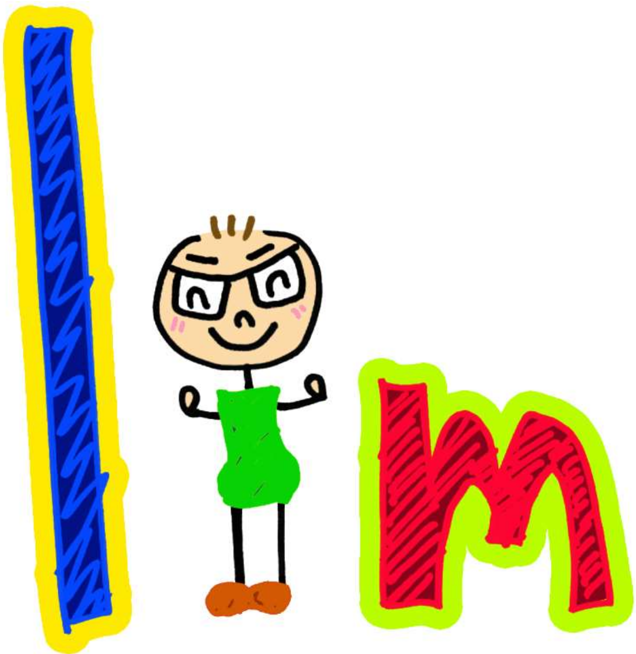
数学Ⅲ

１８　　極限



＜講義ノート＞

極限（数学Ⅲ）

１．数列の極限

（１）　一般項の極限
⑴　基本（５つ）
⑵　はさみうちの原理

（２）　和の極限
⑴　部分和→ lim
（無限等比級数含む）
⑵　区分求積法
⑶　はさみうちの原理

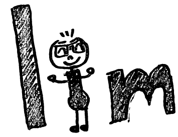
２．関数の極限

（０）準備
⑴分数関数
⑵無理関数
⑶逆関数
⑷合成関数

（１）分数＆無理関数の極限
⑴分数関数の極限
⑵無理関数の極限

（２）三角＆指数・対数関数の極限
⑴三角関数の極限
⑵指数対数関数の極限

1、数列の極限



(1) 一般項の極限

〈導入編〉

「無限数列」(項がどこまでも限りなく続く)

例

(1) $1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ \frac{1}{4},\ \frac{1}{5},\ \cdots,\ \frac{1}{n},\ \cdots$

(2) $2,\ 4,\ 8,\ 16,\ 32,\ \cdots,\ 2^n,\ \cdots$

(3) $-1,\ -3,\ -5,\ -7,\ -9,\ \cdots,\ -(2n-1),\ \cdots$

(4) $-1,\ 1,\ -1,\ 1,\ -1,\ 1,\ \cdots,\ (-1)^n,\ \cdots$

(5) $-2,\ 4,\ -8,\ 16,\ -32,\ \cdots,\ (-2)^n,\ \cdots$

nを限りなく大きくするとき、a_nが一定の値αに近づくならば、数列$\{a_n\}$は「収束する」

また、$\{a_n\}$の「極限はα」といい、

$\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$ ($n\to\infty$ のとき $a_n\to\alpha$)

と表す。

(1)は、$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$

数列$\{a_n\}$が収束しないとき、$\{a_n\}$は「発散する」という。

(2)は $\lim_{n\to\infty} 2^n = +\infty$ ←「正の無限大に発散する」

($n\to\infty$ のとき $2^n\to+\infty$)　(極限は正の無限大)

(3)は $\lim_{n\to\infty}\{-(2n-1)\} = -\infty$ ←「負の無限大に発散する」

($n\to\infty$ のとき $-(2n-1)\to-\infty$)　(極限は負の無限大)

(4)は『$\lim_{n\to\infty}(-1)^n$は「振動する」』←「振動する」(極限はない)

(5)は『$\lim_{n\to\infty}(-2)^n$は「振動する」』

収束		$\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$	極限値がある
発散		$\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$	正の無限大に発散
		$\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty$	負の無限大に発散
		振動	極限がない

1、極限

(1) 一般項の極限 「基本5つ」と「はさみうち」

「まず入れてみる」

(i) 基本5つ

[基本その1] $\frac{\infty}{\infty}$ の極限 → 不定形 ($\frac{0}{0}$, $\infty\times 0$, $\infty-\infty$ も)

例 次の極限を求めよ。

(1) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{2n-1}{n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{2-\frac{1}{n}}{1+\frac{1}{n}}$

$=2$ 〃

(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{2n^2+n-7}{3n^2-4n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{2+\frac{1}{n}-\frac{7}{n^2}}{3-\frac{4}{n}+\frac{1}{n^2}}$

$=\frac{2}{3}$ 〃

(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{n(1+2+3+\cdots+n)}{1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{n\times\sum_{k=1}^{n}k}{\sum_{k=1}^{n}k^2}$

$\displaystyle=\lim_{n\to\infty}\frac{n\times\frac{1}{2}n(n+1)}{\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)}$ ← 3次 ← 3次

$\displaystyle=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{6}\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(2+\frac{1}{n}\right)}$

$=\dfrac{\frac{1}{2}}{\frac{2}{6}}=\frac{3}{2}$ 〃

(4) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{4n}{2n^3-3}=\lim_{n\to\infty}\frac{4}{2n-\frac{3}{n}}=0$ 〃

$\displaystyle=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{4}{n}}{2-\frac{3}{n^2}}=0$ 〃

(5) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{-n^2+n}{3n+2}=\lim_{n\to\infty}\frac{-n+1}{3+\frac{2}{n}}=-\infty$ (発散) 〃

$\displaystyle=\lim_{n\to\infty}\frac{-1+\frac{1}{n}}{\frac{3}{n}+\frac{2}{n^2}}=-\infty$ 〃

1、極限

(1) 一般項の極限 ＜「基本5つ」と「はさみうち」

(i) 基本(5つ)

[基本 その2] $\infty - \infty$ の極限（不定形）　$\dfrac{\infty}{\infty}$ に直す!!

例 次の極限を求めよ。

(1) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1}) = \lim_{n\to\infty}\frac{(\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1})(\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1})}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1}}$

逆有理化　有理化

$\displaystyle = \lim_{n\to\infty}\frac{2}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1}} = 0$ //

(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n^2+4n}-n) = \lim_{n\to\infty}\frac{(\sqrt{n^2+4n}-n)(\sqrt{n^2+4n}+n)}{\sqrt{n^2+4n}+n}$

$\displaystyle = \lim_{n\to\infty}\frac{4n}{\sqrt{n^2+4n}+n}$　← 1次 ← 1次扱い

$\displaystyle = \lim_{n\to\infty}\frac{4}{\sqrt{1+\frac{4}{n}}+1} = \frac{4}{2} = 2$ //

(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{2}{n(\sqrt{n^2+1}-n)} = \lim_{n\to\infty}\frac{2(\sqrt{n^2+1}+1)}{n(\sqrt{n^2+1}-n)(\sqrt{n^2+1}+1)}$

$\displaystyle = \lim_{n\to\infty}\frac{2(\sqrt{n^2+1}+1)}{n}$　← 1次扱い ← 1次

$\displaystyle = \lim_{n\to\infty}2\left(\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}+1\right) = 4$ //

(4) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n+2}-\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}} = \lim_{n\to\infty}\frac{(\sqrt{n+2}-\sqrt{n})(\sqrt{n+2}+\sqrt{n})(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})}{(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})(\sqrt{n+2}+\sqrt{n})}$

$\displaystyle = \lim_{n\to\infty}\frac{2\times(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})}{1\times(\sqrt{n+2}+\sqrt{n})}$　← $\frac{1}{2}$次 ← $\frac{1}{2}$次

$\displaystyle = \lim_{n\to\infty}\frac{2\times\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1\right)}{1\times\left(\sqrt{1+\frac{2}{n}}+1\right)}$

$\displaystyle = \frac{2(1+1)}{1+1} = 2$ //

1、極限

(1) 一般項の極限 ＜「基本5つ」と「はさみうち」

(i) 基本(5つ)

[基本 その3] r^n の極限

例

(1) $\lim_{n\to\infty} 3^n$ は 正の無限大に発散する。

(2) $\lim_{n\to\infty} 1^n = 1$

(3) $\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$

(4) $\lim_{n\to\infty} \left(-\frac{1}{3}\right)^n = 0$

(5) $\lim_{n\to\infty} (-1)^n$ ⎫
(6) $\lim_{n\to\infty} (-2)^n$ ⎭ 振動する。

まとめ

$$\lim_{n\to\infty} r^n = \begin{cases} \infty & (r>1) \\ 1 & (r=1) \\ 0 & (-1<r<1) \\ \text{振動} & (r \leqq -1) \end{cases}$$

$1 \ (r=1)$ と $0 \ (-1<r<1)$ → $-1<r\leqq 1$ のとき 収束する

問 次の極限を求めよ。

(1) $\lim_{n\to\infty} \dfrac{2^n-1}{3^n+2^n} = \lim_{n\to\infty} \dfrac{\left(\frac{2}{3}\right)^n-\left(\frac{1}{3}\right)^n}{1+\left(\frac{2}{3}\right)^n} = 0$ //

(2) $\lim_{n\to\infty} \dfrac{2^n-4^n}{4^n+3^n} = \lim_{n\to\infty} \dfrac{\left(\frac{2}{4}\right)^n-1}{1-\left(\frac{3}{4}\right)^n} = -1$ //

(3) $\lim_{n\to\infty} \dfrac{3\left(\frac{1}{2}\right)^n-\left(\frac{1}{3}\right)^n}{\left(\frac{1}{4}\right)^n+\left(\frac{1}{2}\right)^n} = \lim_{n\to\infty} \dfrac{3-\left(\frac{2}{3}\right)^n}{\left(\frac{2}{4}\right)^n+1} = 3$ //

