - 3 \;/\!/$$

1、計算

〈定積分の応用〉
［その3］対称性

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = \begin{cases} 2\int_0^a f(x)\,dx & (f(x):\text{偶関数}) \\ 0 & (f(x):\text{奇関数}) \end{cases}$$

<u>証明</u>

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = \int_{-a}^{0} f(x)\,dx + \int_0^a f(x)\,dx$$

$$= \int_{a}^{0} f(-t)\times(-1)\,dt + \int_0^a f(x)\,dx$$

$$= \int_0^a f(-t)\,dt + \int_0^a f(x)\,dx$$

$$= \int_0^a \{f(-x)+f(x)\}\,dx$$

$$= \begin{cases} \int_0^a \{f(x)+f(x)\}\,dx & (f(x):\text{偶関数}) \\ \int_0^a \{-f(x)+f(x)\}\,dx & (f(x):\text{奇関数}) \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 2\int_0^a f(x)\,dx & (f(x):\text{偶関数}) \\ 0 & (f(x):\text{奇関数}) \end{cases}$$

（証明終）

$\boxed{\text{数II 微積}}$

$$\int_{-a}^{a} x^n\,dx = \begin{cases} 2\int_0^a x^n\,dx & (n:\text{偶}) \\ 0 & (n:\text{奇}) \end{cases}$$

$f(x) = x^n$

$\boxed{\text{nが偶数なら 偶関数}}$
$\boxed{\text{nが奇数なら 奇関数}}$

例 次の定積分を求めよ。

(1) $\int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 x\,dx$

(2) $\int_{-\pi}^{\pi} \sin x\cos x\,dx$

解）(1) $\int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 x\,dx$ ← $f(x)=\cos^2 x$ とおくと、

$f(-x) = \cos^2(-x)$
$= \cos^2 x$
$= f(x)$

$= 2\int_0^{\pi} \cos^2 x\,dx$

$= \int_0^{\pi} (1+\cos 2x)\,dx$

$= \left[x + \frac{1}{2}\sin 2x\right]_0^{\pi}$

$= \pi$ //

(2) $\int_{-\pi}^{\pi} \sin x\cos x\,dx$ ← $f(x) = \sin x\cos x$ とおくと、

$f(-x) = \sin(-x)\cos(-x)$
$= -f(x)$

$= 0$ //

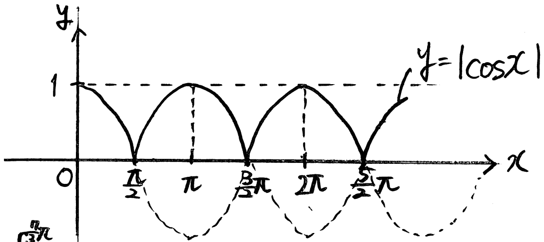
1. 計算

〈定積分の応用〉

[その4] 周期性

例1 次の定積分の値を求めよ。

$$\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{7}{3}\pi} |\cos x|\, dx$$



解)
$$(\text{与式}) = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \cos x\, dx - \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3}{2}\pi} \cos x\, dx + \int_{\frac{3}{2}\pi}^{\frac{7}{3}\pi} \cos x\, dx$$

$$= [\sin x]_{\frac{3}{2}\pi}^{\frac{\pi}{2}} + \int_{\frac{3}{2}\pi}^{\frac{7}{3}\pi} \cos x\, dx + \boxed{\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \cos x\, dx}$$

$x+2\pi=t$ とおくと、$1=\frac{dt}{dx}$

x	$\frac{\pi}{3} \to \frac{\pi}{2}$
t	$\frac{7}{3}\pi \to \frac{5}{2}\pi$

$dx = dt$

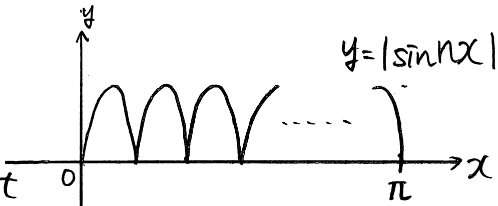
$$= 2 + \int_{\frac{3}{2}\pi}^{\frac{7}{3}\pi} \cos x\, dx + \int_{\frac{7}{3}\pi}^{\frac{5}{2}\pi} \cos(t-2\pi)\, dt$$

$$= 2 + \int_{\frac{3}{2}\pi}^{\frac{7}{3}\pi} \cos x\, dx + \int_{\frac{7}{3}\pi}^{\frac{5}{2}\pi} \cos x\, dx$$

$$= 2 + [\sin x]_{\frac{3}{2}\pi}^{\frac{5}{2}\pi} = 4 \text{ //}$$

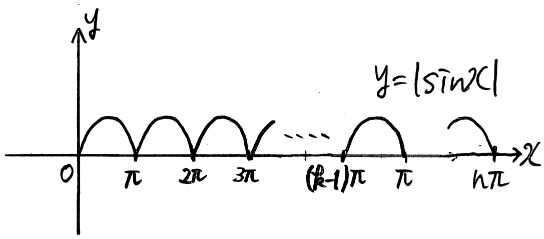
例2 次の定積分を求めよ。

$$\int_0^{\pi} |\sin nx|\, dx$$



解)
$nx=t$ とおくと、$n=\frac{dt}{dx}$ $\therefore dx = \frac{1}{n}dt$

x	$0 \to \pi$
t	$0 \to n\pi$



$$(\text{与式}) = \int_0^{n\pi} |\sin t| \times \frac{1}{n}\, dt$$

$$= \frac{1}{n}\int_0^{n\pi} |\sin x|\, dx$$

$$= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\int_{(k-1)\pi}^{k\pi} |\sin x|\, dx$$

