数学Ⅲ

１９　　微分

＜講義ノート＞

微分（数学Ⅲ）

１．計算

２．接線

３．グラフ

４．最大・最小

５．方程式＆不等式への応用

（１）方程式への応用

（２）不等式への応用

６．その他

（１）微分可能と連続

（２）平均値の定理

1、計算

(その1) 公式作り～計算全体像へ。

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

例 $f'(x)$を求めよ。

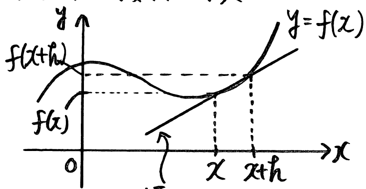
(1) $f(x) = x^n$ (n：2以上の整数)

解) $$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$
$$= \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^n - x^n}{h}$$
$$= \lim_{h\to 0} \frac{x^n + {}_nC_1 x^{n-1}h + {}_nC_2 x^{n-2}h^2 + \cdots + h^n - x^n}{h}$$
$$= nx^{n-1}$$ //

微分 ← 導関数を求めること。

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

↑ $y=f(x)$ 上の点 $(x, f(x))$ における接線の傾き



傾き $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$

(2) $f(x) = \frac{1}{x}$

解) $$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$
$$= \lim_{h\to 0} \frac{\frac{1}{x+h} - \frac{1}{x}}{h}$$
↓ 分母分子に $x(x+h)$ をかけて
$$= \lim_{h\to 0} \frac{x-(x+h)}{hx(x+h)}$$
$$= \lim_{h\to 0} \frac{-h}{hx(x+h)}$$
$$= \frac{-1}{x^2} = -\frac{1}{x^2}$$ //

$\boxed{n\text{が負の整数でも } (x^n)' = nx^{n-1}\ ?}$

(3) $f(x) = \sqrt{x}$

解) $$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$
$$= \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h}$$
↓ 逆有理化
$$= \lim_{h\to 0} \frac{(\sqrt{x+h}-\sqrt{x})(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})}{h(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})}$$
$$= \lim_{h\to 0} \frac{h}{h(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$ //

$$f'(x) = \frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}-1}$$
$$= \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}\ ??$$

$\boxed{n\text{が有理数でも } (x^n)' = nx^{n-1}\ ?}$

(4) $f(x) = \sin x$

解) $f(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$

$= \lim_{h \to 0} \frac{\sin(x+h) - \sin x}{h}$

$= \lim_{h \to 0} \frac{\sin x \cos h + \cos x \sin h - \sin x}{h}$

$\begin{cases} \lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \\ \lim_{x \to 0} \frac{\tan x}{x} = 1 \end{cases}$

$= \lim_{h \to 0} \frac{\cos x \sin h - \sin x (1 - \cos h)}{h}$

$= \lim_{h \to 0} \left(\cos x \times \frac{\sin h}{h} - \sin x \times \frac{1 - \cos h}{h} \right)$

$= \lim_{h \to 0} \left\{ \cos x \times \frac{\sin h}{h} - \sin x \times \frac{1 - \cos^2 h}{h(1 + \cos h)} \right\}$

$= \lim_{h \to 0} \left\{ \cos x \times \frac{\sin h}{h} - \sin x \times \frac{\sin h \times \sin h}{h(1 + \cos h)} \right\}$

$= \cos x$ //

(5) $f(x) = \cos x$

解) $f(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$

$= \lim_{h \to 0} \frac{\cos(x+h) - \cos x}{h}$

$= \lim_{h \to 0} \frac{\cos x \cos h - \sin x \sin h - \cos x}{h}$

$\lim_{h \to 0} \frac{\sin h}{h} = 1$

$= \lim_{h \to 0} \frac{-\sin x \sin h - \cos x (1 - \cos h)}{h}$

$= \lim_{h \to 0} \left(-\sin x \times \frac{\sin h}{h} - \cos x \times \frac{1 - \cos h}{h} \right)$

$= -\sin x$ //

(6) $f(x) = \tan x$

解) $f(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$

$= \lim_{h \to 0} \frac{\tan(x+h) - \tan x}{h}$

$= \lim_{h \to 0} \frac{\frac{\tan x + \tan h}{1 - \tan x \tan h} - \tan x}{h}$

分母・分子に $(1 - \tan x \tan h)$ をかけて

$= \lim_{h \to 0} \frac{\tan x + \tan h - \tan x (1 - \tan x \tan h)}{h(1 - \tan x \tan h)}$

$= \lim_{h \to 0} \frac{\tan h (1 + \tan^2 x)}{h(1 - \tan x \tan h)}$

$= 1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$ //

(7) $f(x) = a^x \quad (a>0,\ a \neq 1)$

解) $f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$

$= \lim_{h \to 0} \frac{a^{x+h} - a^x}{h}$

$= \lim_{h \to 0} \frac{a^x(a^h - 1)}{h}$

$= a^x \log a$ //

$$\begin{cases} \lim_{h \to 0} \frac{a^h - 1}{h} = \log a \\ \lim_{h \to 0} \frac{e^h - 1}{h} = 1 \end{cases}$$

(8) $f(x) = e^x$

解) $f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$

$= \lim_{h \to 0} \frac{e^{x+h} - e^x}{h}$

$= \lim_{h \to 0} \frac{e^x(e^h - 1)}{h} = e^x$ //

(9) $f(x) = \log_a x$

解) $f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$

$= \lim_{h \to 0} \frac{\log_a(x+h) - \log_a x}{h}$

$\log_a M - \log_a N = \log_a \frac{M}{N}$

$= \lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \log_a \frac{x+h}{x}$

$= \lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \log_a \left(1 + \frac{h}{x}\right)$

$= \lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \left\{\log_a \left(1 + \frac{h}{x}\right)^{\frac{x}{h}}\right\}^{\frac{h}{x}}$

$= \lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \times \frac{h}{x} \log_a \left(1 + \frac{h}{x}\right)^{\frac{x}{h}}$

$= \frac{1}{x} \log_a e = \frac{1}{x \log a}$ //

$$\begin{cases} \lim_{x \to 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e \\ \lim_{x \to 0} \frac{\log(1+x)}{x} = 1 \end{cases}$$

(10) $f(x) = \log x$

解) (9)で、$a=e$とすれば、$f'(x) = \frac{1}{x}$ //

1、計算 〈全体像〉

[公式]

(i) $(\sin x)' = \cos x$

(ii) $(\cos x)' = -\sin x$

(iii) $(\tan x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$

(iv) $(a^x)' = a^x \log a$

(v) $(e^x)' = e^x$

(vi) $(\log_a x)' = \dfrac{1}{x \log a}$

(vii) $(\log x)' = \dfrac{1}{x}$

[手法]

(i) 積・商の微分

(ii) 合成関数の微分

(iii) 逆関数の微分

(iv) 陰関数の微分

(v) 対数微分法

(vi) 媒介変数表示の関数の微分

[x^nの微分]

(i) n: 自然数

(ii) n: 整数

(iii) n: 有理数

(iv) n: 実数

$\boxed{\text{$(x^n)' = nx^{n-1}$ の成立を (i)から(iv)の順に、(i)~(vi)を用いて示していく。}}$

(aは$a>0$かつ$a \neq 1$)

1、計算

(その2) 計算全体像 〈前半戦〉

(Ⅰ) 積・商の微分

$\boxed{\text{積の微分}}$ $\{f(x)g(x)\}' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$

証明

$P(x) = f(x)g(x)$ とおくと、

$$f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

$$g'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{g(x+h)-g(x)}{h}$$

$$\begin{aligned}\{f(x)g(x)\}' &= P'(x)\\ &= \lim_{h\to 0}\frac{P(x+h)-P(x)}{h}\\ &= \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)g(x+h)-f(x)g(x)}{h}\\ &= \lim_{h\to 0}\frac{\{f(x+h)-f(x)\}g(x+h)+f(x)\{g(x+h)-g(x)\}}{h}\\ &= \lim_{h\to 0}\left\{\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\times g(x+h)+f(x)\times\frac{g(x+h)-g(x)}{h}\right\}\end{aligned}$$

$(fg)' = f'g + fg'$

$$= f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$ (証明終)

例1 次の関数を微分せよ。

(1) $y = (2x+1)(3x+2)$

(2) $y = e^x \sin x$

(3) $y = (\cos x)\log x$

解) (1) $y = (2x+1)(3x+2)$

$$\begin{aligned}y' &= (2x+1)'(3x+2) + (2x+1)(3x+2)'\\ &= 2(3x+2) + (2x+1)\times 3\\ &= 6x+4+6x+3\\ &= 12x+7 \;/\!/\end{aligned}$$

(別解)

$$y = (2x+1)(3x+2) = 6x^2+7x+2$$ より

$$y' = 12x+7 \;/\!/$$

(2) $y = e^x \sin x$

$$\begin{aligned}y' &= (e^x)'\sin x + e^x(\sin x)'\\ &= e^x\sin x + e^x\cos x\\ &= e^x(\sin x + \cos x)\\ &= \sqrt{2}e^x\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right) \;/\!/\end{aligned}$$

(3) $y = (\cos x)/\log x$

$$\begin{aligned}y' &= (\cos x)'\log x + \cos x(\log x)'\\ &= (-\sin x)\log x + (\cos x)\times\frac{1}{x}\\ &= -(\sin x)\log x + \frac{\cos x}{x} \;/\!/\end{aligned}$$

$\boxed{\text{商の微分}}$ $\left\{\dfrac{f(x)}{g(x)}\right\}' = \dfrac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{\{g(x)\}^2}$

証明 $Q(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)}$ とおくと

$$\left\{\frac{f(x)}{g(x)}\right\}' = Q'(x)$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{Q(x+h)-Q(x)}{h}$$