分母、分子に 2^n をかける。

$$\lim_{n\to\infty} (\underset{\downarrow \infty}{3^n}-\underset{\downarrow \infty}{2^n}) = \lim_{n\to\infty} \underset{\downarrow \infty}{3^n}\left\{1-\underset{\downarrow 0}{\left(\frac{2}{3}\right)^n}\right\}$$
$$= \infty$$

$\boxed{1<a<b \text{ のとき } a^n \ll b^n}$

(4) $\lim_{n\to\infty} (2^n-5^n) = \lim_{n\to\infty} 5^n\left\{\left(\frac{2}{5}\right)^n-1\right\}$
$= -\infty$ //

(5) $\lim_{n\to\infty} \dfrac{4-(-3)^n}{2^n-1} = \lim_{n\to\infty} \dfrac{\frac{4}{2^n}-\left(-\frac{3}{2}\right)^n}{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}$ は振動する。//

(6) $\lim_{n\to\infty} \dfrac{2^n-(-4)^n}{(-4)^n+3^n} = \lim_{n\to\infty} \dfrac{\left(-\frac{2}{4}\right)^n-1}{1+\left(-\frac{3}{4}\right)^n} = -1$ //

1、数列の極限

(1) 一般項の極限 〈「基本5つ」と「はさみうち」〉

(i) 基本(5つ)

[基本その3] r^n の極限 $\boxed{\text{分数形の場合分け}}$

例 次の極限を求めよ。

(1) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1+r^{n+1}-r^{n+2}}{1-r+r^{n+1}}$

(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{r^{2n+1}+1}{r^{2n}+1}$

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} r^n = \begin{cases} \infty & (r>1) \\ 1 & (r=1) \\ 0 & (-1<r<1) \\ \text{振動} & (r\leqq -1) \end{cases}}$$

このような分数の場合分けは、

「　　　　」、「　　　　」、「　　　　」、「　　　　」

で!!

解) (1) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1+r^{n+1}-r^{n+2}}{1-r+r^{n+1}}$

(i) $|r|>1$ のとき

$$(与式) = \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{r^{n+1}}+1-r}{\frac{1-r}{r^{n+1}}+1} = 1-r$$

(ii) $|r|<1$ のとき

$$(与式) = \lim_{n\to\infty}\frac{1+r^{n+1}-r^{n+2}}{1-r+r^{n+1}} = \frac{1}{1-r}$$

(iii) $r=1$ のとき

$$(与式) = \lim_{n\to\infty}\frac{1+1^{n+1}-1^{n+2}}{1-1+1^{n+1}} = 1$$

(iv) $r=-1$ のとき

$$(与式) = \lim_{n\to\infty}\frac{1+(-1)^{n+1}-(-1)^{n+2}}{1-(-1)+(-1)^{n+1}}$$

$$= \begin{cases} \dfrac{1-1-1}{1+1-1} = -1 & (n:\text{偶数}) \\ \dfrac{1+1-(-1)}{1+1+1} = 1 & (n:\text{奇数}) \end{cases}$$

極限なし。

(i)〜(iv)により、

$$(与式) = \begin{cases} 1-r & (|r|>1) \\ \dfrac{1}{1-r} & (|r|<1) \\ 1 & (r=1) \\ \text{振動} & (r=-1) \end{cases}$$
(極限なし) //

(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{r^{2n+1}+1}{r^{2n}+1}$

(i) $|r|>1$ のとき

$$(与式) = \lim_{n\to\infty}\frac{r+\frac{1}{r^{2n}}}{1+\frac{1}{r^{2n}}} = r$$

(ii) $|r|<1$ のとき

$$(与式) = \lim_{n\to\infty}\frac{r^{2n+1}+1}{r^{2n}+1} = 1$$

(iii) $r=1$ のとき

$$(与式) = \lim_{n\to\infty}\frac{1^{2n+1}+1}{1^{2n}+1} = 1$$

(iv) $r=-1$ のとき

$$(与式) = \lim_{n\to\infty}\frac{(-1)^{2n+1}+1}{(-1)^{2n}+1} = 0$$

(i)〜(iv)により、

$$(与式) = \begin{cases} r & (r<-1,\ 1<r) \\ 1 & (-1<r\leqq 1) \\ 0 & (r=-1) \end{cases}$$

1. 数列の極限

(1) 一般項の極限

(i) 基本(5つ)

[基本 その4] 等比数列の(一般項の)極限

$a_1, a_2, a_3, a_4, \cdots\cdots, a_n, \cdots\cdots$

$a \xrightarrow{\times r} \xrightarrow{\times r} \xrightarrow{\times r} \cdots \xrightarrow{\times r} ar^{n-1}$

$\lim_{n\to\infty} ar^{n-1}$ の収束条件を考える。

$a=0$ または $-1<r\leqq 1$

まとめ

初項a, 公比rの等比数列 $\{a_n\}$が収束するための条件は「$a=0$ または $-1<r\leqq 1$」

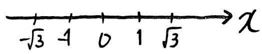
例1) 一般項 $a_n=(x-1)(x^2-2)^{n-1}$ の数列$\{a_n\}$が収束するためのxの値の範囲を求めよ。

解) 数列$\{a_n\}$は初項$x-1$, 公比x^2-2の等比数列なので収束する条件は

$x-1=0$ または $-1<x^2-2\leqq 1$

$1<x^2\leqq 3$

$1<|x|\leqq\sqrt{3}$



$x=1 \cdots ①$ または $-\sqrt{3}\leqq x<-1,\ 1<x\leqq\sqrt{3} \cdots ②$

① または ② から、

$-\sqrt{3}\leqq x<-1,\ 1\leqq x\leqq\sqrt{3}$ //

例2) 数列$\left\{\left(\dfrac{x}{1+x}\right)^n\right\}$が収束するような$x$の値の範囲を求めよ。また、そのときの極限値を求めよ。

解) $\left\{\left(\dfrac{x}{1+x}\right)^n\right\}$の収束条件は

$-1<\dfrac{x}{\boxed{1+x}}\leqq 1$ → $\begin{cases} x>-1 \text{ なら正} \\ x<-1 \text{ なら負} \end{cases}$

(i) $x>-1$ のとき

$-(1+x)<x\leqq 1+x$

から、$x>-\frac{1}{2}$ ($x>-1$をみたす)

(ii) $x<-1$ のとき

$-(1+x)>x\leqq 1+x$

から、不適。

(i)(ii)より、$x>-\frac{1}{2}$ //

そのとき、極限値は0 //

$a_n=r^n=r\times r^{n-1}$

$\boxed{\text{収束条件}}$

$r=0$ または $-1<r\leqq 1$ (吸収)

つまり、$-1<r\leqq 1$

$\{r^n\}$の収束条件は $-1<r\leqq 1$ (のみでよい)

$\begin{cases} r=1 \text{ のとき } r^n=1 \\ -1<r<1 \text{ のとき } r^n\to 1 \end{cases}$

1、数列の極限

(1) 一般項の極限 ←「基本5つ」と「はさみうち」

(I) 基本(5つ)

[基本 その5] 漸化式 解いて lim

例 次の式で定められる数列$\{a_n\}$の一般項を求め、その極限を調べよ。

(1) $a_1=3,\ a_{n+1}=a_n+\left(\frac{1}{2}\right)^n$ $(n=1,2,3,\cdots)$

(2) $a_1=1,\ a_{n+1}=\frac{1}{3}a_n+1$

(3) $a_1=0,\ a_2=1,\ 3a_{n+2}-2a_{n+1}-a_n=0$

(4) $a_1=1,\ a_{n+1}=3\sqrt{a_n}$

(5) $a_1=1,\ a_{n+1}=\dfrac{a_n+2}{2a_n+1}$

---

(1) $a_1=3,\ a_{n+1}=a_n+\underbrace{\left(\frac{1}{2}\right)^n}_{b_n}$ ←(パターン1)

$\{a_n\}$の階差数列の一般項

$n\geqq 2$のとき

$a_n=a_1+\sum_{k=1}^{n-1}b_k$ （$b_n=\left(\frac{1}{2}\right)^n$とおいた）

$=3+\sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{1}{2}\right)^k$

$=3+\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{2}\times\left(\frac{1}{2}\right)^{k-1}$

$=3+\dfrac{\frac{1}{2}\{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\}}{1-\frac{1}{2}}$

$=3+1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

$=4-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

$n=1$を代入 $a_1=4-1=3$ 成立。

等比数列の和の公式を利用

$r\neq 1$のとき、

$\sum_{k=1}^{n}ar^{k-1}=\dfrac{a(1-r^n)}{1-r}$

$\therefore a_n=4-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$ // $(n\geqq 1)$

よって、$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\{4-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\}$

$=4$ //

(2) $a_1=1,\ a_{n+1}=\frac{1}{3}a_n+1$ ←(パターン2)

（$\alpha=\frac{1}{3}\alpha+1$を解いて
$\frac{2}{3}\alpha=1 \rightsquigarrow \alpha=\frac{3}{2}$）

与えられた漸化式は、

$a_{n+1}-\frac{3}{2}=\frac{1}{3}\left(a_n-\frac{3}{2}\right)$ と変形でき、

$a_n-\frac{3}{2}=\left(a_1-\frac{3}{2}\right)\times\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$

$=-\frac{1}{2}\times\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$

$\therefore a_n=\frac{3}{2}-\frac{1}{2}\times\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$ //

よって、

$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\{\frac{3}{2}-\frac{1}{2}\times\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}\}$

$=\frac{3}{2}$ //

(3) $a_1=0,\ a_2=1,\ 3a_{n+2}-2a_{n+1}-a_n=0$ ←(パターン6)

（$3x^2-2x-1=0$を解いて、
$(3x+1)(x-1)=0 \rightsquigarrow x=-\frac{1}{3},1$）

与えられた漸化式は $\begin{cases}a_{n+2}+\frac{1}{3}a_{n+1}=1\cdot\left(a_{n+1}+\frac{1}{3}a_n\right)\cdots①\\ a_{n+2}-a_{n+1}=-\frac{1}{3}\cdot\left(a_{n+1}-a_n\right)\cdots②\end{cases}$ と変形でき、