ここで、$x-(k-1)\pi = u$ とすると、$1=\frac{du}{dx}$ $\therefore dx = du$

x	$(k-1)\pi \to k\pi$
u	$0 \to \pi$

$$(\text{与式}) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\int_0^{\pi} |\sin\{u+(k-1)\pi\}|\, du$$

$$= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\int_0^{\pi} |\sin u|\, du$$

$$= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\int_0^{\pi} \sin x\, dx$$

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}[-\cos x]_0^{\pi}$$

$$= \frac{2}{n}\sum_{k=1}^{n} 1$$

$$= \frac{2}{n}\times n$$

$$= 2 \text{ //}$$

1. 計算 ｛「不定積分」と「定積分」｝

〈定積分の応用〉

[その5] 定積分と漸化式

例 $I_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x$ $(n=0,1,2\cdots)$ とする。

(1) I_{n+2} と I_n の関係式を求めよ。

(2) $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^5 x\,dx$ を求めよ。

(3) $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{10} x\,dx$ を求めよ。

解) (1) $n\geqq 0$ において

$$\begin{aligned}
I_{n+2} &= \int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{n+2}x\,dx \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x\times\sin^{n+1}x\,dx \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}}(-\cos x)'\sin^{n+1}x\,dx \\
&= \left[-\cos x\sin^{n+1}x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}-\int_0^{\frac{\pi}{2}}(-\cos x)\times(n+1)\sin^n x\times\cos x\,dx \\
&= (n+1)\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\cos^2 x\,dx \\
&= (n+1)\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin^n x-\sin^{n+2}x)dx \\
&= (n+1)\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\,dx-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{n+2}x\,dx\right) \\
&= (n+1)(I_n-I_{n+2})
\end{aligned}$$

よって、
$$\begin{aligned}
I_{n+2} &= (n+1)(I_n-I_{n+2}) \\
&= (n+1)I_n-(n+1)I_{n+2}
\end{aligned}$$

$\therefore (n+2)I_{n+2}=(n+1)I_n$ 　　 $I_{n+2}=\frac{n+1}{n+2}I_n$ // $(n\geqq 0)$

$$\begin{aligned}
I_0 &= \int_0^{\frac{\pi}{2}}1\cdot dx \\
&= [x]_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi}{2} \,//
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
I_1 &= \int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x\,dx \\
&= [-\cos x]_0^{\frac{\pi}{2}} \\
&= -(0-1) = 1 \,//
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
I_2 &= \int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 x\,dx \\
&= \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\cos 2x)dx \\
&= \frac{1}{2}\left[x-\frac{1}{2}\sin 2x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} \\
&= \frac{\pi}{4} \,//
\end{aligned}$$

2、定積分で表された関数 〈概要〉

「関数決定」2タイプを攻略！

(タイプ1) 区間が定数のみ

(タイプ2) 区間が変数含む

例1 次の等式をみたす関数$f(x)$を求めよ。(タイプ1)

$$f(x) = x + \int_0^1 f(t)e^t dt$$

例2 次の等式をみたす関数$f(x)$と、定数aの値を求めよ。(タイプ2)

$$\int_0^x (x-t)f(t)\,dt = \cos x - a$$

2、定積分で表された関数

（タイプ1） 区間が定数のみ ⇒ $\int_a^b f(t)dt = A$（定数）とおく

例1 次の等式をみたす関数$f(x)$を求めよ。（タイプ1）

$$f(x) = x + \int_0^1 f(t)e^t dt$$

解) $\int_0^1 f(t)e^t dt = A$ とおくと、 $f(x) = x + A$

$$\begin{aligned}
A &= \int_0^1 f(t)e^t dt \\
&= \int_0^1 (t+A)e^t dt \\
&= \int_0^1 (e^t)'(t+A)dt \\
&= \left[e^t(t+A)\right]_0^1 - \int_0^1 e^t \times 1 dt \\
&= e(1+A) - A - \left[e^t\right]_0^1 \\
&= e + eA - A - (e-1)
\end{aligned}$$

$\therefore (2-e)A = 1$ $\qquad A = \dfrac{1}{2-e}$

したがって、 $f(x) = x + \dfrac{1}{2-e}$ //

$$
\begin{aligned}
I_3 &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 x\, dx \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-\cos^2 x)\sin x\, dx \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos^2 x - 1)(\cos x)'\, dx \\
&= \left[\frac{1}{3}\cos^3 x - \cos x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} \\
&= 0-\left(\frac{1}{3}-1\right) = \frac{2}{3} \,/\!/
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
I_4 &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 x\, dx \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin^2 x)^2\, dx \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left\{\frac{1}{2}(1-\cos 2x)\right\}^2 dx \\
&= \frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-2\cos 2x+\cos^2 2x)\, dx \\
&= \frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left\{1-2\cos 2x+\frac{1}{2}(1+\cos 4x)\right\} dx \\
&= \frac{1}{4}\left[\frac{3}{2}x-\sin 2x+\frac{1}{8}\sin 4x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} \\
&= \frac{1}{4}\times\frac{3}{2}\times\frac{\pi}{2} = \frac{3}{16}\pi \,/\!/
\end{aligned}
$$

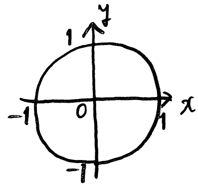
$$
\begin{aligned}
I_5 &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^5 x\, dx \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-\cos^2 x)^2 \sin x\, dx \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (-1+2\cos^2 x-\cos^4 x)(\cos x)'\, dx \\
&= \left[-\cos x+\frac{2}{3}\cos^3 x-\frac{1}{5}\cos^5 x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} \\
&= 0-\left(-1+\frac{2}{3}-\frac{1}{5}\right) \\
&= \frac{15-10+3}{15} = \frac{8}{15} \,/\!/
\end{aligned}
$$