$f'(x) = \lim_{h\to 0}\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$

$g'(x) = \lim_{h\to 0}\dfrac{g(x+h)-g(x)}{h}$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{\dfrac{f(x+h)}{g(x+h)}-\dfrac{f(x)}{g(x)}}{h}$$

分母・分子に $g(x+h)g(x)$ をかけて

$$= \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)g(x)-f(x)g(x+h)}{h\,g(x+h)g(x)}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{\{f(x+h)-f(x)\}g(x)-f(x)\{g(x+h)-g(x)\}}{h\times g(x+h)g(x)}$$

$$= \lim_{h\to 0}\left\{\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\times g(x)-f(x)\times\frac{g(x+h)-g(x)}{h}\right\}\times\frac{1}{g(x+h)g(x)}$$

$\left(\dfrac{f}{g}\right)' = \dfrac{f'g-fg'}{g^2}$

$$= \frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{\{g(x)\}^2}$$

(証明終)

例2 次の関数を微分せよ。

$$y = \frac{x+1}{x^2+x+1}$$

解)

$$y' = \frac{(x+1)'(x^2+x+1)-(x+1)(x^2+x+1)'}{(x^2+x+1)^2}$$

$$= \frac{1\times(x^2+x+1)-(x+1)\times(2x+1)}{(x^2+x+1)^2}$$

$$= \frac{x^2+x+1-(2x^2+3x+1)}{(x^2+x+1)^2}$$

$$= \frac{-x(x+2)}{(x^2+x+1)^2}$$ //

(ii) n:整数 で、$(x^n)' = nx^{n-1}$

∘ nが 0 または 正の整数のときは 証明済。… (※1)

∘ nが負の整数のとき $n=-m$ とすると (m:自然数)

$$
\begin{aligned}
(x^n)' &= (x^{-m})' \\
&= \left(\frac{1}{x^m}\right)' \\
&= \frac{0 \times x^m - 1 \times mx^{m-1}}{(x^m)^2} \\
&= \frac{-mx^{m-1}}{x^{2m}} \\
&= -mx^{m-1-2m} \\
&= -mx^{-m-1} \\
&= nx^{n-1} \quad \cdots (※2)
\end{aligned}
$$

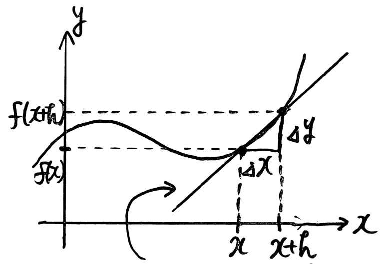
(※1)(※2)により、
n:整数 のとき、$(x^n)' = nx^{n-1}$ ■

例3 $f(x) = x^{-4}$ のとき
$f'(x) = -4x^{-5}$

(iii) 合成関数の微分

例 $y = \sin(4x+1)$ について。

$$
\begin{aligned}
y' &= \frac{dy}{dx} \\
&= \frac{dy}{dt} \times \frac{dt}{dx} \\
&= \cos t \times 4 \\
&= 4\cos(4x+1) \ //
\end{aligned}
$$



傾き $= \dfrac{f(x+h) - f(x)}{h}$

$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$

$y' = \dfrac{dy}{dx} = \lim_{x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$

$\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{dy}{dt} \times \dfrac{dt}{dx}$

例4 次の関数を微分せよ。

(1) $y = \dfrac{1}{(x^2+3x+1)^3}$

(2) $y = \cos^2 x$

(3) $y = e^{-x^2}$

(4) $y = \log(\cos x)$

解) (1) $y = \dfrac{1}{(x^2+3x+1)^3}$

$= (x^2+3x+1)^{-3}$

$y = t^{-3}$, $t = x^2+3x+1$

$$
\begin{aligned}
y' &= \frac{dy}{dx} \\
&= \frac{dy}{dt} \times \frac{dt}{dx} \\
&= -3(x^2+3x+1)^{-4} \times (2x+3) \\
&= -\frac{3(2x+3)}{(x^2+3x+1)^4} \ //
\end{aligned}
$$

(2) $y = \cos^2 x$

$= (\cos x)^2$

$y = t^2$, $t = \cos x$

$$
\begin{aligned}
\frac{dy}{dx} &= \frac{dy}{dt} \times \frac{dt}{dx} \\
&= 2\cos x \times (-\sin x) \\
&= -2\sin x \cos x \ // \\
&= -\sin 2x \ //
\end{aligned}
$$

(3) $y = e^{-x^2}$

$y = e^t$, $t = -x^2$

$y' = e^{-x^2} \times (-2x)$

$= -2xe^{-x^2}$ //

(4) $y = \log(\cos x)$

$y = \log t$, $t = \cos x$

$y' = \dfrac{1}{\cos x} \times (-\sin x)$

$= -\dfrac{\sin x}{\cos x}$ //

$= -\tan x$ //

(vi) $(\log_a x)' = \dfrac{1}{x\log a}$

(vii) $(\log x)' = \dfrac{1}{x}$ について。

$(\log|x|)'$を考える。

$\begin{cases} \circ\ x>0 \text{ のとき } (\log|x|)' = (\log x)' = \dfrac{1}{x} \\ \circ\ x<0 \text{ のとき } (\log|x|)' = \{\log(-x)\}' \end{cases}$

$= \dfrac{1}{-x} \times (-1) = \dfrac{1}{x}$

(vi) についても同様に考えて、

(vi)' $(\log_a x)' = \dfrac{1}{x\log a}$

(vii)' $(\log|x|)' = \dfrac{1}{x}$

1、計算

(その3) 計算全体像〈後半戦〉

(ⅲ) 逆関数の微分

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}}$$

例 $y = x^{\frac{1}{3}}$ について、$y^3 = x$

両辺を y で微分

$$3y^2 = \frac{dx}{dy}$$

よって、

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}} = \frac{1}{3y^2} = \frac{1}{3(x^{\frac{1}{3}})^2}$$

$$= \frac{1}{3} \times \frac{1}{x^{\frac{2}{3}}} = \frac{1}{3}(x^{\frac{2}{3}})^{-1} = \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{3}x^{\frac{1}{3}-1}$$

(ⅲ) n：有理数 で $(x^n)' = nx^{n-1}$ (?)

① $y = x^{\frac{1}{m}}$ (m：自然数) で、$y' = \frac{1}{m}x^{\frac{1}{m}-1}$ となるか？

$y = x^{\frac{1}{m}}$ の両辺を m 乗して、$y^m = (x^{\frac{1}{m}})^m = x$

両辺を y で微分すると、$my^{m-1} = \frac{dx}{dy}$

したがって、

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}} = \frac{1}{my^{m-1}} = \frac{1}{m(x^{\frac{1}{m}})^{m-1}}$$

$$= \frac{1}{mx^{1-\frac{1}{m}}} = \frac{1}{m} \times (x^{1-\frac{1}{m}})^{-1} = \frac{1}{m}x^{\frac{1}{m}-1}$$

よって、$(x^{\frac{1}{m}})' = \frac{1}{m}x^{\frac{1}{m}-1}$ ■

② $y = x^{\frac{l}{m}}$ (l：整数、m：自然数) で、$y' = \frac{l}{m}x^{\frac{l}{m}-1}$ となるか？

$y = (x^{\frac{1}{m}})^l$ について、

$y = t^l$, $t = x^{\frac{1}{m}}$

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \times \frac{dt}{dx} = l(x^{\frac{1}{m}})^{l-1} \times \frac{1}{m}x^{\frac{1}{m}-1} = \frac{l}{m} \times x^{\frac{l}{m}-\frac{1}{m}+\frac{1}{m}-1} = \frac{l}{m}x^{\frac{l}{m}-1}$$

よって、$(x^{\frac{l}{m}})' = \frac{l}{m}x^{\frac{l}{m}-1}$ ■

①②より、n：有理数 で、$(x^n)' = nx^{n-1}$

(iv) 陰関数の微分

例 $\underbrace{x^2+y^2=1}$

$\underbrace{x^2+y^2-1}_{F(x,y)}=0$

(準備) $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{d}{dx}y$ 　xで微分

$$\frac{d}{dx}f(y)=\boxed{\frac{d}{dy}f(y)}^{f'(y)}\times\frac{dy}{dx}$$

$$\boxed{\frac{d}{dx}f(y)=f'(y)\times\frac{dy}{dx}}$$

$x^2+y^2=1$ の両辺をxで微分

$$2x+\frac{d}{dx}y^2=0$$

$$\therefore\ x+y\times\frac{dy}{dx}=0$$

$$\Leftrightarrow\ y\times\frac{dy}{dx}=-x \quad \rightsquigarrow \quad \frac{dy}{dx}=-\frac{x}{y}\ (y\neq0)$$

(v) 対数微分法

例 $y=x^x\ (x>0)$ について。

両辺ともに正なので、自然対数をとって

$$\log y=\log x^x$$

$$=x\log x$$

両辺xで微分

$$\frac{1}{y}\times\frac{dy}{dx}=1\times\log x+x\times\frac{1}{x}$$

$$\frac{dy}{dx}=y(\log x+1)$$

$$=x^x(\log x+1)\,/\!/$$

例 $(x^{\sqrt{2}})'=\sqrt{2}x^{\sqrt{2}-1}\ (x>0)$

(iv) α:実数 で $(x^\alpha)'=\alpha x^{\alpha-1}$ (?)