①から、数列$\{a_{n+1}+\frac{1}{3}a_n\}$は、初項$a_2+\frac{1}{3}a_1=1$, 公比1の等比数列。

$\therefore a_{n+1}+\frac{1}{3}a_n=1\times 1^{n-1}=1\cdots①'$

②から、数列$\{a_{n+1}-a_n\}$は、初項$a_2-a_1=1$, 公比$-\frac{1}{3}$の等比数列。

$\therefore a_{n+1}-a_n=1\times\left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1}=\left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1}\cdots②'$

①'−②' $\frac{4}{3}a_n=1-\left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1}$ $\therefore a_n=\frac{3}{4}\{1-\left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1}\}$ //

よって、$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\frac{3}{4}\{1-\left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1}\}=\frac{3}{4}$ //

(4) $a_1=1,\ a_{n+1}=3\sqrt{a_n}$ ←(パターン7)

明らかに、$\{a_n\}$のすべての項は正なので、両辺3を底とした対数をとって、

$$\log_3 a_{n+1}=\log_3 3\sqrt{a_n}$$
$$=\log_3 3+\log_3 a_n^{\frac{1}{2}}$$
$$=1+\frac{1}{2}\log_3 a_n$$

$\log_3 a_n=b_n$ とおくと、$(b_1=\log_3 a_1=0)$

$$b_{n+1}=\frac{1}{2}b_n+1 \quad \text{←(パターン2)}$$
$$(\alpha=\frac{1}{2}\alpha+1 \Rightarrow \alpha=2)$$
$$\Leftrightarrow b_{n+1}-2=\frac{1}{2}(b_n-2)$$

$$\therefore b_n-2=(b_1-2)\times\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$
$$=-2\times\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

$$b_n=2-2\times\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

よって、

$$\log_3 a_n=2-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-2}$$

$$a_n=3^{2-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-2}} \ /\!/$$

したがって、

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}3^{2-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-2}}$$
$$=9 \ /\!/$$

(5) $a_1=2,\ a_{n+1}=\dfrac{a_n+2}{2a_n+1}$ ←

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{(パターン2)のような特性方程式}\\ \alpha=\dfrac{\alpha+2}{2\alpha+1} \Rightarrow \alpha(2\alpha+1)=\alpha+2\\ \qquad \Leftrightarrow 2\alpha^2=2 \text{ から } \alpha=\pm1\end{array}}$$

$\alpha=1$

$$a_{n+1}-1=\frac{a_n+2}{2a_n+1}-1$$
$$=\frac{a_n+2-(2a_n+1)}{2a_n+1}$$
$$=\frac{-(a_n-1)}{2a_n+1} \cdots ①$$

$\alpha=-1$

$$a_{n+1}-(-1)=\frac{a_n+2}{2a_n+1}-(-1)$$
$$=\frac{a_n+2+2a_n+1}{2a_n+1}$$
$$=\frac{3\{a_n-(-1)\}}{2a_n+1} \cdots ②$$

$$\begin{cases}a_{n+1}-1=\dfrac{-(a_n-1)}{2a_n+1} \cdots ①\\ a_{n+1}+1=\dfrac{3(a_n+1)}{2a_n+1} \cdots ②\end{cases}$$

ここで、$a_n=1$とすると、①より $a_{n+1}=1$となり、$a_1=2$に矛盾。$\therefore a_n\neq1$.

$$②\div① \quad \frac{a_{n+1}+1}{a_{n+1}-1}=\frac{\frac{3(a_n+1)}{2a_n+1}}{\frac{-(a_n-1)}{2a_n+1}}=-3\times\frac{a_n+1}{a_n-1}$$

$\dfrac{a_n+1}{a_n-1}=b_n$ とおくと $\left(b_1=\dfrac{a_1+1}{a_1-1}=\dfrac{2+1}{2-1}=3\right)$

$$b_{n+1}=-3b_n$$
$$\therefore b_n=3\times(-3)^{n-1}$$
$$=-(-3)\times(-3)^{n-1}$$
$$=-(-3)^n$$

$$a_n+1=(a_n-1)b_n$$
$$=a_nb_n-b_n$$

$(b_n-1)a_n=b_n+1$ より

$$a_n=\frac{b_n+1}{b_n-1}$$

よって、

$$a_n=\frac{b_n+1}{b_n-1}$$
$$=\frac{-(-3)^n+1}{-(-3)^n-1}$$
$$=\frac{(-3)^n+1}{(-3)^n-1} \ /\!/$$

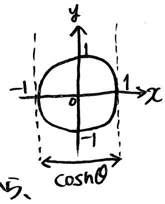
$$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\frac{(-3)^n-1}{(-3)^n+1}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1-\left(-\frac{1}{3}\right)^n}{1+\left(-\frac{1}{3}\right)^n}$$
$$=1 \ /\!/$$

1、数列の極限

(1) 一般項の極限 〈「基本5つ」と「はさみうち」

(ii) はさみうちの原理

例 $\lim_{n\to\infty}\frac{\cos n\theta}{n}$ について。



$-1 \leqq \cos n\theta \leqq 1$ より、

$-\frac{1}{n} \leqq \frac{\cos n\theta}{n} \leqq \frac{1}{n}$

$\lim_{n\to\infty}\left(-\frac{1}{n}\right) = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n} = 0$ から、

はさみうちの原理によって

$\lim_{n\to\infty}\frac{\cos n\theta}{n} = 0$ //

はさみうちの原理

$\lim_{n\to\infty} a_n = A$, $\lim_{n\to\infty} b_n = B$ とする。

すべての自然数 n について、

$a_n \leqq c_n \leqq b_n$ かつ $A = B$

ならば

数列 $\{c_n\}$ も収束して、$\lim_{n\to\infty} c_n = A(=B)$

元 すべての自然数 n について、

$a_n \leqq b_n$ ならば $A \leqq B$

注 $a_n < b_n$ であっても $A < B$ とは限らない。

例えば、$a_n = 2 + \frac{1}{n^2}$, $b_n = 2 + \frac{1}{n}$ について、

$a_n < b_n$ であるが、$A = B$ である。

$1 - \frac{1}{n} < a_n < 1 + \frac{1}{n}$ より。 ← $\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right) = 1$, $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right) = 1$

~~$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right) < \lim_{n\to\infty} a_n < \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)$~~

はさみうちの原理から、

$\lim_{n\to\infty} a_n = 1$

例1 次の極限を求めよ。

$\lim_{n\to\infty}\frac{6}{n}\left[\frac{n}{2}\right]$ （$[x]$ は x を越えない最大の整数）

準備（ガウス記号に慣れる）

例 $[3.2] = 3$

$[0.4] = 0$ 　　$[x] \leqq x < [x] + 1$

$[4] = 4$

$[-2.7] = -3$ 　　$x - 1 < [x] \leqq x$

解 $\lim_{n\to\infty}\frac{6}{n}\left[\frac{n}{2}\right]$ について。

$\frac{n}{2} - 1 < \left[\frac{n}{2}\right] \leqq \frac{n}{2}$

$\therefore \frac{6}{n}\left(\frac{n}{2} - 1\right) < \frac{6}{n}\left[\frac{n}{2}\right] \leqq \frac{6}{n} \times \frac{n}{2}$

$\Leftrightarrow 3 - \frac{6}{n} < \frac{6}{n}\left[\frac{n}{2}\right] \leqq 3$

ここで、$\lim_{n\to\infty}\left(3 - \frac{6}{n}\right) = 3$

はさみうちの原理により、

$\lim_{n\to\infty}\frac{6}{n}\left[\frac{n}{2}\right] = 3$ //

例2 $h > 0$ のとき、

$(1+h)^n \geqq 1 + nh + \frac{n(n-1)}{2}h^2$ （n は2以上の自然数）

であることを利用して、$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{3^n}$ を求めよ。

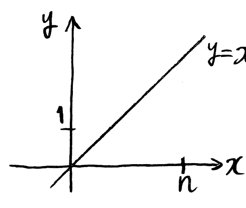
準備 $(1+h)^n \geqq 1 + nh + \frac{n(n-1)}{2}h^2$ を示す。

$(1+h)^n = 1^n + {}_nC_1 \times 1^{n-1}h^1 + {}_nC_2 \times 1^{n-2}h^2 + \cdots + {}_nC_{n-2} \times 1^2 h^{n-2} + {}_nC_{n-1} \times 1 \times h^{n-1} + h^n$

$\geqq 1^n + {}_nC_1 \times 1^{n-1}h^1 + {}_nC_2 \times 1^{n-2}h^2$ （等号は $n=2$ のとき）

$= 1 + nh + \frac{n(n-1)}{2}h^2$

解 $\lim_{n\to\infty}\frac{n}{3^n}$ を求める。



$(1+h)^n \geqq 1 + nh + \frac{n(n-1)}{2}h^2$ で、$h = 2$ として

$3^n \geqq 1 + 2n + 2n(n-1)$

$\Leftrightarrow 3^n \geqq 2n^2 + 1$ (>0)

$\therefore (0<)\ \frac{1}{3^n} \leqq \frac{1}{2n^2+1}$

よって、$0 < \frac{n}{3^n} \leqq \frac{n}{2n^2+1}$

→ $\lim_{n\to\infty}\frac{n}{2n^2+1} = 0$

はさみうちの原理より、$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{3^n} = 0$ //

1、数列の極限

(2) 和の極限

- 部分和 → lim（無限等比級数含む）
- 区分求積法
- はさみうちの原理

無限数列 $a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n, \cdots$

において、各項を前から順に＋の記号で得られる式

$$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n + \cdots \qquad \cdots ①$$

を、「無限級数」という。

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \underbrace{\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} a_k}_{\text{部分和} \to \lim} = \underbrace{S}_{\text{極限値}}$$

このとき、無限級数①は、極限値 S に「収束する」という。

（無限数列 $\{S_n\}$ が発散するとき、無限級数①は、「発散する」という。）

(1) 部分和 → lim

例）次の無限級数の収束・発散について調べ、収束すればその和を求めよ。

(1) $\displaystyle \sum_{n=1}^{\infty} 4\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} 4\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{k-1}$