(2) $I_5 = \frac{4}{5} I_3$

$= \frac{4}{5}\times\frac{2}{3}\times 1 = \frac{8}{15}$ //

(3) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{10} x\, dx$

$x = \frac{\pi}{2} - t$ とおくと、$dx = (-1)\, dt$



x	$0 \to \frac{\pi}{2}$
t	$\frac{\pi}{2} \to 0$

$$
\begin{aligned}
\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{10} x\, dx &= \int_{\frac{\pi}{2}}^0 \cos^{10}\left(\frac{\pi}{2}-t\right)(-1)\, dt \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{10} t\, dt \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{10} x\, dx \\
&= I_{10} \\
&= \frac{9}{10} I_8 \\
&= \frac{9}{10}\times\frac{7}{8} I_6 \\
&= \frac{9}{10}\times\frac{7}{8}\times\frac{5}{6}\times\frac{3}{4}\times\frac{1}{2}\times\frac{\pi}{2} \\
&= \frac{63}{512}\pi \,/\!/
\end{aligned}
$$

2、定積分で表された関数

(タイプ2) 区間に変数含む ⇒ $\begin{cases} \circ \\ \circ \end{cases}$

証明

$F'(x) = f(x)$ とする。

$$\frac{d}{dx}\int_{g(x)}^{h(x)} f(t)\,dt = \frac{d}{dx}\Big[F(t)\Big]_{t=g(x)}^{t=h(x)}$$

$$= \frac{d}{dx}\{F(h(x)) - F(g(x))\}$$

$$= F'(h(x))h'(x) - F'(g(x))g'(x) = f(h(x))h'(x) - f(g(x))g'(x)$$

(証明終)

例2 次の等式をみたす関数 $f(x)$ と、定数 a の値を求めよ。(タイプ2)

$$\int_0^x (x-t)f(t)\,dt = \cos x - a \quad \cdots ①$$

解) 初 ①に $x=0$ を代 $0 = \cos 0 - a$ $\therefore a = 1$ //

①について、$\int_0^x \{xf(t) - tf(t)\}\,dt = \cos x - 1$

$\Leftrightarrow x\int_0^x f(t)\,dt - \int_0^x tf(t)\,dt = \cos x - 1$

両辺を x で微分

$$1 \times \int_0^x f(t)\,dt + x \times \frac{d}{dx}\int_0^x f(t)\,dt - \frac{d}{dx}\int_0^x tf(t)\,dt = -\sin x$$

$$\therefore \int_0^x f(t)\,dt = -\sin x$$

両辺 x で微分

$$\frac{d}{dx}\int_0^x f(t)\,dt = -\cos x \qquad \therefore f(x) = -\cos x \text{ //}$$

例 $\dfrac{d}{dx}\displaystyle\int_{x^2}^{x^3} e^t\,dt =$

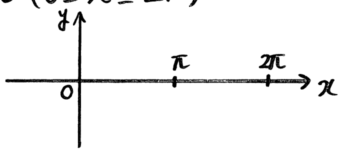
3. 面積

(1) 基本

例1 曲線 $y = x\sin x$ $(0 \leqq x \leqq 2\pi)$ と
x 軸とで囲まれた部分の面積 S を求めよ。

解) $x\sin x = 0$ を解くと、$x = 0, \pi, 2\pi$ $(0 \leqq x \leqq 2\pi)$

$$\begin{cases} 0 \leqq x \leqq \pi \text{ では } x\sin x \geqq 0 \\ \pi \leqq x \leqq 2\pi \text{ では } x\sin x \leqq 0 \end{cases}$$



よって、

$$S = \int_0^{\pi} x\sin x\,dx - \int_{\pi}^{2\pi} x\sin x\,dx$$

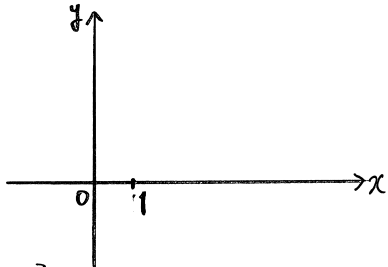
$$= \int_0^{\pi}(-\cos x)'x\,dx + \int_{\pi}^{2\pi}(-\cos x)'x\,dx$$

$$= \left[-x\cos x\right]_0^{\pi} - \int_0^{\pi}(-\cos x)\,dx + \left[-x\cos x\right]_{2\pi}^{\pi} + \int_{2\pi}^{\pi}(-\cos x)\,dx$$

$$= -\pi\times(-1) - 0 + \left[\sin x\right]_0^{\pi} + \{-\pi(-1) - (-2\pi)\times 1\} + \left[\sin x\right]_{2\pi}^{\pi}$$

$$= \pi + 3\pi \quad = 4\pi \text{〃}$$

例2 曲線 $y = \log x$ と点 $(0, 2)$ からこの曲線にひいた
接線および x 軸, y 軸で囲まれた部分の面積 S を求めよ。



解) $f(x) = \log x$ とおくと、$f'(x) = \frac{1}{x}$ $(x > 0)$

接点を $(t, f(t))$ とおくと、接線の方程式は

$$y = f'(t)(x - t) + f(t)$$

$$= \frac{1}{t}(x - t) + \log t \quad (t > 0)$$

$(0, 2)$ を通るので、$2 = -1 + \log t$ より

$$\log t = 3 \qquad \therefore\ t = e^3$$

よって、接線の方程式は $y = \frac{1}{e^3}x + 2 \cdots ①$

$$S = \int_0^1\left(\frac{1}{e^3}x + 2\right)dx + \int_1^{e^3}\left(\frac{1}{e^3}x + 2 - \log x\right)dx$$