$y=x^\alpha\ (x>0)$ について、

両辺、自然対数をとって、

$$\log y=\log x^\alpha$$

$$=\alpha\log x$$

両辺xで微分

$$\frac{1}{y}\times\frac{dy}{dx}=\alpha\times\frac{1}{x}$$

$$\frac{dy}{dx}=\alpha\times\frac{y}{x}$$

$$=\alpha x^{\alpha-1}$$

α:実数 で $(x^\alpha)'=\alpha x^{\alpha-1}\ (x>0)$

(vi) 媒介変数表示の関数の微分

例 $\dfrac{dy}{dx}$ を求めよ。

$$\begin{cases}x=\cos t\\ y=\sin t\end{cases}\quad (t:\text{媒介変数})$$

パラメータ

$$\boxed{\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}}$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}$$

$$=\frac{\cos t}{-\sin t}\,/\!/ \quad =-\frac{1}{\tan t}\,/\!/$$

1、計算

(応用) 高次導関数

まずは、「第2次導関数」から。

$f'(x)$ の導関数

y'', $f''(x)$, $\dfrac{d^2y}{dx^2}$, $\dfrac{d^2}{dx^2}f(x)$

関数 $y=f(x)$ の導関数を $f'(x)$ とし、$f'(x)$ の導関数が存在するとして

例1

(1) $y=\log x$ について、$y'=\dfrac{1}{x}$, $y''=-\dfrac{1}{x^2}$

(2) $y=2^x$ について、$y'=2^x\log 2$, $y''=2^x(\log 2)^2$

例2

$\begin{cases} x=t+\dfrac{1}{t} \\ y=t-\dfrac{1}{t} \end{cases}$ について、$\dfrac{d^2y}{dx^2}$ をtで表せ。

解) $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}$

$=\dfrac{1+\frac{1}{t^2}}{1-\frac{1}{t^2}}$

$=\dfrac{t^2+1}{t^2-1}$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)$$

$$=\frac{d}{dx}\left(\frac{t^2+1}{t^2-1}\right)$$

$$=\frac{d}{dt}\left(\frac{t^2+1}{t^2-1}\right)\times\frac{dt}{dx}$$

$$=\frac{2t(t^2-1)-(t^2+1)\times 2t}{(t^2-1)^2}\times\frac{1}{\frac{dx}{dt}}$$

$$=\frac{-4t}{(t^2-1)^2}\times\frac{1}{1-\frac{1}{t^2}}$$

$$=\frac{-4t}{(t^2-1)^2}\times\frac{t^2}{t^2-1}=-4\left(\frac{t}{t^2-1}\right)^3 /\!/$$

次に「第n次導関数」

関数 $y=f(x)$ をn回微分して得られる関数

$y^{(n)}$, $f^{(n)}(x)$, $\dfrac{d^ny}{dx^n}$, $\dfrac{d^n}{dx^n}f(x)$

例3 $y^{(n)}$ を求めよ。

(1) $y=x^n$

(2) $y=e^{3x}$

(3) $y=\sin x$

解) (1) $y=x^n$

$y'=nx^{n-1}$

$y''=n(n-1)x^{n-2}$

$y^{(3)}=n(n-1)(n-2)x^{n-3}$

$\vdots$

$y^{(n)}=n(n-1)(n-2)\times\cdots\times 2\times 1\times x^{n-n}$

$=n!$ // (推定)

数学的帰納法

(2) $y = e^{3x}$

$y' = 3e^{3x}$

$y'' = 3^2 e^{3x}$

$y^{(3)} = 3^3 e^{3x}$

$\vdots$

$y^{(n)} = 3^n e^{3x}$ //

(3) $y = \sin x$

$y' = \cos x$

$y'' = -\sin x$

$y''' = -\cos x$

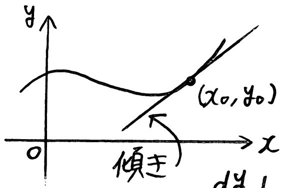
$y^{(4)} = \sin x$

mを自然数として、

$$y^{(n)} = \begin{cases} \cos x & (n = 4m-3) \\ -\sin x & (n = 4m-2) \\ -\cos x & (n = 4m-1) \\ \sin x & (n = 4m) \end{cases}$$ //

2、接線

〈基本編〉



$$m = \left.\frac{dy}{dx}\right|_{\substack{x=x_0\\ y=y_0}}$$

$(f'(x_0))$

$\boxed{\text{関数の型}}$

- $y=f(x)$ 型
- 陰関数型
- 媒介変数表示型

$\boxed{\begin{array}{l}\text{点}(x_0, y_0)\text{を通り、}\\ \text{傾き}m\text{の直線の方程式は}\\ \quad y = m(x-x_0)+y_0\end{array}}$

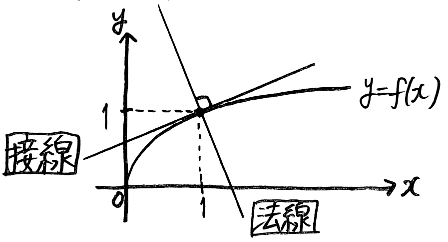
曲線上の点(x_0, y_0)における接線の方程式は、

$$y = m(x-x_0)+y_0$$

例1 次の問いに答えよ。

(1) $y=\sqrt{x}$ 上の点 $(1, 1)$ での接線 および 法線 の方程式を求めよ。

解) $f(x)=\sqrt{x}$ とおくと、$f(x)=x^{\frac{1}{2}}$ より、$f'(x)=\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}=\frac{1}{2\sqrt{x}}$



接線の方程式は、$y=f'(1)(x-1)+1$

$$=\frac{1}{2}(x-1)+1$$
$$=\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}\ //$$

法線の方程式は、

$$y=-2(x-1)+1$$
$$=-2x+3\ //$$

(2) 曲線 $\sqrt{x}+\sqrt{y}=3$ 上の点 $(1, 4)$ における接線の方程式を求めよ。

解) $\sqrt{x}+\sqrt{y}=3$，つまり

$$x^{\frac{1}{2}}+y^{\frac{1}{2}}=3$$

この両辺をxで微分して、

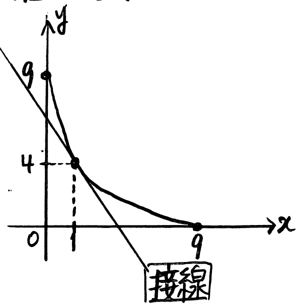
$$\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}+\frac{1}{2}y^{-\frac{1}{2}}\times\frac{dy}{dx}=0$$

$$\boxed{\begin{array}{l}\frac{d}{dx}f(y)\\ \quad = f'(y)\times\frac{dy}{dx}\end{array}}$$

$$\therefore\ \frac{1}{\sqrt{y}}\times\frac{dy}{dx}=-\frac{1}{\sqrt{x}}$$

$$\frac{dy}{dx}=-\sqrt{\frac{y}{x}}\quad(x>0)$$

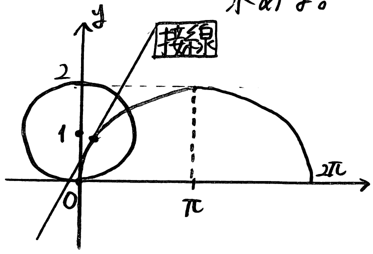
したがって、$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{\substack{x=1\\ y=4}}=-\sqrt{\frac{4}{1}}=-2$



接線の方程式は、

$$y=-2(x-1)+4$$
$$=-2x+6\ //$$

(3) 曲線 $\begin{cases} x = \theta - \sin\theta \\ y = 1 - \cos\theta \end{cases}$ の $\theta = \frac{\pi}{2}$ に対応する点での接線の方程式を求めよ。



解) $\theta = \frac{\pi}{2}$ のとき、

$$(x, y) = \left(\frac{\pi}{2} - \sin\frac{\pi}{2},\ 1 - \cos\frac{\pi}{2}\right)$$
$$= \left(\frac{\pi}{2} - 1,\ 1\right)$$

また、$\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{\frac{dy}{d\theta}}{\frac{dx}{d\theta}}$

$$= \frac{\sin\theta}{1 - \cos\theta}$$

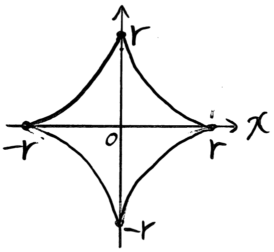
よって、$\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{\theta = \frac{\pi}{2}} = \dfrac{\sin\frac{\pi}{2}}{1 - \cos\frac{\pi}{2}} = 1$

接線の方程式は、

$$y = 1 \times \left\{x - \left(\frac{\pi}{2} - 1\right)\right\} + 1$$
$$= x - \frac{\pi}{2} + 2 \ //$$

$\begin{cases} x = r(\theta - \sin\theta) & (r > 0) \\ y = r(1 - \cos\theta) & (0 \leqq \theta \leqq 2\pi) \end{cases}$

サイクロイド



$\begin{cases} x = r\cos^3\theta & (r > 0) \\ y = r\sin^3\theta & (0 \leqq \theta \leqq 2\pi) \end{cases}$

アステロイド

2、接線

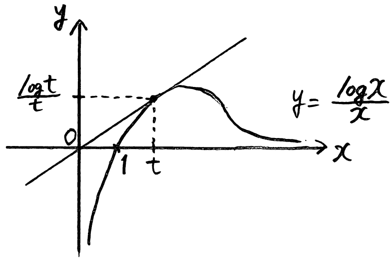
〈応用編〉 2つ

① 接点が分からないとき ⇒

例1 曲線 $y=\dfrac{\log x}{x}$ に原点からひいた接線の方程式を求めよ。

解） $f(x)=\dfrac{\log x}{x}$ $(x>0)$ とおくと、

$$f'(x)=\frac{\frac{1}{x}\times x-\log x\times 1}{x^2}=\frac{1-\log x}{x^2}$$



接点を $(t, f(t))$ とおくと、
接線の方程式は、

$$y=f'(t)(x-t)+f(t)=\frac{1-\log t}{t^2}(x-t)+\frac{\log t}{t}$$

$y=m(x-x_0)+y_0$

これが $(0,0)$ を通るので、

$$0=\frac{1-\log t}{t^2}\times(-t)+\frac{\log t}{t}$$

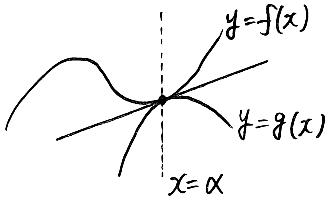
$$\therefore 0=-(1-\log t)+\log t=2\log t-1$$