$\displaystyle = \lim_{n\to\infty} \frac{4\left\{1-\left(\frac{1}{3}\right)^n\right\}}{1-\frac{1}{3}}$

$\displaystyle = \lim_{n\to\infty} \frac{3}{2}\times 4\times\left\{1-\left(\frac{1}{3}\right)^n\right\} = 6$ //

$$\boxed{r \neq 1 \text{ のとき } \quad \sum_{k=1}^{n} ar^{k-1} = \frac{a(1-r^n)}{1-r}}$$

(2) $\displaystyle \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(4n-1)(4n+3)}$

$\displaystyle = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(4k-1)(4k+3)}$

$\displaystyle = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{4} \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{4k-1} - \frac{1}{4k+3}\right)$

$$\frac{1}{4k-1} - \frac{1}{4k+3} = \frac{4k+3-(4k-1)}{(4k-1)(4k+3)} = \frac{4}{(4k-1)(4k+3)}$$

$$\therefore \frac{1}{(4k-1)(4k+3)} = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{4k-1} - \frac{1}{4k+3}\right)$$

$\displaystyle = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{4}\left\{\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{7}\right)+\left(\frac{1}{7}-\frac{1}{11}\right)+\left(\frac{1}{11}-\frac{1}{15}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{4n-1}-\frac{1}{4n+3}\right)\right\}$

$\displaystyle = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{4}\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4n+3}\right) = \frac{1}{12}$ //

(3) $\displaystyle \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{3n-1}+\sqrt{3n+2}}$

$\displaystyle = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{3k-1}+\sqrt{3k+2}}$

$\displaystyle = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{\sqrt{3k-1}-\sqrt{3k+2}}{(\sqrt{3k-1}+\sqrt{3k+2})(\sqrt{3k-1}-\sqrt{3k+2})}$

$\displaystyle = \lim_{n\to\infty} \left\{-\frac{1}{3}\sum_{k=1}^{n}(\sqrt{3k-1}-\sqrt{3k+2})\right\}$

$\displaystyle = \lim_{n\to\infty} \left[-\frac{1}{3}\left\{(\sqrt{2}-\sqrt{5})+(\sqrt{5}-\sqrt{8})+(\sqrt{8}-\sqrt{11})+\cdots+(\sqrt{3n-1}-\sqrt{3n+2})\right\}\right]$

$\displaystyle = \lim_{n\to\infty} \left\{-\frac{1}{3}(\sqrt{2}-\sqrt{3n+2})\right\}$

$\displaystyle = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{3}(\sqrt{3n+2}-\sqrt{2})$ 　　$+\infty$ に発散 //

1、数列の極限

(2) 和の極限 $\left\{\begin{array}{l}\text{◦部分和} \to \lim \text{(無限等比級数含む)} \\ \text{◦区分求積法} \\ \text{◦はさみうちの原理}\end{array}\right.$

〈無限等比級数〉

初項が a、公比が r の無限等比数列 $\{ar^{n-1}\}$ から作られる無限級数

$$a + ar + ar^2 + \cdots\cdots + ar^{n-1} + \cdots\cdots \qquad \cdots①$$

を、初項 a，公比 r の「無限等比級数」という。

例1

(1) $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \cdots\cdots + \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} + \cdots\cdots$

の部分和を S_n とすると、

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} 1 \times \left(-\frac{1}{2}\right)^{k-1}$$

$$\sum_{k=1}^{n} ar^{k-1} = \frac{a(1-r^n)}{1-r} \quad (r \neq 1)$$

$$= \frac{1 \times \left\{1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^n\right\}}{1 - \left(-\frac{1}{2}\right)}$$

$$= \frac{2}{3}\left\{1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^n\right\}$$

したがって、$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \frac{2}{3}\left\{1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^n\right\} = \frac{2}{3}$ //

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} r^n = \begin{cases} \infty & (r > 1) \\ 1 & (r = 1) \\ 0 & (-1 < r < 1) \\ \text{振動} & (r \leqq -1) \end{cases}}$$

(2) $1 + \frac{3}{2} + \frac{9}{4} + \cdots\cdots + 1 \times \left(\frac{3}{2}\right)^{n-1} + \cdots\cdots$

の部分和を S_n とすると、

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} 1 \times \left(\frac{3}{2}\right)^{k-1}$$

$$\sum_{k=1}^{n} ar^{k-1} = \frac{a(r^n - 1)}{r-1} \quad (r \neq 1)$$

$$= \frac{1 \times \left\{\left(\frac{3}{2}\right)^n - 1\right\}}{\frac{3}{2} - 1}$$

$$= 2\left\{\left(\frac{3}{2}\right)^n - 1\right\}$$

したがって、$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} 2\left\{\left(\frac{3}{2}\right)^n - 1\right\} = +\infty$ (正の無限大に発散)

部分和 $a + ar + ar^2 + \cdots + ar^{n-1}$ を S_n とすると、

$$S_n = \begin{cases} \frac{a(1-r^n)}{1-r} & (r \neq 1) \\ na & (r = 1) \end{cases}$$

(i) $a = 0$ のとき、$S_n = 0$ だから、

無限等比級数① は収束して、その和は 0

(ii) $a \neq 0$ のとき、

$r = 1$ なら $S_n = na$ だから、発散

$r \neq 1$ のときは $-1 < r < 1$ のとき $\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \frac{a(1-r^n)}{1-r} = \frac{a}{1-r}$

無限等比級数 $a + ar + ar^2 + \cdots + ar^{n-1} + \cdots$ の収束条件は $a = 0$ または $-1 < r < 1$

例2 次の無限等比級が収束するようなxの範囲を求めよ。

(1) $x + x\times\frac{x-2}{2} + x\times\left(\frac{x-2}{2}\right)^2 + \cdots + x\times\left(\frac{x-2}{2}\right)^{n-1} + \cdots$

(2) $1 + \sin x + \sin^2 x + \sin^3 x + \cdots$

解)
(1) 初項x, 公比$\frac{x-2}{2}$の無限等比級数なので、収束条件は

$x = 0$ または $-1 < \frac{x-2}{2} < 1$

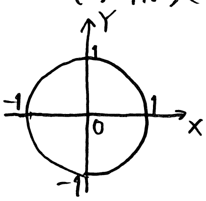
$-2 < x-2 < 2$

$0 < x < 4$

よって、$0 \leqq x < 4$ //

(そのとき和は
$\frac{x}{1-\frac{x-2}{2}} = \frac{2x}{2-(x-2)} = \frac{2x}{4-x}$)

(2) 初項1, 公比$\sin x$の無限等比級数なので、収束条件は



$-1 < \sin x < 1$

$\therefore x \neq \frac{\pi}{2} + n\pi$ (n:整数)

(そのとき和は
$\frac{1}{1-\sin x}$)

1、数列の極限

(2)和の極限
- 。部分和 → lim(無限等比級数含む)
- 。区分求積法
- 。はさみうちの原理

(ii) 区分求積法

$$\left.\begin{array}{l}\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}f\left(\frac{k}{n}\right)\\ \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}f\left(\frac{k}{n}\right)\end{array}\right\} = \int_0^1 f(x)\,dx$$

例 次の極限値を求めよ。

(1) $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{\sqrt{n+k}}{n\sqrt{n}}$

(2) $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^4}\sum_{k=1}^{n}k^3$

解)(1) (与式) $= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{\sqrt{n+k}}{\sqrt{n}}$

$= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\sqrt{1+\frac{k}{n}}$

$= \int_0^1\sqrt{1+x}\,dx$

$= \int_0^1(1+x)^{\frac{1}{2}}dx$

$= \left[\frac{2}{3}(1+x)^{\frac{3}{2}}\right]_0^1$

$= \frac{2}{3}(2^{\frac{3}{2}}-1) = \frac{2}{3}(2\sqrt{2}-1)$ //

(2) (与式) $= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^4}\times\left\{\frac{1}{2}n(n+1)\right\}^2$

$= \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{4}n^2(n+1)^2}{n^4}$

$= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{4}\times\left(1+\frac{1}{n}\right)^2$

$= \frac{1}{4}$ //

((2)の別解)

(与式) $= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^3$

$= \int_0^1 x^3\,dx$

$= \left[\frac{1}{4}x^4\right]_0^1$

$= \frac{1}{4}$ //

1、数列の極限

(2) 和の極限 { ◦部分和→$\lim$(無限等比級数含む) ◦区分求積法 ◦はさみうちの原理 }

(iii) はさみうちの原理

例 次の極限を求めよ。

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{2n}\frac{1}{\sqrt{n^2+k}}$$

解)

$1 \leqq k \leqq 2n$ から、$n^2+1 \leqq n^2+k \leqq n^2+2n$

したがって、$\sqrt{n^2+1} \leqq \sqrt{n^2+k} \leqq \sqrt{n^2+2n}$

$$\therefore \frac{1}{\sqrt{n^2+2n}} \leqq \frac{1}{\sqrt{n^2+k}} \leqq \frac{1}{\sqrt{n^2+1}}$$

よって、$\displaystyle\sum_{k=1}^{2n}\frac{1}{\sqrt{n^2+2n}} \leqq \sum_{k=1}^{2n}\frac{1}{\sqrt{n^2+k}} \leqq \sum_{k=1}^{2n}\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}$

ここで、
$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{2n}\frac{1}{\sqrt{n^2+2n}} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n^2+2n}}\sum_{k=1}^{2n}1$$
$$= \lim_{n\to\infty}\frac{2n}{\sqrt{n^2+2n}}$$
$$= \lim_{n\to\infty}\frac{2}{\sqrt{1+\frac{2}{n}}} = 2$$

また、
$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{2n}\frac{1}{\sqrt{n^2+1}} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}\sum_{k=1}^{2n}1$$
$$= \lim_{n\to\infty}\frac{2n}{\sqrt{n^2+1}}$$
$$= \lim_{n\to\infty}\frac{2}{\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}} = 2$$