$$= \int_0^1\left(\frac{1}{e^3}x + 2\right)dx + \int_1^{e^3}\left(\frac{1}{e^3}x + 2\right)dx - \int_1^{e^3}(x)'\log x\,dx$$

$$= \left[\frac{1}{2e^3}x^2 + 2x\right]_0^{e^3} - \left(\left[x\log x\right]_1^{e^3} - \int_1^{e^3} x \times \frac{1}{x}\,dx\right)$$

$$= \frac{1}{2}e^3 + 2e^3 - \left(3e^3 - 0 - \left[x\right]_1^{e^3}\right)$$

$$= \frac{1}{2}e^3 + 2e^3 - 3e^3 + (e^3 - 1) = \frac{e^3}{2} - 1 \text{〃}$$

(別解)

$$S = \int_0^3 e^y\,dy - \frac{1}{2}\times 1\times e^3$$

$$= \left[e^y\right]_0^3 - \frac{1}{2}e^3$$

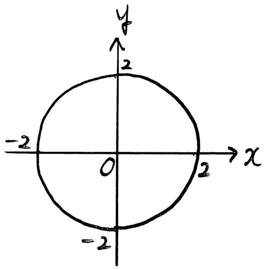
$$= e^3 - 1 - \frac{1}{2}e^3$$

$$= \frac{e^3}{2} - 1 \text{〃}$$

例3 曲線 $x^2+y^2=4$ とその内部について、
$y \geqq 0$ の部分の面積 S を求めよ。

解1) $x^2+y^2=4 \iff y^2=4-x^2$

$\therefore\ y=\pm\sqrt{4-x^2}$



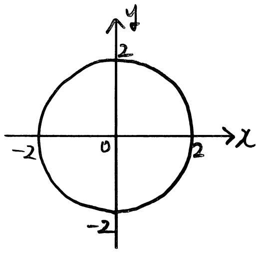
$$S=\int_{-2}^{2}\sqrt{4-x^2}\,dx$$

$x=2\sin\theta$ とおくと、
$dx=2\cos\theta\,d\theta$

$$\begin{array}{c|c} x & -2 \to 2 \\ \hline \theta & -\frac{\pi}{2} \to \frac{\pi}{2} \end{array}$$

$$\begin{aligned} S &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{4-4\sin^2\theta}\times 2\cos\theta\,d\theta \\ &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{4\cos^2\theta}\cdot 2\cos\theta\,d\theta \\ &= 4\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^2\theta\,d\theta \\ &= 4\times\frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(1+\cos 2\theta)\,d\theta \\ &= 2\left[\theta+\frac{1}{2}\sin 2\theta\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \\ &= 2\left\{\frac{\pi}{2}-\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right\} \\ &= 2\pi \;/\!/ \end{aligned}$$

解2)
$x^2+y^2=4$ 上の点は $(2\cos\theta, 2\sin\theta)$ $(0\leqq\theta\leqq 2\pi)$ と表される。
$y\geqq 0$ の部分では $0\leqq\theta\leqq\pi$ である。

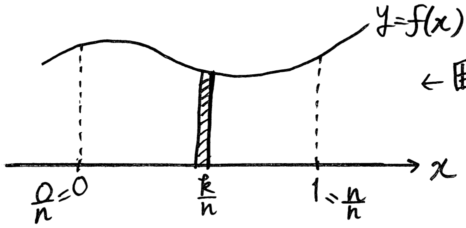


$$\left(\begin{array}{c|c} x & -2 \to 2 \\ \hline \theta & \pi \to 0 \end{array}\right)$$

$$\begin{aligned} S &= \int_{-2}^{2} y\,dx \\ &= \int_{\pi}^{0} 2\sin\theta\times\frac{dx}{d\theta}\times d\theta \\ &= 4\int_{0}^{\pi}\sin^2\theta\,d\theta \\ &= 4\times\frac{1}{2}\int_{0}^{\pi}(1-\cos 2\theta)\,d\theta \\ &= 2\left[\theta-\frac{1}{2}\sin 2\theta\right]_{0}^{\pi} = 2\pi \;/\!/ \end{aligned}$$

3. 面積

(2) 区分求積法



← 囲まれた部分の面積Sを求める。
　　　　　　　　　　　　　　　　　　‖
$$\int_0^1 f(x)\,dx$$

$$\boxed{\left.\begin{array}{l}\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\\ \displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right)\end{array}\right\} = \int_0^1 f(x)\,dx}$$

$\fallingdotseq \underline{\dfrac{1}{n}\times f\left(\dfrac{k}{n}\right)}$　$\boxed{\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}f\left(\frac{k}{n}\right)}$

$1\leqq k\leqq n$で
これを足す。

$\fallingdotseq \underline{\dfrac{1}{n}\times f\left(\dfrac{k}{n}\right)}$　$\boxed{\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{n}f\left(\frac{k}{n}\right)}$

$0\leqq k\leqq n-1$で
これを足す。

$\boxed{\text{無限級数}}$

「部分和 → lim」
↓
「区分求積法」
↓
「はさみうちの原理」

数列の和の極限 ⤴

例 次の極限値を求めよ。

(1) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\sin\frac{k\pi}{2n}$

(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{4n^2-1^2}+\frac{n}{4n^2-2^2}+\frac{n}{4n^2-3^2}+\cdots\cdots+\frac{n}{4n^2-n^2}\right)$