$\log t=\frac{1}{2}$ より、 $t=e^{\frac{1}{2}}=\sqrt{e}$

①に代入

$$y=\frac{1-\log\sqrt{e}}{(\sqrt{e})^2}x=\frac{1}{2e}x \text{ //}$$

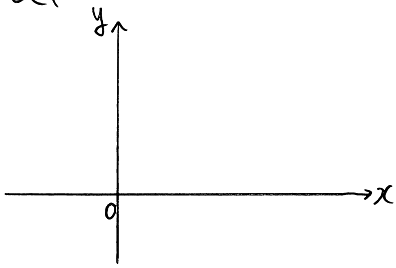
② 2曲線が接する



接点の x 座標を α とするとき、

$$\begin{cases} \circ\ f(\alpha)=g(\alpha) \\ \circ\ f'(\alpha)=g'(\alpha) \end{cases}$$

例2 2曲線 $y=e^x$ と $y=\sqrt{ax}$ $(a>0)$ が接するとき、
接点の座標と a の値を求めよ。



解） $f(x)=e^x$，$g(x)=\sqrt{ax}$ とおくと、

$$f'(x)=e^x,\quad g'(x)=\sqrt{a}\times\frac{1}{2\sqrt{x}}$$

接点の x 座標を α とおくと、

$$\begin{cases} f(\alpha)=g(\alpha) \\ \text{かつ} \\ f'(\alpha)=g'(\alpha) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} e^\alpha=\sqrt{a\alpha} & \cdots ① \\ \text{かつ} \\ e^\alpha=\dfrac{\sqrt{a}}{2\sqrt{\alpha}} & \cdots ② \end{cases}$$

①② より、 $\sqrt{a}\sqrt{\alpha}=\dfrac{\sqrt{a}}{2\sqrt{\alpha}}$ $\therefore \alpha=\frac{1}{2}$

① より、 $e^{\frac{1}{2}}=\sqrt{a}\times\frac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow \sqrt{a}=\sqrt{2}e^{\frac{1}{2}}$
$\Leftrightarrow a=2e$

接点の座標は $\left(\frac{1}{2},\sqrt{e}\right)$
$a=2e$ //

3、グラフ 〈まずは基本から〉

例1 $y=\dfrac{2x}{x^2+1}$ のグラフを書け。

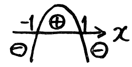
$$\left(\frac{f}{g}\right)'=\frac{f'g-fg'}{g^2}$$

解) $y'=\dfrac{2\times(x^2+1)-2x\times 2x}{(x^2+1)^2}$

$=\dfrac{-2x^2+2}{(x^2+1)^2}$

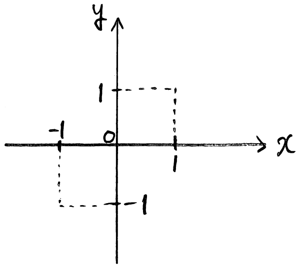
$=\dfrac{-2(x+1)(x-1)}{(x^2+1)^2}$

$\left(y=-2(x+1)(x-1) \right)$



$y'=0$ のとき、$x=\pm 1$

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$
y'		0		0	
y		-1		1	



$\begin{cases} 極大値\ 1\ (x=1) \\ 極小値\ -1\ (x=-1) \end{cases}$

$\displaystyle\lim_{x\to\pm\infty}\frac{2x}{x^2+1}=0$

$f(-x)=\dfrac{-2x}{x^2+1}=-f(x)$

$f(x)$は奇関数

- グラフを書くには 「増減」「極値」
- 忘れちゃならねぇ 「定義域」「極限」
- 必要ならば 「凹凸」「漸近線」

例2 $y=\dfrac{x^2+1}{x}$ のグラフを書け。

解) 定 $x\neq 0$ のもとで

$y=\dfrac{x^2+1}{x}$

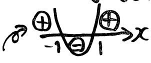
$=x+\dfrac{1}{x}$ について。

$y'=1-\dfrac{1}{x^2}$

$=\dfrac{x^2-1}{x^2}$

$=\dfrac{(x-1)(x+1)}{x^2}$

$y=(x-1)(x+1)$



$y'=0$ のとき、$x=\pm 1$

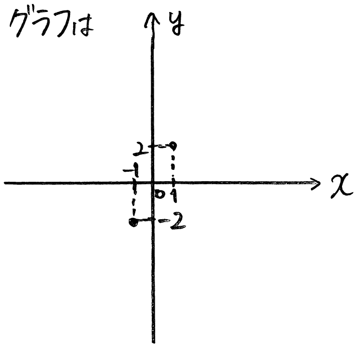
x		-1		0		1
y'		0				0
y		-2				2

$\begin{cases} 極大値\ -2\ (x=-1) \\ 極小値\ 2\ (x=1) \end{cases}$

$\boxed{極限}$

- $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\left(x+\frac{1}{x}\right)=-\infty$
- $\displaystyle\lim_{x\to-0}\left(x+\frac{1}{x}\right)=-\infty$
- $\displaystyle\lim_{x\to+0}\frac{x^2+1}{x}=+\infty$
- $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+1}{x}=+\infty$

よって、グラフは



3、グラフ ＜グラフの練習（4項目まで）

。

。

。

例）次の関数の極値を求め、$y=f(x)$ のグラフを書け。

(1) $f(x)=x-2\sqrt{x}$

解）定 $x\geqq 0$ のもとで、

$$f'(x)=1-\frac{1}{\sqrt{x}}$$

$$=\frac{\sqrt{x}-1}{x}\quad(x>0)$$

$f'(x)=0$ のとき、$x=1$

x	0	$\cdots$	1	
$f'(x)$	／		0	
$f(x)$	0		-1	

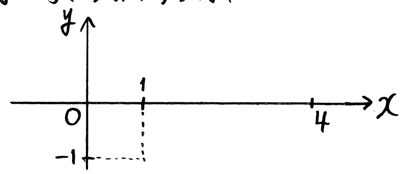
極小値 -1 $(x=1)$

$\boxed{\text{極限}}$

$$\lim_{x\to+\infty}(x-2\sqrt{x})=\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x}(\sqrt{x}-2)$$

$$=+\infty$$

$y=f(x)$ のグラフは、



(2) $f(x)=2\sin x-\sin 2x\quad(-\pi\leqq x\leqq\pi)$

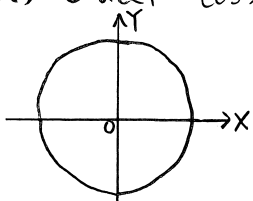
$$f'(x)=2\cos x-2\cos 2x$$

$$=2(\cos x-\cos 2x)$$

$$=-2(2\cos^2 x-\cos x-1)$$

$$=-2(2\cos x+1)(\cos x-1)$$

$f'(x)=0$ のとき、$\cos x=-\frac{1}{2},\ 1$



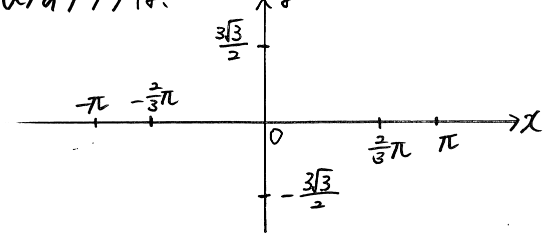
$\therefore x=-\frac{2}{3}\pi,\ 0,\ \frac{2}{3}\pi$

$$\left(\begin{aligned}f\left(\tfrac{2}{3}\pi\right)&=2\times\tfrac{\sqrt{3}}{2}-\left(-\tfrac{\sqrt{3}}{2}\right)\\&=\tfrac{3\sqrt{3}}{2}\\f\left(-\tfrac{2}{3}\pi\right)&=2\times\left(-\tfrac{\sqrt{3}}{2}\right)-\tfrac{\sqrt{3}}{2}\\&=-\tfrac{3\sqrt{3}}{2}\end{aligned}\right)$$

x	$-\pi$	$\cdots$	$-\frac{2}{3}\pi$	$\cdots$	0	$\cdots$	$\frac{2}{3}\pi$	$\cdots$	π
$f'(x)$			0		0		0		
$f(x)$	0		$-\frac{3\sqrt{3}}{2}$		0		$\frac{3\sqrt{3}}{2}$		0

$\begin{cases}\text{極大値 }\frac{3\sqrt{3}}{2}\ \left(x=\frac{2}{3}\pi\right)\\\text{極小値 }-\frac{3\sqrt{3}}{2}\ \left(x=-\frac{2}{3}\pi\right)\end{cases}$ //

$y=f(x)$ のグラフは、



(3) $f(x) = \dfrac{\log x}{x}$

解) 定 $x>0$ かつ $x \neq 0$,
つまり、$x>0$ のもと、

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{x}\times x - \log x \times 1}{x^2} = \frac{1-\log x}{x^2}$$

$f'(x)=0$ のとき $\log x = 1$
$\therefore x = e$

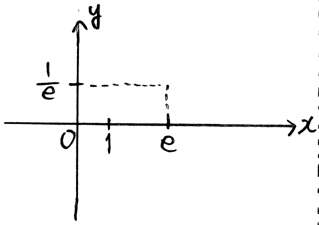
x	0	$\cdots$	e	$\cdots$
$f'(x)$			0	
$f(x)$			$\frac{1}{e}$	