はさみうちの原理により、

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{2n}\frac{1}{\sqrt{n^2+k}} = 2 \,/\!/$$

1. 数列の極限

(2) 和の極限

- 部分和 → lim (無限等比級数含む)
- 区分求積法
- はさみうちの原理

少し応用です。

〈3つの重要事項〉

① $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$ ならば $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ は発散する。

証明 $S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n$ とする。

「対偶」が真となることを示す。

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ が収束すると仮定すると、

$\lim_{n\to\infty} S_n = \alpha$, $\lim_{n\to\infty} S_{n-1} = \alpha$ なる α が存在し、

また、$a_n = S_n - S_{n-1}$ $(n \geqq 2)$ から、

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}(S_n - S_{n-1}) = 0$$

例 $4, 4, 4, 4, \cdots\cdots, 4 \cdots\cdots$

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} 4 = +\infty \text{ (に発散)}$$

$$1 + \frac{2}{3} + \frac{3}{5} + \frac{4}{7} + \cdots$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2n-1}$$

ここで、$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{2n-1} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2-\frac{1}{n}} = \frac{1}{2} \neq 0$ なので

この級数は $(+\infty)$ に発散する。

したがって、$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ が収束するならば、$\lim_{n\to\infty} a_n = 0$

対偶をとれば、「$\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$ ならば $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ は発散」は成立する。(証明終)

② 偶奇

例 次の無限級数の収束・発散を調べ、収束するときは和を求めよ。

(1) $\left(1 - \frac{2}{3}\right) + \left(\frac{2}{3} - \frac{3}{5}\right) + \left(\frac{3}{5} - \frac{4}{7}\right) + \cdots + \left(\frac{n}{2n-1} - \frac{n+1}{2n+1}\right) + \cdots$

$$= \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{2n-1} - \frac{n+1}{2n+1}\right)$$

$$= \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{2k-1} - \frac{k+1}{2k+1}\right)$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left\{\left(\frac{1}{1} - \frac{2}{3}\right) + \left(\frac{2}{3} - \frac{3}{5}\right) + \left(\frac{3}{5} - \frac{4}{7}\right) + \cdots + \left(\frac{n}{2n-1} - \frac{n+1}{2n+1}\right)\right\}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(1 - \frac{n+1}{2n+1}\right)$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(1 - \frac{1+\frac{1}{n}}{2+\frac{1}{n}}\right) \quad 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \text{ // (収束)}$$

(2) $1 - \frac{2}{3} + \frac{2}{3} - \frac{3}{5} + \frac{3}{5} - \frac{4}{7} - \frac{5}{9} + \frac{5}{9} - \frac{6}{11} + \cdots + \frac{n}{2n-1} - \frac{n+1}{2n+1} + \cdots$

初項から第 n 項までの和を S_n とすると、

$S_{2n-1} = 1$, $S_{2n} = 1 - \frac{n+1}{2n+1}$

$$\lim_{n\to\infty} S_{2n} = \lim_{n\to\infty}\left(1 - \frac{n+1}{2n+1}\right) = \frac{1}{2}$$

発散 //

③ eの定義

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e \fallingdotseq 2.718$$

$(\log_e 3 = \log 3)$

例

$\left(1+\frac{1}{2}\right)^2 = 2.25$

$\left(1+\frac{1}{3}\right)^3 \fallingdotseq 2.37$

$\left(1+\frac{1}{4}\right)^4 \fallingdotseq 2.44$

$\left(1+\frac{1}{5}\right)^5 \fallingdotseq 2.49$

$\left(1+\frac{1}{6}\right)^6 \fallingdotseq 2.52$

$\vdots \qquad \vdots$

$\left(1+\frac{1}{10}\right)^{10} \fallingdotseq 2.59$

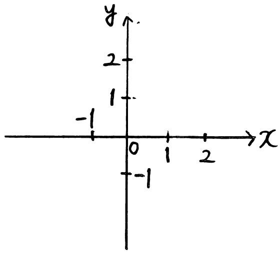
2、関数の極限

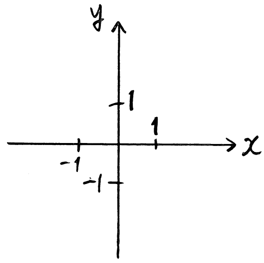
(0) 準備 〈4つ〉

(ア) 分数関数

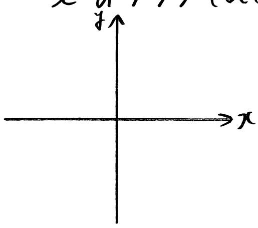
例えば、 $y=\dfrac{x-1}{x+1}$ ← 分数(1次)関数

例1 $y=\dfrac{1}{x}$ のグラフ　　　　$y=-\dfrac{1}{x}$ のグラフ



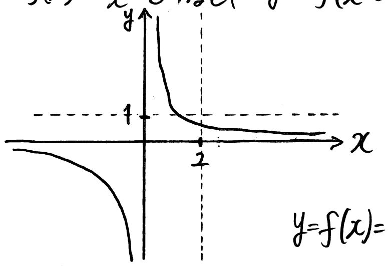


まとめ1 $y=\dfrac{a}{x}$ のグラフ $(a \neq 0)$



例2 $y=\dfrac{3}{x-2}+1$ のグラフ

$f(x)=\dfrac{3}{x}$ とすると、 $y=f(x-2)+1$



$y=f(x)=\dfrac{3}{x}$

$y=f(x)$ のグラフを
$\begin{cases} x\text{軸正方向に } p \\ y\text{軸正方向に } q \end{cases}$
平行移動したものは
$y-q=f(x-p)$
$\therefore y=f(x-p)+q$

まとめ2 $y=\dfrac{a}{x}\ (a \neq 0)$ のグラフを
$\begin{cases} x\text{軸正方向に } p \\ y\text{軸正方向に } q \end{cases}$
平行移動したものは
$$y=\frac{a}{x-p}+q$$

例3

$f(x)=\dfrac{ax+b}{x+1}$ とする。$y=f(x)$ のグラフは点 $(1,0)$ を通り、直線 $y=2$ を漸近線にもつ。

(1) a, b の値を求めよ。

(2) 不等式 $f(x)>x-2$ を解け。

解) (1) $y=2$ を漸近線にもつので、

$f(x)=\dfrac{k}{x+1}+2$ とおくと、

$f(1)=0$ から、 $\dfrac{k}{2}+2=0$

$\therefore k=-4$

したがって、

$$f(x)=\frac{-4}{x+1}+2$$
$$=\frac{-4+2(x+1)}{x+1}$$
$$=\frac{2x-2}{x+1}$$

$\therefore a=2,\ b=-2$ //

例 $y=\dfrac{3x+2}{x+1}$

$$=\frac{3(x+1)-1}{x+1}$$
$$=3-\frac{1}{x+1}$$
$$=\frac{-1}{x+1}+3$$

(2) (1)の結果より

$$f(x)=\frac{2x-2}{x+1}$$
$$=\frac{-4}{x+1}+2$$

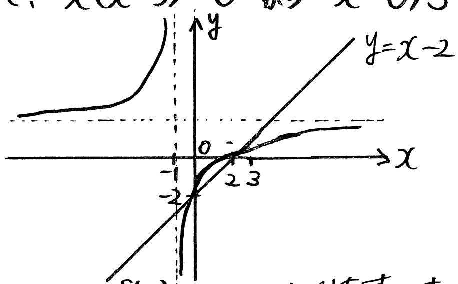
まず、$f(x)=x-2$，つまり、

$\dfrac{2x-2}{x+1}=x-2$ を解くと

$2x-2=(x-2)(x+1)$

$=x^2-x-2\quad(x\neq-1)$

よって、$x(x-3)=0$ から $x=0, 3$



グラフより、$f(x)>x-2$ をみたすのは、

$x<-1,\ 0<x<3$ //

$f(x)>x-2$

$\dfrac{2x-2}{x+1}>x-2$

(i) $x>-1$ のとき

$2x-2>(x-2)(x+1)$

$\Leftrightarrow x(x-3)<0$

$\Leftrightarrow 0<x<3$ ($x>-1$ をみたす)