(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{2n}\frac{1}{n+k}$

解) (1) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\sin\frac{k\pi}{2n}=\int_0^1\sin\frac{\pi}{2}x\,dx$

$$=\left[-\frac{2}{\pi}\cos\frac{\pi}{2}x\right]_0^1$$

$$=-\frac{2}{\pi}\left(\cos\frac{\pi}{2}-\cos 0\right)=\frac{2}{\pi}\ //$$

(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{4n^2-1^2}+\frac{n}{4n^2-2^2}+\frac{n}{4n^2-3^2}+\cdots\cdots+\frac{n}{4n^2-n^2}\right)$

$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{n}{4n^2-k^2}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{n^2}{4n^2-k^2}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{4-\left(\frac{k}{n}\right)^2}$$

$$=\int_0^1\frac{1}{4-x^2}\,dx$$

$$=\int_0^1\frac{1}{(2+x)(2-x)}\,dx$$

$$=\frac{1}{4}\int_0^1\left(\frac{1}{2+x}+\frac{1}{2-x}\right)dx$$

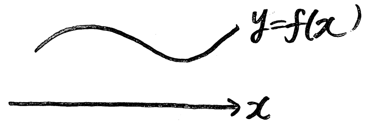
$$=\frac{1}{4}\Big[\log|2+x|-\log|2-x|\Big]_0^1$$

$$=\frac{1}{4}\left[\log\left|\frac{2+x}{2-x}\right|\right]_0^1$$

$$=\frac{1}{4}(\log 3-\log 1)$$

$$=\frac{1}{4}\log 3\ //$$

(3) $\displaystyle \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{2n}\frac{1}{n+k} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{2n}\frac{1}{1+\frac{k}{n}}$



$$= \int_0^2 \frac{1}{1+x}\,dx$$

$$= \Big[\log|1+x|\Big]_0^2$$

$$= \log 3 \;/\!/$$

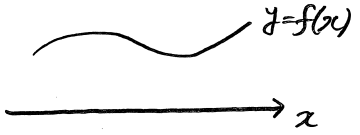
$1+x=t$ とおくと、

$$\int_1^3 \frac{1}{t}\,dt = \Big[\log|t|\Big]_1^3$$

(別解)

$$(\text{与式}) = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=n+1}^{3n}\frac{1}{k}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=n+1}^{3n}\frac{1}{\frac{k}{n}} = \int_1^3 \frac{1}{x}\,dx$$



3、面積

(3) 不等式への応用 〈2つ〉 $\begin{cases} \text{(i) 長方形の階段} \\ \text{(ii) 定積分と不等式} \end{cases}$

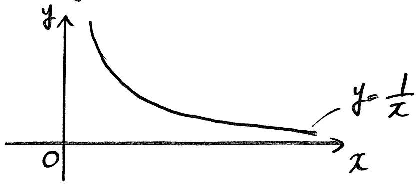
(i) 長方形の階段

例1 $y=\frac{1}{x}$ のグラフを利用して、次の不等式を証明せよ。

$$\log(n+1) < 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots\cdots+\frac{1}{n} < 1+\log n$$

証明

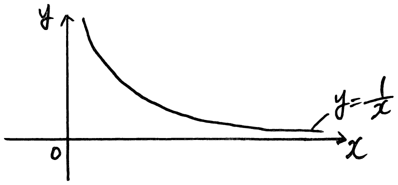
(ア) $\log(n+1) < 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots\cdots+\frac{1}{n}$ を示す。



図の S は、$S=\int_1^{n+1}\frac{1}{x}dx$
(面積) $=\left[\log|x|\right]_1^{n+1}$
$=\log(n+1)$

一方、図の区間 $[1, n+1]$ に対応する長方形の階段状の部分の面積の和を S_n とすると、$S_n=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots\cdots+\frac{1}{n}$
図より、$S<S_n$ だから、$\log(n+1)<1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots\cdots+\frac{1}{n}$

(イ) $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots\cdots+\frac{1}{n} < 1+\log n$ を示す。



図の S' は $S'=\int_1^{n}\frac{1}{x}dx$
$=\left[\log|x|\right]_1^{n}$
$=\log n$

一方、図の区間 $[1, n]$ に対応する長方形の階段上の部分の面積の和を S_n' とすると、$S_n'=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots\cdots+\frac{1}{n}$
図より、$S_n'<S'$ だから $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots\cdots+\frac{1}{n}<\log n$
$\therefore 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots\cdots+\frac{1}{n}<1+\log n$

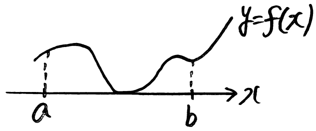
(ア)(イ)により、$\log(n+1) < 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots\cdots+\frac{1}{n} < 1+\log n$ (証明終)

(ii) 定積分と不等式

$f(x)$ が区間 $[a, b]$ で連続な関数で、常に $f(x) \geqq 0$ であるとき、
この関数のグラフと x 軸および 2 直線 $x=a$, $x=b$ とで囲まれた部分の面積を考えると、次のことが分かる。