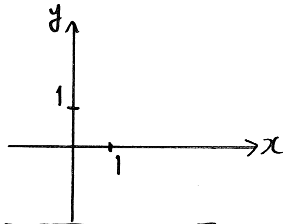
極大値 $\frac{1}{e}$ $(x=e)$ //

ここで、

$$\lim_{x\to+0} \frac{\log x}{x} = -\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\log x}{x} = 0$$





$\boxed{\text{最終極限公式}}$

$x \to +\infty$ のとき、

$\log x \ll x^n \ll e^x$

(4) $f(x) = xe^{-x} = \dfrac{x}{e^x}$

解) 定 O.K.

$$f'(x) = 1\times e^{-x} + x\times(-e^{-x}) = (1-x)e^{-x}$$

$f'(x)=0$ のとき、$x=1$

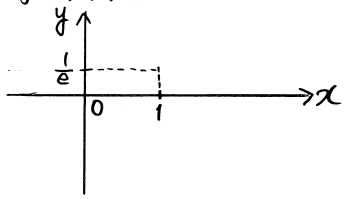
x	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$		0	
$f(x)$		$\frac{1}{e}$	

極大値 $\frac{1}{e}$ $(x=1)$

ここで、$\lim_{x\to-\infty} xe^{-x} = -\infty$

$$\lim_{x\to+\infty} xe^{-x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{e^x} = 0$$

$y=f(x)$ のグラフは



（凹凸）

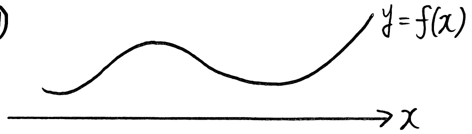
$\begin{cases} f'(x)>0 \text{ の区間では、} f(x) \text{ は「増加」} \\ f'(x)<0 \text{ の区間では、} f(x) \text{ は「減少」} \end{cases}$

$f''(x)>0$ の区間では、$f'(x)$ は「増加」 $\Rightarrow$ $y=f(x)$ のグラフは「下に凸」
$f''(x)<0$ の区間では、$f'(x)$ は「減少」 $\Rightarrow$ $y=f(x)$ のグラフは「上に凸」

まとめ

$\begin{cases} f''(x)>0 \text{ の区間では、} y=f(x) \text{ のグラフは「下に凸」} \\ f''(x)<0 \text{ の区間では、} y=f(x) \text{ のグラフは「上に凸」} \end{cases}$

例



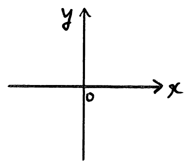
$f'(x)$

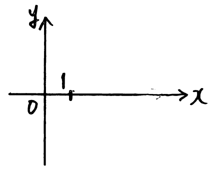
$f''(x)$

例

(1) $f(x)=x^3$
$f'(x)=3x^2$
$f''(x)=6x$

(2) $f(x)=\log x \ (x>0)$
$f'(x)=\frac{1}{x}$
$f''(x)=-\frac{1}{x^2}$





問 次の関数の増減・極値・凹凸を調べて、そのグラフを書け。

$y=xe^x$

解）$f(x)=xe^x$ とおく。 定 O.K.

$f'(x)=1\times e^x+x\times e^x$
$\quad=(x+1)e^x$

$f'(x)=0$ のとき、$x=-1$

$f''(x)=1\times e^x+(x+1)\times e^x$
$\quad=(x+2)e^x$

$f''(x)=0$ のとき、$x=-2$

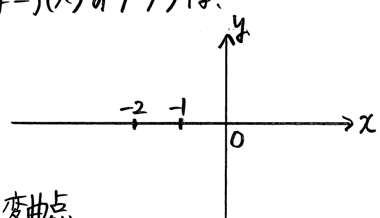
x	$\cdots$	-2	$\cdots$	-1	$\cdots$
$f'(x)$				0	
$f''(x)$		0			
$f(x)$		$-\frac{2}{e^2}$		$-\frac{1}{e}$	

極小値 $-\frac{1}{e}$ $(x=-1)$

また、$\lim_{x\to-\infty} xe^x=\lim_{t\to+\infty}-\frac{t}{e^t}=0$

$\lim_{x\to\infty} xe^x=+\infty$

$y=f(x)$ のグラフは、



変曲点
$(-2, -\frac{2}{e^2})$

(漸近線)

$y=\dfrac{(x\text{の整式①})}{(x\text{の整式②})}$ について(既約)　　($\lim_{x\to\alpha\pm0} y=\pm\infty$)

$\begin{cases} (x\text{の整式②})=0 \text{ をみたす } x \text{ の値 } \alpha \text{ について、} x=\alpha \text{ が漸近線。} \\ [(x\text{の整式①})\text{の次数}]=[(x\text{の整式②})\text{の次数}]+1 \text{ のとき} \end{cases}$

$x\to\pm\infty$ において、$y=mx+n\ (m\neq0)$ 形の漸近線が存在する。

[求め方] 2通り

① 帯分数に直す

② $x\to\pm\infty$ のときに、$y=mx+n$ という漸近線があるとすると、

$$\begin{cases} m=\lim_{x\to\pm\infty}\dfrac{f(x)}{x} \\ n=\lim_{x\to\pm\infty}\{f(x)-mx\} \end{cases}$$

$x\to\pm\infty$ のとき、$f(x)\to mx+n$

つまり、$\dfrac{f(x)}{x}\to m+\dfrac{1}{x}$

また、$f(x)-mx\to n$

例 $y=\dfrac{x^2}{x-2}$ について。

漸近線の1つは、$x=2$.

また、$y=\dfrac{(x-2)(x+2)+4}{x-2}$

$=x+2+\dfrac{4}{x-2}$

$$\begin{array}{r} x+2 \\ x-2\,\overline{)\,x^2} \\ \underline{x^2-2x} \\ 2x \\ \underline{2x-4} \\ 4 \end{array}$$

よって、漸近線は $x=2$ と $y=x+2$

$y=\dfrac{x^2}{x-2}$ が $x\to\pm\infty$ において、$y=mx+n$ という漸近線をもつとすると、

$m=\lim_{x\to\pm\infty}\dfrac{x^2}{x(x-2)}$

$=\lim_{x\to\pm\infty}\dfrac{1}{1-\frac{2}{x}}=1$

$n=\lim_{x\to\pm\infty}\left(\dfrac{x^2}{x-2}-x\right)$

$=\lim_{x\to\pm\infty}\dfrac{x^2-x(x-2)}{x-2}$

$=\lim_{x\to\pm\infty}\dfrac{2}{1-\frac{2}{x}}=2$

よって、$y=x+2$.

例 $y=\dfrac{x^2}{x-2}$ のグラフを書く。(漸近線は $x=2$ と $y=x+2$)

定 $x\neq2$ のもとで

$y'=\dfrac{2x(x-2)-x^2\times1}{(x-2)^2}$

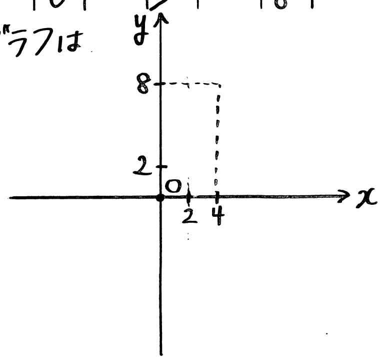
$=\dfrac{x(x-4)}{(x-2)^2}$ → ($y=x(x-4)$ ⊕ 0 ⊖ 4 ⊕ x)

$y'=0$ のとき、$x=0,4$

x	…	0	…	2	…	4	…
y'		0		/		0	
y		0		/		8	

$\begin{cases} \text{極大値 } 0\ (x=0) \\ \text{極小値 } 8\ (x=4) \end{cases}$

よって、グラフは



例 $y=\sqrt{x^2+1}$ のグラフを書く。

定 o.k.

$y'=\frac{1}{2}(x^2+1)^{-\frac{1}{2}}\times 2x$

$=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$

$y'=0$ のとき、$x=0$

x	$\cdots$	0	$\cdots$
y'		0	
y		1	

極小値 1 $(x=0)$

($\boxed{\text{極限}}$ ここで、$\lim_{x\to\pm\infty}\sqrt{x^2+1}=+\infty$)

漸 $y=\sqrt{x^2+1}$ が $x\to\pm\infty$ で $y=mx+n$ という漸近線をもつとすると、

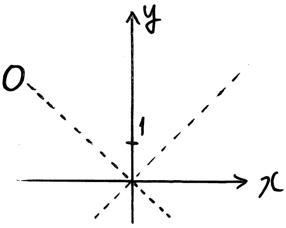
$x\to+\infty$ $m=\lim_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+1}}{x}=\lim_{x\to+\infty}\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}=1$

$x\to-\infty$ $m=\lim_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+1}}{x}=\lim_{t\to+\infty}\dfrac{\sqrt{t^2+1}}{-t}=-1$

$n=\lim_{x\to\pm\infty}(\sqrt{x^2+1}-x)$

$=\lim_{x\to\pm\infty}\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}+x}=0$

$\therefore y=x,\ y=-x$



3、グラフ 〈グラフの練習（6項目すべて）〉

- グラフを書くには　「増減」「極値」
- 忘れちゃならねぇ　「定義域」「極限」
- 必要ならば　「凹凸」「漸近線」

例 次の関数の増減・極値・凹凸・漸近線を調べ、そのグラフを書け。

(1) $y=\dfrac{x^3}{1-x^2}$　　(2) $y=\dfrac{x^3}{x^2+1}$

解) (1) $f(x)=\dfrac{x^3}{1-x^2}$ とおくと、

定 $x\neq\pm1$ のもとで考える。

$f(-x)=\dfrac{-x^3}{1-x^2}=-f(x)$ だから、

$y=f(x)$ のグラフは原点に関して対称。
したがって、まずは $x\geqq0$ の部分を考える。

$$f'(x)=\frac{3x^2(1-x^2)-x^3\times(-2x)}{(1-x^2)^2}$$
$$=\frac{-x^4+3x^2}{(1-x^2)^2}$$
$$=\frac{-x^2(x+\sqrt{3})(x-\sqrt{3})}{(1-x^2)^2}$$