(ii) $x<-1$ のとき

$2x-2<(x-2)(x+1)$

$\Leftrightarrow x(x-3)>0$

$\Leftrightarrow x<0,\ 3<x$

ただし、$x<-1$ のもとでは、$x<-1$

(i)(ii) より、$x<-1,\ 0<x<3$ //

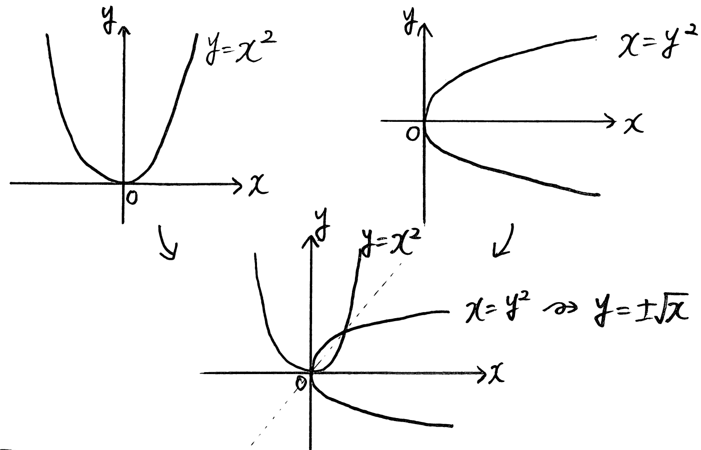
2、関数の極限

(0) 準備 〈4つ〉

(ii) 無理関数

例1

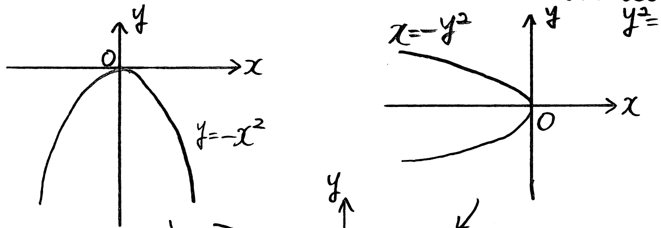
$y=x^2$ について、x と y を入れ替えると、$x=y^2$ である。

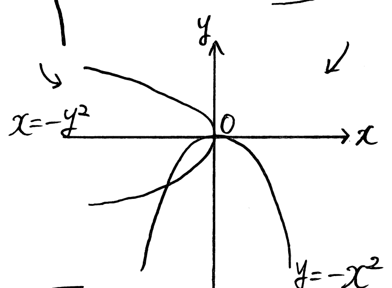


例2

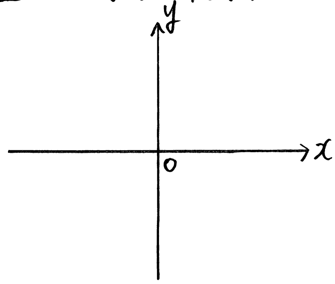
$y=-x^2$ についても同様に入れ替えると、$x=-y^2$ である。

$y^2=-x$ から、$y=\pm\sqrt{-x}$





まとめ $y=\pm\sqrt{ax}$ のグラフ



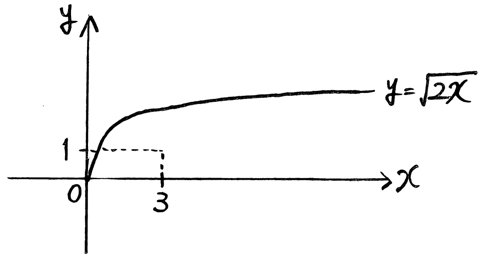
$y=\sqrt{ax}$ のグラフを

$\begin{cases} x\text{軸正方向に } p \\ y\text{軸正方向に } q \end{cases}$

平行移動したものは

$$y=\sqrt{a(x-p)}+q$$

例3 $y=\sqrt{2x}$



例4 不等式 $\sqrt{x+1}<-x+5$ を解け。

解) $\sqrt{x+1}<-x+5$

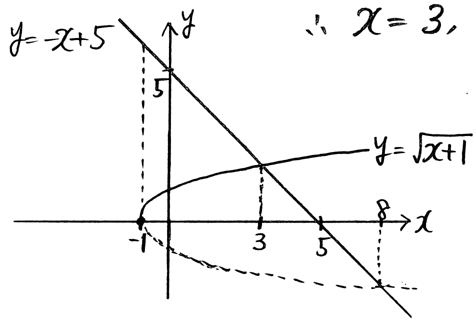
まず、$\sqrt{x+1}<-x+5$ を解くと、

$x+1=(-x+5)^2$ かつ $x+1\geqq 0$ かつ $-x+5\geqq 0$

$\therefore\ x^2-11x+24=0$ かつ $-1\leqq x\leqq 5$

$\Leftrightarrow\ (x-3)(x-8)=0$ かつ $-1\leqq x\leqq 5$

$\therefore\ x=3,\ 8$



グラフより、

$-1\leqq x<3$ //

例5 方程式 $\sqrt{x}=x+k$ の実数解の個数を求めよ。(k:実定数)

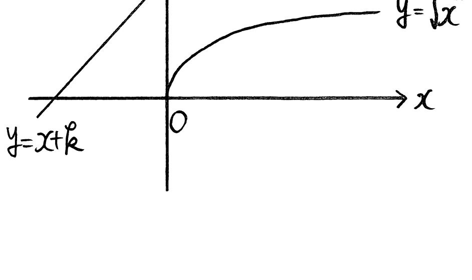
解) $\sqrt{x}=x+k$

$x=(x+k)^2$ かつ $x\geqq 0$ かつ $x+k\geqq 0$

$x^2+(2k-1)x+k^2=0$

判別式を D とすると、$D=(2k-1)^2-4k^2$

$=-4k+1\ =0$ のとき $k=\frac{1}{4}$



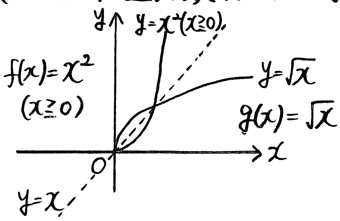
$$\begin{cases} 0\leqq k<\frac{1}{4} \text{ のとき } 2\text{コ} \\ k<0,\ k=\frac{1}{4} \text{ のとき } 1\text{コ} \\ k>\frac{1}{4} \text{ のとき } 0\text{コ} \end{cases}$$ //

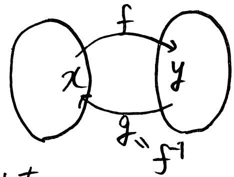
2. 関数の極限

(0) 準備 < 4つ

(iii) 逆関数

例1 $y=x^2\ (x\geqq 0)$ の逆関数は、$x=y^2\ (y\geqq 0)$



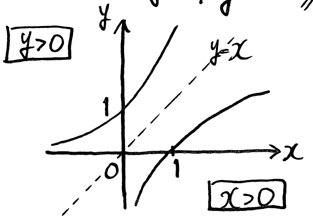


関数 $y=f(x)$ において、
y の値を定めると、x の値がちょうど1つに定まるとき、すなわち、
x が y の関数 $x=g(y)$ と表されるとき、変数 x と y を入れ替えた
関数 $y=g(x)$ を $y=f(x)$ の「逆関数」という。

$y=f^{-1}(x)$ と $y=f(x)$ のグラフは直線 $y=x$ に関して対称。

作り方
① $y=f(x)$ を x について解いて、$x=g(y)$ とする。
② x と y を入れ替えて、$y=g(x)$ とする。

例2 $y=2^x$ の逆関数は $y=\log_2 x$
$2^x=y$ から $x=\log_2 y$ 入れ替えて



「定義域と値域が入れ替わる!!」

例3 $f(x)=\dfrac{ax+4}{-x+b}$ の逆関数が

$f^{-1}(x)=\dfrac{2x-4}{x+3}$ のとき、定数 a,b の値を求めよ。

解) $y=\dfrac{2x-4}{x+3}$ について解くと

$(x+3)y=2x-4$ から
$(y-2)x=-3y-4$ $\therefore\ x=\dfrac{3y+4}{2-y}$

x と y を入れ替えて、$y=\dfrac{3x+4}{2-x}=f(x)$

よって、$a=3,\ b=2$ //

(別解) $(f^{-1}\circ f)(x)=f^{-1}(f(x))$

$$=\frac{2\times\frac{ax+4}{-x+b}-4}{\frac{ax+4}{-x+b}+3}$$

$$=\frac{2(ax+4)-4(-x+b)}{ax+4+3(-x+b)}$$

$$=\frac{(2a+4)x+8-4b}{(a-3)x+4+3b}$$

$=x$ となるので
$a=3$ かつ $4+3b=10$
として.

2、関数の極限

(0) 準備 < 4つ

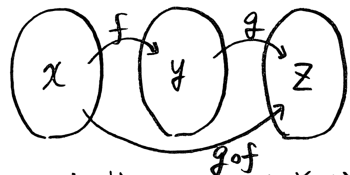
(iv) 合成関数

例1

$y = x-2$，$z = y^2$ があるとき、

$z = y^2$

$= (x-2)^2$



2つの関数 $y = f(x)$，$z = g(y)$ があり、$f(x)$ の値域が $g(y)$ の定義域に含まれているとする。

このとき、$g(y)$ に $y = f(x)$ を代入すると、新たな関数

$$z = g(f(x))$$

が得られる。この関数を $f(x)$ と $g(y)$ の「合成関数」という。

例2 $f(x) = x^2$，$g(x) = 2x-1$ とするとき、次の合成関数を求めよ。

(1) $(f \circ g)(x)$　(2) $(g \circ f)(x)$　(3) $(g \circ g)(x)$

解）

(1) $(f \circ g)(x) = f(g(x))$

$= \{g(x)\}^2$

$= (2x-1)^2$ //

(2) $(g \circ f)(x) = g(f(x))$

$= 2f(x) - 1$

$= 2x^2 - 1$ //

(3) $(g \circ g)(x) = g(g(x))$

$= 2g(x) - 1$

$= 2(2x-1) - 1$

$= 4x - 3$ //

例3 $f(x) = \dfrac{x}{x-1}$，$g(x) = \dfrac{1}{1-x}$ のとき、

$(f \circ g)(x)$ および $(f \circ f)(x)$ を求めよ。

解）

$(f \circ g)(x) = f(g(x))$

$= \dfrac{g(x)}{g(x)-1}$

$= \dfrac{\frac{1}{1-x}}{\frac{1}{1-x} - 1}$

$= \dfrac{1}{1-(1-x)}$

$= \dfrac{1}{x}$

$(f \circ f)(x) = f(f(x))$

$= \dfrac{f(x)}{f(x)-1}$

$= \dfrac{\frac{x}{x-1}}{\frac{x}{x-1} - 1}$

分母・分子に $x-1$ をかけて

$= \dfrac{x}{x-(x-1)}$

$= x$ //

$f^{-1}(x) = f(x)$ となる。

実際、$y = \dfrac{x}{x-1}$ について、

$(x-1)y = x$ より

$x(y-1) = y$

$x = \dfrac{y}{y-1}$

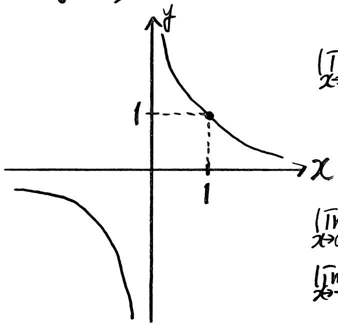
x と y を入れ替えて

$y = \dfrac{x}{x-1}$

2、関数の極限

(1) 分数 & 無理関数の極限

例1 $y=\dfrac{1}{x}$



$$\lim_{x\to 1}\frac{1}{x}=1$$

$$\lim_{x\to \infty}\frac{1}{x}=0$$

$$\lim_{x\to -\infty}\frac{1}{x}=0$$

関数$f(x)$において、変数xがaと異なる値をとりながらaに限りなく近づくとき、それに応じて$f(x)$の値が一定の値Aに限りなく近づくならば、Aを$x\to a$のときの関数$f(x)$の「極限値」または「極限」といい、

$$\lim_{x\to a}f(x)=A$$

または、$x\to a$のとき $f(x)\to A$ で表す。

（グラフにおいて、$\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}$ 極限なし
$\displaystyle\lim_{x\to +0}\frac{1}{x}=+\infty$ 右側極限
$\displaystyle\lim_{x\to -0}\frac{1}{x}=-\infty$ 左側極限）