区間 $[a, b]$ で $f(x) \geqq 0$ であって、常には $f(x)=0$ でないとき、

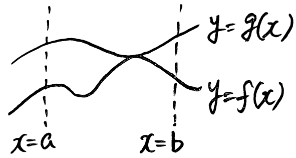
$$\int_a^b f(x)\,dx > 0$$



まとめ

区間 $[a, b]$ で $f(x) \leqq g(x)$ のとき
(常には $f(x)=g(x)$ ではない)

$$\int_a^b f(x)\,dx < \int_a^b g(x)\,dx$$



例2 次の不等式を証明せよ。

$$\frac{1}{2} < \int_0^1 \frac{dx}{1+x^3} < 1$$

証明　$0 \leqq x \leqq 1$ の範囲では $0 \leqq x^3 \leqq 1$

つまり、$1 \leqq 1+x^3 \leqq 2$ だから、

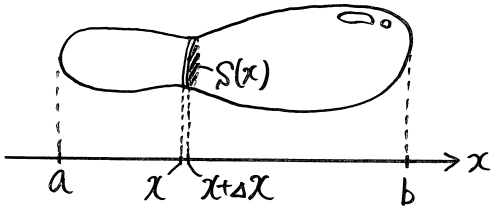
$$\frac{1}{2} \leqq \frac{1}{1+x^3} \leqq 1$$

$$\therefore \int_0^1 \frac{1}{2}\,dx < \int_0^1 \frac{1}{1+x^3}\,dx < \int_0^1 1\,dx$$

よって、$\frac{1}{2} < \int_0^1 \frac{1}{1+x^3}\,dx < 1$　　(証明終)

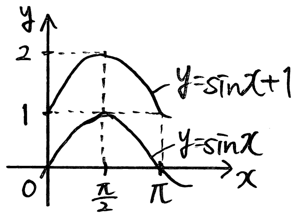
4、体積

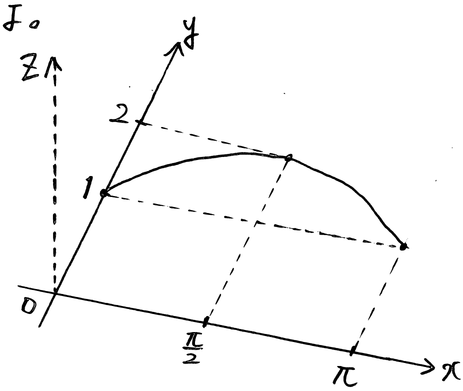
(1) 非回転体



例 xy平面上に、A(x, 0), B(x, 1+sinx) を両端とする線分ABがある。
ABを1辺とし、xy平面と垂直な正方形ABCDを、xy平面の一方の側で作る。
xが $0 \leqq x \leqq \pi$ の範囲で変化するとき、正方形ABCDの内部と周が通過してできる立体の体積を求めよ。