$f'(x)=0$ のとき、$x=0,\ \sqrt{3},\ (-\sqrt{3})$

$$f''(x)=\frac{(-4x^3+6x)(1-x^2)^2-(-x^4+3x^2)\times2(1-x^2)\times(-2x)}{(1-x^2)^4}$$
$$=\frac{4x^5-10x^3+6x+4x(-x^4+3x^2)}{(1-x^2)^3}$$
$$=\frac{2x(x^2+3)}{(1-x^2)^3}$$

$f''(x)=0$ のとき、$x=0$

x	0	$\cdots$	1	$\cdots$	$\sqrt{3}$	$\cdots$
$f'(x)$	0		／		0	
$f''(x)$	0		／			
$f(x)$	0		／		$-\frac{3\sqrt{3}}{2}$	

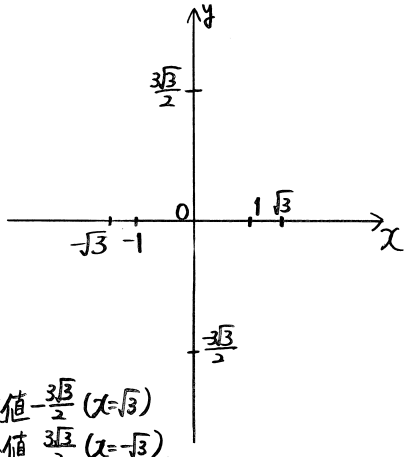
漸 ここで $x=1\,(x=-1)$ は漸近線

また、$y=\dfrac{x^3}{1-x^2}$

$$=\frac{(-x^2+1)(-x)+x}{1-x^2}$$
$$=-x+\frac{x}{1-x^2}$$

$y=-x$ も漸近線。$(x\to\pm\infty)$

よって、グラフは



$\begin{cases}\text{極大値}\ -\frac{3\sqrt{3}}{2}\ (x=\sqrt{3})\\ \text{極小値}\ \frac{3\sqrt{3}}{2}\ (x=-\sqrt{3})\end{cases}$ //

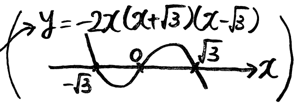
(2) $f(x)=\dfrac{x^3}{x^2+1}$ とおく。奇 O.K.

$f(-x)=-f(x)$ より、
$y=f(x)$ のグラフは原点に関して対称。
よって、$x\geqq 0$ において まず調べていく。

$$f'(x)=\frac{3x^2(x^2+1)-x^3\times 2x}{(x^2+1)^2}$$
$$=\frac{x^4+3x^2}{(x^2+1)^2}$$
$$=\frac{x^2(x^2+3)}{(x^2+1)^2}$$

$f'(x)=0$ となるのは、$x=0$ のとき。

$$f''(x)=\frac{(4x^3+6x)(x^2+1)^2-(x^4+3x^2)\times 2(x^2+1)\times 2x}{(x^2+1)^4}$$
$$=\frac{4x^5+10x^3+6x-4x(x^4+3x^2)}{(x^2+1)^3}$$
$$=\frac{-2x(x+\sqrt{3})(x-\sqrt{3})}{(x^2+1)^3}$$



$f''(x)=0$ となるのは、$x=0,\ \sqrt{3}\ (,-\sqrt{3})$ のとき。

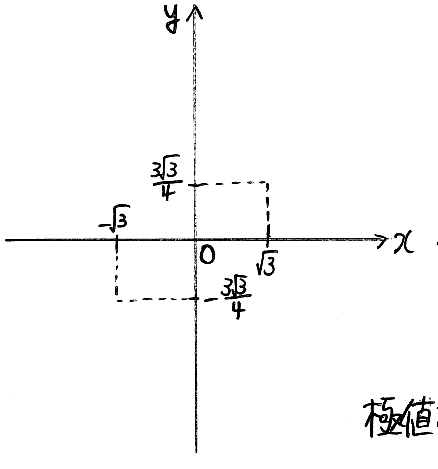
x	0	$\cdots$	$\sqrt{3}$	$\cdots$
$f'(x)$	0			
$f''(x)$	0		0	
$f(x)$	0		$\frac{3\sqrt{3}}{4}$	

$$\begin{cases} m=\lim_{x\to\pm\infty}\dfrac{f(x)}{x} \\ n=\lim_{x\to\pm\infty}\{f(x)-mx\} \end{cases}$$

漸 $y=\dfrac{x^3}{x^2+1}$ が、$y=mx+n$ という漸近線をもつとすると $(x\to\pm\infty)$

$$m=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^3}{x(x^2+1)}=1$$
$$n=\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{x^3}{x^2+1}-x\right)$$
$$=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^3-x(x^2+1)}{x^2+1}=0$$

よって、$y=x$ である。



極値なし

3、グラフ ― 媒介変数表示の関数
パラメータ

例1 tが $-1 \leqq t \leqq 1$ の範囲で変化するとき、

$$x = t^2 - 1 \ , \quad y = t^3 - t$$

で表されるxy平面上の曲線の概形をかけ。

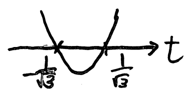
解) 定 O.K.

$x = t^2 - 1$ から、$\dfrac{dx}{dt} = 2t$

$\dfrac{dx}{dt} = 0$ となるのは、$t = 0$

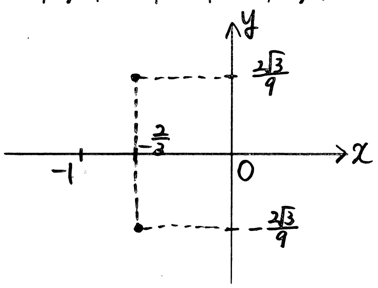
$y = t^3 - t$ から、$\dfrac{dy}{dt} = 3t^2 - 1$

$= (\sqrt{3}t + 1)(\sqrt{3}t - 1)$



$\dfrac{dy}{dt} = 0$ となるのは、$t = \pm\dfrac{1}{\sqrt{3}}$

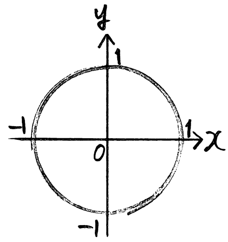
t	-1	$\cdots$	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\cdots$	0	$\cdots$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\cdots$	1
$\frac{dx}{dt}$					0				
$\frac{dy}{dt}$			0				0		
x	0	$\cdots$	$-\frac{2}{3}$	$\cdots$	-1	$\cdots$	$-\frac{2}{3}$	$\cdots$	0
y	0		$\frac{2\sqrt{3}}{9}$				$-\frac{2\sqrt{3}}{9}$		0



$y = t^3 - t$ について、
$t = -t$ とすると、
$(-t^3) - (-t)$
$= -t^3 + t$
$= -y$

例2 アステロイド $\begin{cases} x = r\cos^3\theta \\ y = r\sin^3\theta \end{cases}$ $(r>0,\ 0 \leqq \theta \leqq 2\pi)$

のグラフをかけ。



解) 定 O.K. $x = x(\theta)$, $y = y(\theta)$ とおくと、

$$\begin{cases} x(2\pi-\theta) = r\cos^3(2\pi-\theta) = r\cos^3\theta = x(\theta) \\ y(2\pi-\theta) = r\sin^3(2\pi-\theta) = -r\sin^3\theta = -y(\theta) \end{cases}$$

よって、$0 \leqq \theta \leqq \pi$ と $\pi \leqq \theta \leqq 2\pi$ のグラフは

x軸に関して対称。

さらに、

$$\begin{cases} x(\pi-\theta) = r\cos^3(\pi-\theta) = -r\cos^3\theta = -x(\theta) \\ y(\pi-\theta) = r\sin^3(\pi-\theta) = r\sin^3\theta = y(\theta) \end{cases}$$

よって、$0 \leqq \theta \leqq \frac{\pi}{2}$ と $\frac{\pi}{2} \leqq \theta \leqq \pi$ のグラフは

y軸に関して対称。

$\begin{cases} x = r\cos^3\theta \\ y = r\sin^3\theta \end{cases}$ $(0 \leqq \theta \leqq \frac{\pi}{2})$ について。$(r>0)$

$$\frac{dx}{d\theta} = -3r\cos^2\theta\sin\theta < 0 \quad \left(0<\theta<\frac{\pi}{2}\right)$$

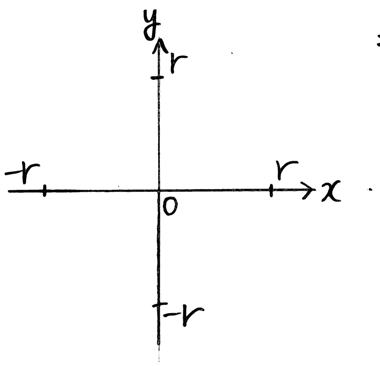
$$\frac{dy}{d\theta} = 3r\sin^2\theta\cos\theta > 0 \quad \left(0<\theta<\frac{\pi}{2}\right)$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{d\theta}}{\frac{dx}{d\theta}} = \frac{3r\sin^2\theta\cos\theta}{-3r\cos^2\theta\sin\theta} = -\tan\theta$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{d}{dx}(-\tan\theta)$$

$$= \frac{d}{d\theta}(-\tan\theta) \times \frac{d\theta}{dx} = \left(-\frac{1}{\cos^2\theta}\right) \times \frac{1}{-3r\cos^2\theta\sin\theta}$$

$$= \frac{1}{3r\cos^4\theta\sin\theta} > 0 \quad (\text{下に凸})$$



4. 最大最小

グラフを利用

例) 次の関数の最大値・最小値と、それらを与えるxの値を求めよ。

(1) $f(x) = x + 2\sin x \quad (0 \leqq x \leqq \pi)$

(2) $f(x) = x + \sqrt{1-x^2}$

(3) $f(x) = x + \frac{32}{x^2} \quad (x > 0)$

- 「増減」「極値」
- 「定義域」「極限」
- (「凹凸」「漸近線」)