問1 次の極限値を求めよ。

(1) $\displaystyle\lim_{x\to 2}\frac{x^2-3x}{x-1}=\frac{2^2-3\times2}{2-1}$

$=-2$ //

(2) $\displaystyle\lim_{x\to 2}\frac{2x^2-5x+2}{x^2-4}=\lim_{x\to 2}\frac{(2x-1)(x-2)}{(x+2)(x-2)}$

$=\dfrac{3}{4}$ //

(3) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}$ ↓ $\boxed{\text{逆有理化}}$

$\displaystyle=\lim_{x\to 0}\frac{(\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x})(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})}{x(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})}$

$\displaystyle=\lim_{x\to 0}\frac{2x}{x(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})}$

$=\dfrac{2}{1+1}=1$ //

(4) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sqrt{x+1}-\sqrt{x^2+1}}$ ↓「有理化」

$\displaystyle=\lim_{x\to 0}\frac{x(\sqrt{x+1}+\sqrt{x^2+1})}{(\sqrt{x+1}-\sqrt{x^2+1})(\sqrt{x+1}+\sqrt{x^2+1})}$

$\displaystyle=\lim_{x\to 0}\frac{x(\sqrt{x+1}+\sqrt{x^2+1})}{x(1-x)}$

$=2$ //

(5) $\displaystyle\lim_{x\to \infty}(\sqrt{x^2-x+1}-x)$ ↓ $\boxed{\text{逆有理化}}$

$\displaystyle=\lim_{x\to \infty}\frac{(\sqrt{x^2-x+1}-x)(\sqrt{x^2-x+1}+x)}{\sqrt{x^2-x+1}+x}$

$\displaystyle=\lim_{x\to \infty}\frac{-x+1}{\sqrt{x^2-x+1}+x}$ ← 1次（分子）、← 1次扱い（分母）

$\displaystyle=\lim_{x\to \infty}\frac{-1+\frac{1}{x}}{\sqrt{1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}+1}$

$=-\dfrac{1}{2}$ //

(6) $\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+3x+1}+x\right)$

$x=-t$ とおくと、$t\to+\infty$

$$(与式)=\lim_{t\to+\infty}\left(\sqrt{t^2-3t+1}-t\right) \quad \boxed{逆有理化}$$

$$=\lim_{t\to+\infty}\frac{\left(\sqrt{t^2-3t+1}-t\right)\left(\sqrt{t^2-3t+1}+t\right)}{\sqrt{t^2-3t+1}+t}$$

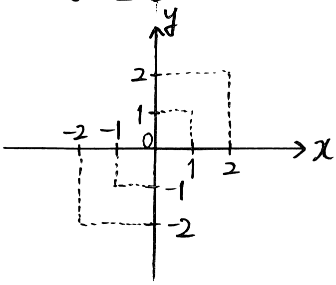
$$=\lim_{t\to+\infty}\frac{-3t+1}{\sqrt{t^2-3t+1}+1} \quad \begin{matrix}\leftarrow 1次\\ \leftarrow 1次扱い\end{matrix}$$

$$=\lim_{t\to+\infty}\frac{-3+\frac{1}{t}}{\sqrt{1-\frac{3}{t}+\frac{1}{t^2}}+1}=-\frac{3}{2}\,/\!/$$

(7) $\lim_{x\to1+0}\frac{x}{x^2-3x+2}=\lim_{x\to1+0}\frac{x}{(x-1)(x-2)}$

$$=-\infty\,/\!/$$

例2 $y=[x]$



$[x]$：xを越えない最大の整数
例えば、
$[3.2]=3$
$[4]=4$
$[-2.7]=-3$

(8) $\lim_{x\to1-0}\frac{2x}{x-[x]}=\lim_{x\to1-0}\frac{2x}{x}$

$$=2\,/\!/$$

(つづき)

問2 次の極限値を求めよ。

$$\lim_{x\to\infty}\frac{[3x]}{2x}$$

$[x] \leqq x < [x]+1$

解) 「$x-1 < [x] \leqq x$」で!!

$3x-1<[3x]\leqq 3x$ より、

$$\frac{3x-1}{2x}<\frac{[3x]}{2x}\leqq\frac{3x}{2x}$$

$$\Leftrightarrow \frac{3}{2}-\frac{1}{2x}<\frac{[3x]}{2x}\leqq\frac{3}{2}$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{3}{2}-\frac{1}{2x}\right)=\frac{3}{2}$$

はさみうちの原理より、

$$\lim_{x\to\infty}\frac{[3x]}{2x}=\frac{3}{2}$$ //

問3 次の式をみたす a, b の値を求めよ。

(1) $$\lim_{x\to 2}\frac{a\sqrt{x^2+2x+8}+b}{x-2}=\frac{3}{4}$$

(分母)→0 かつ 右辺が有限値であることから、(分子)→0

$\therefore \lim_{x\to 2}(a\sqrt{x^2+2x+8}+b)=0$

$4a+b=0$ $\quad\therefore\ b=-4a \cdots ①$

①より、与式の

$$(\text{左辺})=\lim_{x\to 2}\frac{a\sqrt{x^2+2x+8}-4a}{x-2}$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{a(\sqrt{x^2+2x+8}-4)}{x-2}$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{a\{(x^2+2x+8-4^2\}}{(x-2)(\sqrt{x^2+2x+8}+4)}$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{a(x^2+2x-8)}{(x-2)(\sqrt{x^2+2x+8}+4)}$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{a(x-2)(x+4)}{(x-2)(\sqrt{x^2+2x+8}+4)}$$

$$=\frac{6a}{8}=\frac{3}{4}$$

よって、$a=1$

①から $b=-4$ //

(2) $$\lim_{x\to\infty}\{\sqrt{x^2-2x+4}-(ax+b)\}=0$$

極限値が0となるためには

$a>0 \cdots ①$

となることが必要。このもとで、

$$(\text{左辺})=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-2x+4-(ax+b)^2}{\sqrt{x^2-2x+4}+(ax+b)}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{(1-a^2)x^2-2(1+ab)x+4-b^2}{\sqrt{x^2-2x+4}+ax+b}$$ ←1次 ←1次扱い

極限値が0となるには、

$1-a^2=0 \Leftrightarrow a=\pm 1$

ただし、①より $a=1$ が必要。

このとき、

$$(\text{左辺})=\lim_{x\to\infty}\frac{-2(1+b)x+4-b^2}{\sqrt{x^2-2x+4}+x+b}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{-2(1+b)+\frac{4-b^2}{x}}{\sqrt{1-\frac{2}{x}+\frac{4}{x^2}}+1+\frac{b}{x}}$$

$$=\frac{-2(1+b)}{2}=0$$

$\therefore b=-1,\ a=1$ //

2、関数の極限

(2) 三角 & 指数・対数関数の極限

「まず入れてみる」でダメなときは、$\underbrace{\text{公式}}$ を利用する！

三 指 対
2つ 2つ 2つ
$\underbrace{\qquad\qquad}$
計 6つ！

$\boxed{\text{三角関数の極限公式}}$

- $\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$
- $\lim_{x \to 0} \frac{\tan x}{x} = 1$

$\boxed{\text{指数関数の極限公式}}$

- $\lim_{x \to 0} \frac{a^x - 1}{x} = \log a$ $(a>0)$
- $\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$

$\boxed{\text{対数関数の極限公式}}$

- $\lim_{x \to 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e$
- $\lim_{x \to 0} \frac{\log(1+x)}{x} = 1$

2、関数の極限

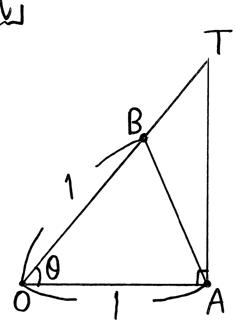
基本は、「まず入れてみる」
↓
ダメなら「極限公式」

三 指 対
2つ 2つ 2つ
計6つ

(2) 三角 & 指数・対数関数の極限

(i) 三角関数の極限

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1 \qquad \lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{x}=1$$



証明

右の図で、△OAB、扇形 OAB、△OAT の面積はそれぞれ、

$$\frac{1}{2}\times 1^2\times\sin\theta,\quad \pi\times 1^2\times\frac{\theta}{2\pi},\quad \frac{1}{2}\times 1\times\tan\theta$$

これらは、面積の小さい順に並んでいるので、

$$\frac{1}{2}\sin\theta<\frac{\theta}{2}<\frac{1}{2}\tan\theta$$

$$\Leftrightarrow 0<\sin\theta<\theta<\tan\theta$$

したがって、

$$\frac{1}{\tan\theta}<\frac{1}{\theta}<\frac{1}{\sin\theta}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\cos\theta}{\sin\theta}<\frac{1}{\theta}<\frac{1}{\sin\theta}$$