解）





求める体積をVとすると、

$$V = \int_0^{\pi} (1+\sin x)^2 dx$$

$$= \int_0^{\pi} (1 + 2\sin x + \sin^2 x)\, dx$$

$$= \int_0^{\pi} \left(\frac{3}{2} + 2\sin x - \frac{1}{2}\cos 2x\right) dx$$

$$= \left[\frac{3}{2}x - 2\cos x - \frac{1}{4}\sin 2x\right]_0^{\pi}$$

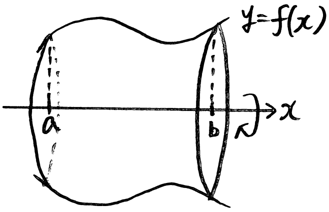
$$= \frac{3}{2}\pi - 2(-1-1)$$

$$= \frac{3}{2}\pi + 4 \,/\!/$$

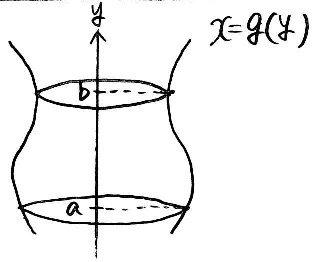
4、体積

(2) 回転体

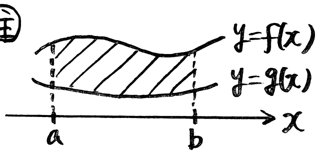
$\boxed{x\text{軸まわりの回転}}$



$\boxed{y\text{軸まわりの回転}}$



㊟



$$V_x = \pi\int_a^b \{f(x)-g(x)\}^2 dx$$

$$V_x = \pi\int_a^b \left[\{f(x)\}^2-\{g(x)\}^2\right] dx$$

㊫ 曲線 $y=\log x$ と原点からこの曲線に引いた接線および x軸とで囲まれた領域をDとする。

(1) Dを x軸のまわりに1回転してできる立体の体積 V_x を求めよ。

(2) Dを y軸のまわりに1回転してできる立体の体積 V_y を求めよ。

解) $f(x)=\log x$ とおくと、$f'(x)=\frac{1}{x}$

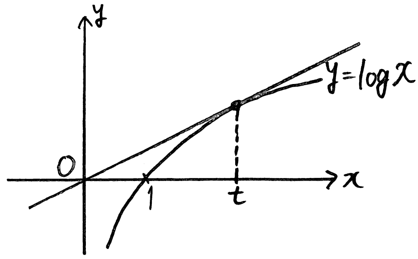
接点を $(t, f(t))$ とすると、接線の方程式は

$$y = f'(t)(x-t)+f(t) \quad (t>0)$$

$$= \frac{1}{t}(x-t)+\log t$$

これが $(0,0)$ を通るので、$0=-1+\log t$

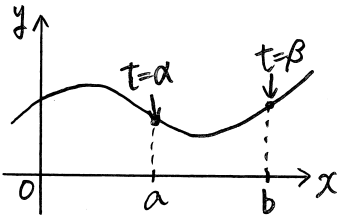
∴ $t=e$ より、接線の方程式は $y=\frac{1}{e}x$

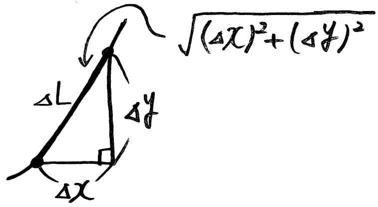


(1)
$$V_x = \pi\int_0^e \left(\frac{1}{e}x\right)^2 dx - \pi\int_1^e (\log x)^2 dx$$
$$= \pi\int_0^e \frac{1}{e^2}x^2 dx - \pi\int_1^e (x)'(\log x)^2 dx$$
$$= \pi\left[\frac{1}{3e^2}x^3\right]_0^e - \pi\left([x\log x]_1^e - \int_1^e x\times 2\log x\times\frac{1}{x}dx\right)$$
$$= \pi\times\frac{1}{3}e - \pi\left\{e-0-2\int_1^e (x)'\log x\, dx\right\}$$
$$= \frac{\pi}{3}e - \pi e + 2\pi\left([x\log x]_1^e - \int_1^e x\times\frac{1}{x}dx\right)$$
$$= -\frac{2}{3}\pi e + 2\pi\{e-(e-1)\} \quad = \frac{2}{3}\pi(3-e) \,/\!/$$

(2)
$$V_y = \pi\int_0^1 \{(e^y)^2-(ey)^2\} dy$$
$$= \pi\int_0^1 (e^{2y}-e^2y^2)\, dy$$
$$= \pi\left[\frac{1}{2}e^{2y}-\frac{e^2}{3}y^3\right]_0^1$$
$$= \pi\left\{\frac{1}{2}(e^2-1)-\frac{e^2}{3}\right\} \quad = \frac{\pi}{6}(e^2-3) \,/\!/$$

5、曲線の長さ





$$\Delta L \fallingdotseq \sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}$$

$$\sqrt{1+\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2}\times\Delta x \qquad \sqrt{\left(\frac{\Delta x}{\Delta t}\right)^2+\left(\frac{\Delta y}{\Delta t}\right)^2}\times\Delta t$$

まとめ1

曲線 $y=f(x)$ $(a\leqq x\leqq b)$ の長さ L は

$$L=\int_a^b\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx$$
$$=\int_a^b\sqrt{1+\{f'(x)\}^2}\,dx$$

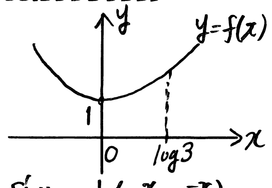
まとめ2

曲線 $x=f(t),\ y=g(t)$ $(\alpha\leqq t\leqq\beta)$ の長さ L は

$$L=\int_\alpha^\beta\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,dt$$
$$=\int_\alpha^\beta\sqrt{\{f'(t)\}^2+\{g'(t)\}^2}\,dt$$

例1 $f(x)=\frac{1}{2}(e^x+e^{-x})$ とする。曲線 $y=f(x)$ の $0\leqq x\leqq\log 3$ の部分の長さを求めよ。

解



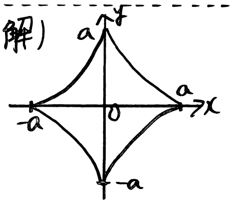
$f'(x)=\frac{1}{2}(e^x-e^{-x})$

求める長さを L とすると、

$$L=\int_0^{\log 3}\sqrt{1+\{\tfrac{1}{2}(e^x-e^{-x})\}^2}\,dx$$
$$=\int_0^{\log 3}\sqrt{1+\tfrac{1}{4}(e^{2x}-2+e^{-2x})}\,dx$$
$$=\int_0^{\log 3}\sqrt{\tfrac{1}{4}(e^{2x}+2+e^{-2x})}\,dx$$
$$=\int_0^{\log 3}\sqrt{\{\tfrac{1}{2}(e^x+e^{-x})\}^2}\,dx$$
$$=\int_0^{\log 3}\left|\tfrac{1}{2}(e^x+e^{-x})\right|dx$$
$$=\frac{1}{2}\int_0^{\log 3}(e^x+e^{-x})\,dx$$
$$=\frac{1}{2}\left[e^x-e^{-x}\right]_0^{\log 3}$$
$$=\frac{1}{2}\{e^{\log 3}-e^{-\log 3}-(1-1)\}$$
$$\frac{1}{2}(e^{\log 3}-e^{\log 3^{-1}})$$
$$=\frac{1}{2}\left(3-\frac{1}{3}\right)$$
$$=\frac{1}{2}\times\frac{8}{3}=\frac{4}{3}\,/\!/$$

例2 アステロイド $\begin{cases}x=a\cos^3\theta\\ y=a\sin^3\theta\end{cases}$ $(a>0,\ 0\leqq\theta\leqq\frac{\pi}{2})$ の長さ L を求めよ。

解)



$$\frac{dx}{d\theta}=3a\cos^2\theta\times(-\sin\theta)$$
$$=-3a\cos^2\theta\sin\theta$$
$$\frac{dy}{d\theta}=3a\sin^2\theta\cos\theta$$

$$L=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{(-3a\cos^2\theta\sin\theta)^2+(3a\sin^2\theta\cos\theta)^2}\,d\theta$$
$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{9a^2\cos^2\theta\sin^2\theta(\cos^2\theta+\sin^2\theta)}\,d\theta$$
$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{\tfrac{9}{4}a^2(2\sin\theta\cos\theta)^2}\,d\theta$$
$$=\frac{3}{2}a\int_0^{\frac{\pi}{2}}|\sin 2\theta|\,d\theta=\frac{3}{2}a\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin 2\theta\,d\theta$$
$$=\frac{3}{2}a\left[-\frac{1}{2}\cos 2\theta\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$
$$=-\frac{3}{4}a(\cos\pi-\cos 0)$$
$$=-\frac{3}{4}a\times(-2)$$
$$=\frac{3}{2}a\,/\!/$$