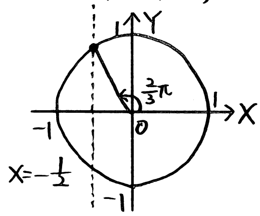
解)

(1) $f(x) = x + 2\sin x \quad (0 \leqq x \leqq \pi)$

$f'(x) = 1 + 2\cos x$

$f'(x) = 0$ のとき、$\cos x = -\frac{1}{2}$ により、$x = \frac{2}{3}\pi$

x	0	$\cdots$	$\frac{2}{3}\pi$	$\cdots$	π
$f'(x)$			0		
$f(x)$	0				π



最大値 $(x=\quad)$
最小値 $(x=\quad)$ //

(2) $f(x) = x + \sqrt{1-x^2}$

$1-x^2 \geqq 0$ より、$(x+1)(x-1) \leqq 0 \iff -1 \leqq x \leqq 1$

この範囲で考える。

$f(x) = x + (1-x^2)^{\frac{1}{2}}$ について。

$$f'(x) = 1 + \frac{1}{2}(1-x^2)^{-\frac{1}{2}} \times (-2x)$$

$$= 1 - \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$= \frac{\sqrt{1-x^2} - x}{\sqrt{1-x^2}} \quad (-1 < x < 1)$$

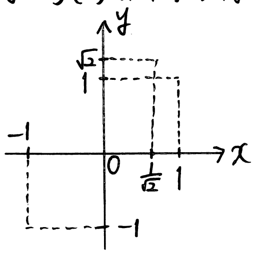
$f'(x) = 0$ のとき、$\sqrt{1-x^2} = x$

$\therefore 1-x^2 = x^2$ かつ $x \geqq 0$ 　よって、$x = \frac{1}{\sqrt{2}}$

x	-1	$\cdots$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\cdots$	1
$f'(x)$			0		
$f(x)$	-1		$\sqrt{2}$		1

最大値 $(x=\quad)$
最小値 $(x=\quad)$ //

$y = f(x)$ のグラフは



(3) $f(x) = x + \frac{32}{x^2} \quad (x>0)$

$f(x) = x + 32x^{-2}$ について、

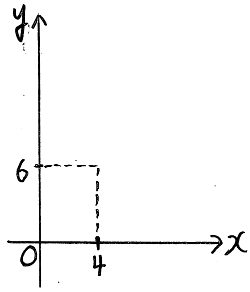
$$
\begin{aligned}
f'(x) &= 1 - 64x^{-3} \\
&= 1 - \frac{64}{x^3} \\
&= \frac{x^3 - 4^3}{x^3} \\
&= \frac{(x-4)(x^2+4x+4^2)}{x^3}
\end{aligned}
$$

$A^3 - B^3 = (A-B)(A^2+AB+B^2)$

$f'(x) = 0$ のとき、$x = 4$

x	0	$\cdots$	4	$\cdots$
$f'(x)$			0	
$f(x)$			6	

$\begin{cases} \text{最大値} \\ \text{最小値} \end{cases}$ $(x= \quad)$ //



$\lim_{x \to +0} \left(x + \frac{32}{x^2}\right) = +\infty$

$\lim_{x \to +\infty} \left(x + \frac{32}{x^2}\right) = +\infty$

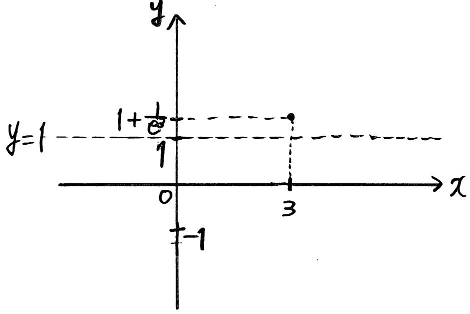
5、方程式・不等式への応用
(1) 方程式への応用

例 aを実数の定数とするとき、
$$(a-1)e^x-x+2=0$$
の実数解の個数を求めよ。

解)
$$(a-1)e^x-x+2=0$$
$$\Leftrightarrow ae^x-e^x-x+2=0$$
$$\Leftrightarrow ae^x=e^x+x-2$$
$$\Leftrightarrow a=\frac{e^x+x-2}{e^x}$$
$$\Leftrightarrow \frac{x-2}{e^x}+1=a \cdots ①$$

$f(x)=\frac{x-2}{e^x}+1$ とおくと、

①は $y=f(x)$ と $y=a$ を代入したもの。
つまり、これらの異なる共有点の個数が
与えられた方程式の実数解の個数である。



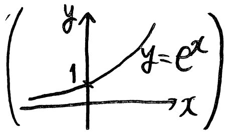
$f(x)=\frac{x-2}{e^x}+1$ について。

定 O.K.（xはすべての実数）

$$f'(x)=\frac{1\times e^x-(x-2)\times e^x}{(e^x)^2}$$
$$=\frac{3-x}{e^x}$$

$f'(x)=0$ となるのは、$x=3$ のとき。

x	$\cdots$	3	$\cdots$
$f'(x)$		0	
$f(x)$			



$$\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{x-2}{e^x}+1\right)=$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x-2}{e^x}+1\right)=$$

グラフより、
求める実数解の個数は

5、方程式&不等式への応用
(2) 不等式への応用

例 次の不等式が成り立つことを示せ。
(1) $x \geqq -1$ のとき $1+\frac{1}{2}x \geqq \sqrt{1+x}$
(2) $x>0$ のとき $\sin x > x-\frac{1}{6}x^3$

証明

(「増減」「極値」「定義域」「極限」(「凹凸」「漸近線」))

(1) $x \geqq -1$ のとき、$1+\frac{1}{2}x \geqq \sqrt{1+x}$ を示す。
$f(x) = 1+\frac{1}{2}x-\sqrt{1+x}$ とおく。($x \geqq -1$)

$y=f(x)$ のグラフを考える。

$$f'(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2\sqrt{1+x}}$$
$$= \frac{\sqrt{1+x}-1}{2\sqrt{1+x}} \quad (x>-1)$$

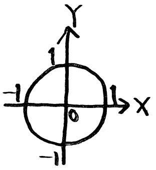
$f'(x)=0$ となるのは、$\sqrt{1+x}=1$ ∴ $x=0$ のとき。

x	-1	$\cdots$	0	$\cdots$
$f'(x)$			0	
$f(x)$	$\frac{1}{2}$		0	

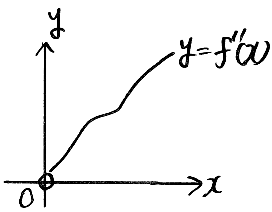
よって、$f(x) \geqq f(0) = 0$

したがって、$1+\frac{1}{2}x \geqq \sqrt{1+x}$ ($x \geqq -1$) ■

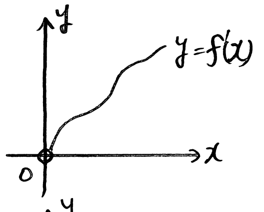
(2) $x>0$ のとき、$\sin x > x-\frac{1}{6}x^3$ を示す。
$f(x) = \sin x - x + \frac{1}{6}x^3$ とおく。($x>0$)



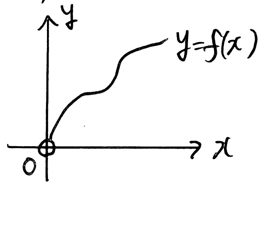
$$f'(x) = \cos x - 1 + \frac{1}{2}x^2$$
$$f''(x) = -\sin x + x$$
$$f'''(x) = 1-\cos x \geqq 0$$



よって、$x>0$ において、$f''(x)$ は単調増加。
かつ $f''(0)=0$ ($\lim_{x \to +0} f''(x) = 0$)
より、$f''(x)>0$ ($x>0$)



よって、$x>0$ において、$f'(x)$ は単調増加。
かつ $f'(0)=0$ ($\lim_{x \to +0} f'(x) = 0$)
より、$f'(x)>0$ ($x>0$)



よって、$x>0$ において、$f(x)$ は単調増加。
かつ $f(0)=0$ ($\lim_{x \to +0} f(x) = 0$)
より、$f(x)>0$ ($x>0$)

したがって、$x>0$ において、$\sin x > x-\frac{1}{6}x^3$ ■

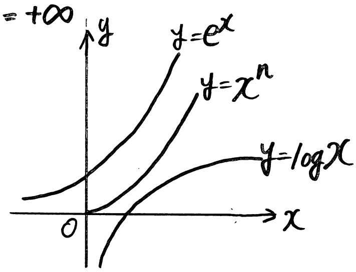
5、方程式＆不等式への応用

(2) 不等式への応用

$x \to \infty$ のとき、

$\log x \ll x^n \ll e^x$

例
$$\begin{cases} \lim_{x\to\infty} \dfrac{\log x}{x^3} = 0 \\ \lim_{x\to\infty} \dfrac{e^x}{x^{10}} = +\infty \end{cases}$$



(1) $\lim_{x\to\infty} \dfrac{\log x}{x^n} = 0$ を示す。

まず、$x>0$ において、$\sqrt{x} > \log x$ を示す。
$f(x) = \sqrt{x} - \log x$ とおくと 定 O.K.