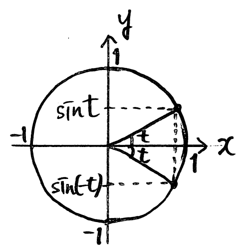
全辺に $\underbrace{\sin\theta}_{\oplus}$ をかけて

$$\Leftrightarrow \cos\theta<\frac{\sin\theta}{\theta}<1$$

ここで、$\lim_{\theta\to+0}\cos\theta=1$ より、
はさみうちの原理より、

$$\lim_{\theta\to+0}\frac{\sin\theta}{\theta}=1 \quad \cdots ①$$

また、$\lim_{\theta\to-0}\frac{\sin\theta}{\theta}$ について。
$\theta=-t$ とすると、$t\to+0$



$$\therefore \lim_{\theta\to-0}\frac{\sin\theta}{\theta}=\lim_{t\to+0}\frac{\sin(-t)}{-t}$$

$$=\lim_{t\to+0}\frac{\sin t}{t}$$

$$=1 \quad \cdots ②$$

①②より、$\lim_{\theta\to 0}\frac{\sin\theta}{\theta}=1$

したがって、

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1 \quad \text{(証明終)}$$

また、

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x\cos x}$$

$$=1 \quad \text{(証明終)}$$

例) 次の極限値を求めよ。

(1) $\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{x}$　(2) $\lim_{x\to 0}\frac{\tan(3\sin(4\sin 2x))}{x}$　(3) $\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{\tan 3x}$

(4) $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}$　(5) $\lim_{x\to\pi}\frac{x-\pi}{\sin x}$　(6) $\lim_{x\to 0}\frac{\tan x^\circ}{x}$　(7) $\lim_{x\to\infty}\frac{\sin x}{x}$

解) (1) $\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{3x}\times 3$

$= 3$ //

(2) $\lim_{x\to 0}\frac{\tan(3\sin(4\sin 2x))}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{\tan(3\sin(4\sin 2x))}{3\sin(4\sin 2x)}\times\frac{3\sin(4\sin 2x)}{x}$

$= \lim_{x\to 0}\frac{\tan(3\sin(4\sin 2x))}{3\sin(4\sin 2x)}\times\frac{3\sin(4\sin 2x)}{4\sin 2x}\times\frac{4\sin 2x}{2x}\times 2$

$= 3\times 4\times 2 = 24$ //

(3) $\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{\tan 3x} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{\sin 2x}{2x}\times 2x}{\frac{\tan 3x}{3x}\times 3x}$

$= \frac{2}{3}$ //

(4) $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{(1-\cos x)(1+\cos x)}{x^2(1+\cos x)}$

$= \lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2\times\frac{1}{1+\cos x}$

$1-\cos x$
$=2\sin^2\frac{x}{2}$

$= \frac{1}{2}$ //

(別解) (与式) $= \lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{x^2}$

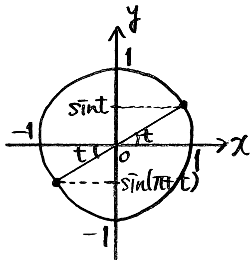
$= \lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{\left(\frac{x}{2}\right)^2\times 4}$

$= \lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)^2\times\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$ //

(5) $\displaystyle\lim_{x\to\pi}\frac{x-\pi}{\sin x}$

$x-\pi=t$ とおくと、$t\to 0$
$x=\pi+t$

$$(\text{与式})=\lim_{t\to 0}\frac{t}{\sin(\pi+t)}$$
$$=\lim_{t\to 0}\frac{t}{-\sin t}$$
$$=\lim_{t\to 0}\left(-\frac{1}{\frac{\sin t}{t}}\right)=-1 \text{ //}$$



(6) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\tan x^\circ}{x}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\tan\frac{\pi}{180}x}{x}$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{\tan\frac{\pi}{180}x}{\frac{\pi}{180}x}\times\frac{\pi}{180}$$
$$=\frac{\pi}{180} \text{ //}$$

$180^\circ=\pi$
$1^\circ=\frac{\pi}{180}$
$x^\circ=\frac{\pi}{180}x$

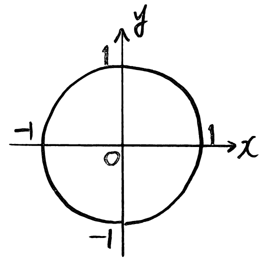
(7) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{\sin x}{x}$

$-1\leqq\sin x\leqq 1$ かつ $x>0$ より

ここで $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\left(-\frac{1}{x}\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}=0$

はさみうちの原理より

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\sin x}{x}=0 \text{ //}$$



問 $\displaystyle\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{a+b\sin x}{(2x-\pi)^2}=\frac{1}{4}$ が成り立つとき、定数 a, b の値を求めよ。

解) (分母) $\to 0$ かつ 右辺が有限値なので (分子) $\to 0$

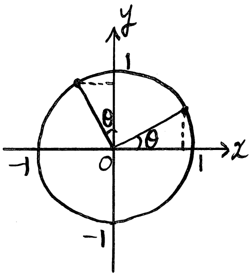
$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}(a+b\sin x)=0$$
$$a+b=0 \qquad \therefore b=-a \cdots ①$$

①から、
$$(\text{左辺})=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{a-a\sin x}{(2x-\pi)^2}$$
$$=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{a(1-\sin x)}{(2x-\pi)^2}$$

$2x-\pi=t$ とおくと、$2x=\pi+t$ より $x=\frac{\pi}{2}+\frac{t}{2}$

$(t\to 0)$ $$(\text{左辺})=\lim_{t\to 0}\frac{a\{1-\sin(\frac{\pi}{2}+\frac{t}{2})\}}{t^2}$$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{a(1-\cos\frac{t}{2})}{t^2}$$



$$=\lim_{t\to 0}\frac{a(1-\cos\frac{t}{2})(1+\cos\frac{t}{2})}{t^2(1+\cos\frac{t}{2})}$$

$$=\lim_{t\to 0} a\times\left(\frac{\sin\frac{t}{2}}{\frac{t}{2}}\right)^2\times\frac{1}{4}\times\frac{1}{1+\cos\frac{t}{2}}$$

$$=a\times 1^2\times\frac{1}{4}\times\frac{1}{2}$$

$$=\frac{a}{8}=\frac{1}{4}$$

$\therefore a=2$

①より $b=-2$ //

2. 関数の極限

(2) 三角 & 指数・対数関数

指 $\begin{cases} \displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x} = \log a \\ \displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x} = 1 \end{cases}$

対 $\begin{cases} \displaystyle\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e \\ \displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\log(1+x)}{x} = 1 \end{cases}$

$\displaystyle\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e$ を示す。

まず、$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e \fallingdotseq 2.718$

実数 x についても同様に考え、

$\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$ …①

また、$\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$ について。

$x=-t$ とすると、$t\to+\infty$ で

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x &= \lim_{t\to+\infty}\left(1+\frac{1}{-t}\right)^{-t} \\
&= \lim_{t\to+\infty}\left\{\left(1-\frac{1}{t}\right)^{-1}\right\}^t \\
&= \lim_{t\to+\infty}\left(\frac{t}{t-1}\right)^t \\
&= \lim_{t\to+\infty}\left(\frac{t-1+1}{t-1}\right)^t \\
&= \lim_{t\to+\infty}\left(1+\frac{1}{t-1}\right)^t \\
&= \lim_{t\to+\infty}\left\{\left(1+\frac{1}{t-1}\right)^{t-1}\right\}^{\frac{t}{t-1}} \\
&= e \quad \cdots②
\end{aligned}$$

①②より、$\displaystyle\lim_{x\to\pm\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$

ここで $\frac{1}{x}=u$ とおくと、$u\to\pm 0$

$\left(x=\frac{1}{u}\right)$

$\therefore \displaystyle\lim_{u\to\pm 0}(1+u)^{\frac{1}{u}} = e$

したがって、

$\displaystyle\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e$

(証明終)

次に、
$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0}\frac{\log(1+x)}{x} &= \lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\log(1+x) \\
&= \lim_{x\to 0}\log(1+x)^{\frac{1}{x}} \\
&= \log e = 1
\end{aligned}$$

(証明終)

ひきつづいて、$\lim_{x\to 0}\dfrac{a^x-1}{x}$ について。

$\dfrac{a^x-1}{x}=t$ とおくと、$a^x-1=xt$

$\Leftrightarrow \underset{\oplus}{a^x}=\underset{\oplus}{1+xt}$

$\Leftrightarrow \log a^x=\log(1+xt)$

$\Leftrightarrow \dfrac{x\log a}{xt}=\dfrac{\log(1+xt)}{xt}$ ($xt\neq 0$ のもと)

したがって、$x\to 0$ のとき、$t\to\log a$

$\therefore \lim_{x\to 0}\dfrac{a^x-1}{x}=\log a$ (証明終)

$a=e$ とすれば $\lim_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{x}=\log e$

$=1$ (証明終)

例 次の極限を求めよ。

(1) $\lim_{x\to\infty}\left(1-\dfrac{1}{x}\right)^{3x}=\lim_{t\to-\infty}\left(1-\dfrac{1}{-t}\right)^{-3t}$

$x=-t$ とおく。($t\to-\infty$)

$=\lim_{t\to-\infty}\left\{\left(1+\dfrac{1}{t}\right)^t\right\}^{-3}$

$=e^{-3}=\dfrac{1}{e^3}$ //

(2) $\lim_{x\to 0}(1+4x)^{\frac{5}{x}}=\lim_{x\to 0}\left\{(1+4x)^{\frac{1}{4x}}\right\}^{20}$

$=e^{20}$ //

(3) $\lim_{x\to 0}\dfrac{\log(1-3x)}{x}=\lim_{x\to 0}\dfrac{\log(1-3x)}{-3x}\times(-3)$

$=-3$ //

(4) $\lim_{x\to 0}\dfrac{3^x-1}{x}=\log 3$ //

(5) $\lim_{x\to 0}\dfrac{e^{4x}-e^{-3x}}{x}=\lim_{x\to 0}\dfrac{e^{4x}-1-(e^{-3x}-1)}{x}$

$=\lim_{x\to 0}\left(\dfrac{e^{4x}-1}{x}-\dfrac{e^{-3x}-1}{x}\right)$

$=\lim_{x\to 0}\left\{\dfrac{e^{4x}-1}{4x}\times 4-\dfrac{e^{-3x}-1}{-3x}\times(-3)\right\}$

$=1\times 4-1\times(-3)$

$=7$ //