6、その他

〈物理量〉 3つのステップ

[Step1] 直線上の動点、

例1 x軸上の動点Pの時刻t ($t \geqq 0$) における位置が $x(t)=t^2-4t$ で与えられるとき、

(1) 時刻 $t=1, 5$ における速度 $v(t)$ をそれぞれ求めよ。

(2) 時刻 $t=0$ から $t=5$ までに点Pの動く道のりを求めよ。

解) 準備 (速度・加速度)

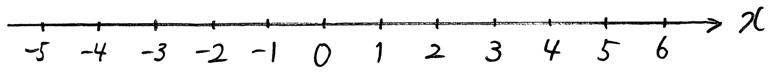
$$\frac{(距離)}{(時間)} = (速さ) \qquad \frac{(速度)}{(時間)} = (加速度)$$

$\dfrac{\Delta x}{\Delta t} \to v$ ← 瞬間速度

$\displaystyle\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{dx}{dt} = v$

$\dfrac{\Delta v}{\Delta t} \to \alpha$ ← 瞬間加速度

$\displaystyle\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{dv}{dt} = \alpha$



(1) $v(t) = \dfrac{dx(t)}{dt}$

$= x'(t) = 2t-4$

$v(1) = -2$ //

$v(5) = 6$ //

(2) $(道のり) = \displaystyle\int_a^b |v(t)|\,dt$

$$\int_0^5 |2t-4|\,dt = \int_0^2 |2t-4|\,dt + \int_2^5 |2t-4|\,dt$$

$$= -\int_0^2 (2t-4)\,dt + \int_2^5 (2t-4)\,dt$$

$$= [t^2-4t]_2^0 + [t^2-4t]_2^5$$

$$= 0-(-4)+5-(-4)$$

$$= 13$$ //

6. その他

〈物理量〉 3つのステップ

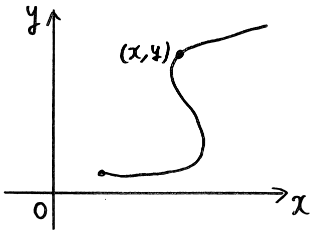
[STEP 2] 座標平面上の動点

例2 平面上の動点Pの時刻 t $(t \geqq 0)$ における位置が
$x = 2 + 3t$, $y = t^{\frac{3}{2}}$ で表されているとき、
$t = 0$ から $t = 5$ までに点Pの動く道のりを求めよ。

曲線の長さ

$$\int_0^5 \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\, dt$$

解) 準備(速度・加速度)



$$v_x = \frac{dx}{dt}$$
$$v_y = \frac{dy}{dt}$$

$$\frac{dx}{dt} = 3, \quad \frac{dy}{dt} = \frac{3}{2}t^{\frac{1}{2}}$$

求める道のりを S とすると、

$$S = \int_0^5 \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\, dt$$
$$= \int_0^5 \sqrt{3^2 + \left(\frac{3}{2}t^{\frac{1}{2}}\right)^2}\, dt$$
$$= \int_0^5 \sqrt{9 + \frac{9}{4}t}\, dt$$
$$\int_0^5 \sqrt{\frac{9}{4}(t+4)}\, dt$$
$$= \frac{3}{2}\int_0^5 \sqrt{t+4}\, dt$$
$$= \frac{3}{2}\int_0^5 (t+4)^{\frac{1}{2}}\, dt$$
$$= \frac{3}{2}\left[\frac{2}{3}(t+4)^{\frac{3}{2}}\right]_0^5$$
$$= 9^{\frac{3}{2}} - 4^{\frac{3}{2}}$$
$$= (9^{\frac{1}{2}})^3 - (4^{\frac{1}{2}})^3$$
$$= 27 - 8 = 19$$

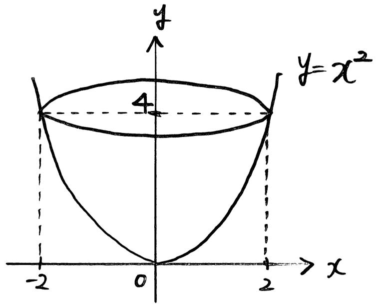
[STEP 3] 水の問題 (空間)

例13 曲線 $y=x^2$ の $0 \leqq x \leqq 2$ に対応する部分を y 軸のまわりに回転してできる容器がある。この容器に毎秒 2 の割合で上から水を注ぐ。

(1) 水面の高さが h のとき、注がれた水の体積を求めよ。
(2) 水が満杯になるまでにかかる時間 T を求めよ。
(3) 水面の高さが 2 のとき、水面の上昇する速度を求めよ。

解)

(1) 求める体積を V とすると、



$$V = \pi\int_0^h x^2\,dy \quad (0 \leqq h < 4)$$
$$= \pi\int_0^h y\,dy$$
$$= \pi\left[\frac{1}{2}y^2\right]_0^h$$
$$= \frac{\pi}{2}h^2 \,/\!/$$

(2) 水が満杯のとき、$h=4$ より、$V = \frac{\pi}{2} \times 4^2 = 8\pi$

$$T = \frac{8\pi}{2} = 4\pi \,/\!/$$

(3) $$\frac{dh}{dt} = \frac{\frac{dV}{dt}}{\frac{dV}{dh}}$$
$$= \frac{2}{\pi h}$$

$h=2$ のときの速度だから、$\frac{2}{\pi \times 2} = \frac{1}{\pi} \,/\!/$