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{x}$$
$$= \frac{\sqrt{x}-2}{2x}$$

$f'(x)=0$ のとき $x=4$

x	0	…	4	…
$f'(x)$			0	
$f(x)$				

したがって、$f(x) \geqq f(4)$
$= \sqrt{4} - \log 4$
$= 2 - \log 2^2$
$= 2(\log e - \log 2)$
$= 2\log\frac{e}{2} > 2\log 1 = 0$

よって、$x>0$ において、$f(x)>0$

これにより、$x>0$ において
$\sqrt{x} > \log x$ ■

$x>1$ においても、
$(0<)\log x < \sqrt{x}$

よって、$0 < \dfrac{\log x}{x} < \dfrac{\sqrt{x}}{x}$

ここで、$\lim_{x\to\infty} \dfrac{\sqrt{x}}{x} = \lim_{x\to\infty} \dfrac{1}{\sqrt{x}} = 0$

はさみうちの原理より
$\lim_{x\to\infty} \dfrac{\log x}{x} = 0$ …①

さらに、$x>1$ では $x<x^n$

$\therefore\ 0 < \dfrac{1}{x^n} < \dfrac{1}{x}$

$\Leftrightarrow\ 0 < \dfrac{\log x}{x^n} < \dfrac{\log x}{x}$

①から、はさみうちの原理によって
$\lim_{x\to\infty} \dfrac{\log x}{x^n} = 0$ ■

(ii) $\lim_{x\to\infty}\frac{x^n}{e^x}=0$ を示す。

$x>0$ のとき、$e^x>1+x+\frac{x^2}{2}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}$ を示す。

$f_n(x)=e^x-1-x-\frac{x^2}{2}-\cdots-\frac{x^n}{n!}-\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}$ とおく。

$f_n(x)>0$ となることを、数学的帰納法を用いて示す。

(ア) $n=1$ のとき

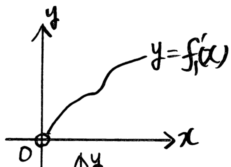
$f_1(x)=e^x-1-x-\frac{x^2}{2}$ について、

$f_1'(x)=e^x-1-x$

$f_1''(x)=e^x-1>0$

よって、$x>0$において $f_1'(x)$ は単調増加。

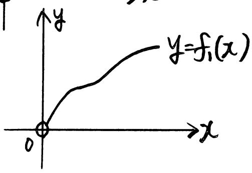
かつ $f_1'(0)=0$ より、$f_1'(x)>0$



よって、$x>0$ において、$f_1(x)$ は単調増加。

かつ $f_1(0)=0$ より、$f_1(x)>0$

したがって、$n=1$ のとき、$f_n(x)>0$ は成立。



(イ) $n=k\ (\geqq 1)$ のとき、

$f_k(x)=e^x-1-x-\frac{x^2}{2}-\cdots-\frac{x^k}{k!}-\frac{x^{k+1}}{(k+1)!}>0$ …② が成立すると仮定。

(目標：$f_{k+1}(x)=e^x-1-x-\frac{x^2}{2}-\cdots-\frac{x^k}{k!}-\frac{x^{k+1}}{(k+1)!}-\frac{x^{k+2}}{(k+2)!}$ を示す。)

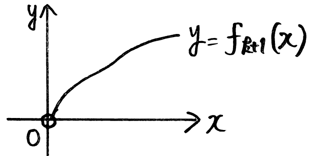
$f_{k+1}(x)=e^x-1-x-\frac{x^2}{2}-\cdots-\frac{x^k}{k!}-\frac{x^{k+1}}{(k+1)!}-\frac{x^{k+2}}{(k+2)!}$ について、

$f_{k+1}'(x)=e^x-1-x-\cdots-\frac{x^{k-1}}{(k-1)!}-\frac{x^k}{k!}-\frac{x^{k+1}}{(k+1)!}=f_k(x)>0$ (②より)

よって、$f_{k+1}(x)$ は単調増加 かつ $f_{k+1}(0)=0$

したがって、$f_{k+1}(x)>0$

$n=k+1$ のときも成立。



(ア)(イ)により、すべての自然数nに対し、$f_n(x)>0$ ■

いま、$x>0$ において、

$e^x>1+x+\frac{x^2}{2}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}$

が示せた。

$x>0$ なので、$e^x>\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}$

$\therefore\ 0<\frac{1}{e^x}<\frac{(n+1)!}{x^{n+1}}$

$\Leftrightarrow\ 0<\frac{x^n}{e^x}<\frac{(n+1)!}{x}$

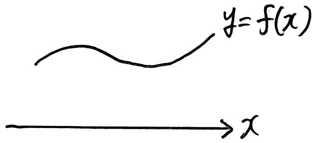
ここで、$\lim_{x\to\infty}\frac{(n+1)!}{x}=0$

はさみうちの原理より、$\lim_{x\to\infty}\frac{x^n}{e^x}=0$ ■

6、その他

(1) 微分可能と連続

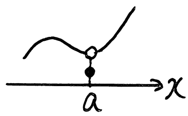
(i) 連続



定義 関数 $f(x)$ が $x=a$ で連続であるとは、

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$$

が成立することである。



例1

関数 $f(x) = \begin{cases} 1 & (x=0) \\ \dfrac{e^{\frac{1}{x}}-1}{e^{\frac{1}{x}}+1} & (x \neq 0) \end{cases}$

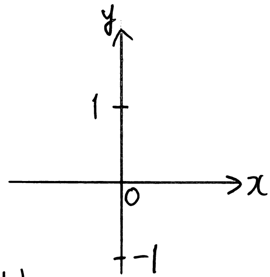
について、$x=0$ で連続かどうか調べよ。

解）

$$\lim_{x \to +0} \frac{e^{\frac{1}{x}}-1}{e^{\frac{1}{x}}+1} = \lim_{x \to +0} \frac{1-\frac{1}{e^{\frac{1}{x}}}}{1+\frac{1}{e^{\frac{1}{x}}}}$$

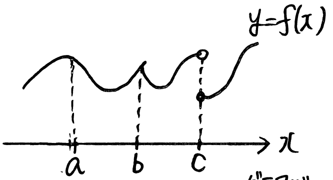
$$= 1$$

$$\lim_{x \to -0} \frac{e^{\frac{1}{x}}-1}{e^{\frac{1}{x}}+1} = -1$$



$x=0$ で連続でない //

(ii) 微分可能



連続 グラフがつながっている

微分可能 グラフがなめらかにつながっている

定義 関数 $f(x)$ が $x=a$ で微分可能であるとは、

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

が存在することになる。

「連続」⇒「微分可能」

「微分可能」⇒「連続」

「　　　　ならば　　　　である」

「連続である」ことは、「微分可能である」ための、「　　　　」である。

証明

$f(x)$ が $x=a$ で微分可能ならば、

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} \quad \cdots ①$$

が存在する。このとき、

$$\lim_{x \to a} \{f(x)-f(a)\} = \lim_{x \to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} \times (x-a)$$

$$= f'(a) \times 0$$

$$= 0$$

$\therefore \lim_{x \to a} f(x) = f(a)$

よって、$f(x)$ は $x=a$ で連続である ■

例2 関数 $f(x) = \begin{cases} x^3 + ax & (x \geqq 2) \\ bx^2 - ax & (x < 2) \end{cases}$

が、$x=2$ で微分可能となるような a, b の値を求めよ。

解）$x=2$ で連続であることが必要なので、

$\lim_{x \to 2-0} f(x) = \lim_{x \to 2+0} f(x) = f(2)$

$\therefore\ b \times 2^2 - a \times 2 = 8 + 2a$

$\Leftrightarrow\ 4b = 4a + 8$

$\Leftrightarrow\ b = a + 2 \cdots ①$

$f'(a) = \begin{cases} \lim_{x \to a} \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a} \\ \lim_{h \to 0} \dfrac{f(a+h) - f(a)}{h} \end{cases}$

また、$\lim_{h \to +0} \dfrac{(2+h)^3 + a(2+h) - (8+2a)}{h}$

$= \lim_{h \to +0} \dfrac{12h + 6h^2 + h^3 + ah}{h}$

$= 12 + a$

と、$\lim_{h \to -0} \dfrac{b(2+h)^2 - a(2+h) - (4b - 2a)}{h}$

$= \lim_{h \to -0} \dfrac{4bh + bh^2 - ah}{h}$

$= 4b - a$

を比較して、$12 + a = 4b - a$

$\Leftrightarrow a - 2b = -6 \cdots ②$

①を②に代入

$a - 2(a+2) = -6$

$\Leftrightarrow -a - 4 = -6$

$\Leftrightarrow a = 2$ //

①から、$b = 4$ //

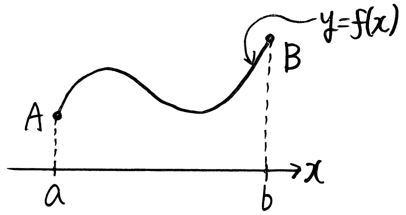
6、その他

(2) 平均値の定理

関数$f(x)$が閉区間$[a, b]$で連続、開区間(a, b)で微分可能ならば、

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c) \qquad (a<c<b)$$

を満たすcが存在する。



例 $0<a<b$のとき、

$$\frac{1}{b} < \frac{\log b - \log a}{b-a} < \frac{1}{a}$$

を示せ。

証明

$f(x) = \log x$とすると $(x>0)$

$x>0$で$f(x)$は微分可能。$f'(x) = \frac{1}{x}$

平均値の定理より、$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c)$ $(a<c<b)$ …①

をみたすcが存在する。

①は、$\frac{\log b - \log a}{b-a} = \frac{1}{c}$ …①'

ここで、$a<c<b$より、$\frac{1}{b} < \frac{1}{c} < \frac{1}{a}$

①'から、$\frac{1}{b} < \frac{\log b - \log a}{b-a} < \frac{1}{a}$ (証明終)