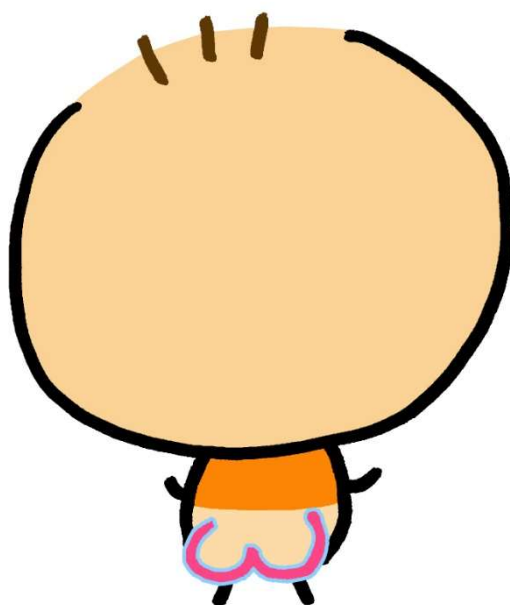


数学 C

17-2 複素数平面



<講義ノート>

複素数平面

1 極形式

- (1) ω の謎を解く！ (3 次)
- (2) 極形式の定着
- (3) 5 次にもいこう！！
- (4) 7 次に挑戦！！

2 三角形

- (1) 原点を含む ($\triangle OAB$)
- (2) 原点を含まない ($\triangle ABC$)

3 図形と方程式

- (1) 直線の方程式
- (2) 円の方程式 (2 点間の距離)

4 図形の応用

- (1) 図形の移動
 - <基本編> 回転・相似・平行移動・折り返し (実軸)
 - <応用編> 折り返し・反転
- (2) ベクトルとともに

0. 複素数の復習 特に「共役複素数」とその性質

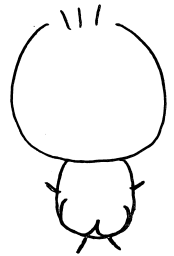
例1 $x^2 - 2x + 3 = 0$ を解くと

$$\begin{aligned} x &= 1 \pm \sqrt{-2} \\ &= 1 \pm \sqrt{2} \times \textcircled{i} \\ &= 1 \pm \sqrt{2}i \end{aligned}$$

実数でない
複素数

i : 虚数単位
 $i^2 = -1$

複素数 $\begin{cases} \text{実数: } b=0 \\ \text{虚数: } b \neq 0 \end{cases}$
 $a+bi$
 $\uparrow \quad \uparrow$
 a, b は実数



例2 次の計算をせよ。

(1) $(3+4i)(3-4i)$

(2) $\frac{1-2i}{3+4i}$

解) (1) $(3+4i)(3-4i) = 3-6i+4i-8i^2$
 $= 11-2i //$

(2) $\frac{1-2i}{3+4i} = \frac{(1-2i)(3-4i)}{(3+4i)(3-4i)}$ 3+4i の 共役複素数
 $= \frac{3-6i-4i+8i^2}{3^2-4^2i^2}$
 $= \frac{-5-10i}{25} = -\frac{1}{5} - \frac{2}{5}i //$

a, b を実数として、
 $a-bi$ を
 $a+bi$ の「共役複素数」
 いう。

$$\begin{aligned} (a+bi)(a-bi) &= a^2 - (bi)^2 \\ &= a^2 + b^2 \leftarrow \text{実数} \end{aligned}$$

性質 z の共役複素数を $\bar{z}$ と表す。

• $\overline{\alpha + \beta} = \bar{\alpha} + \bar{\beta}$

• $\overline{\alpha - \beta} = \bar{\alpha} - \bar{\beta}$

• $\overline{\alpha\beta} = \bar{\alpha}\bar{\beta}$

• $\overline{\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)} = \frac{\bar{\alpha}}{\bar{\beta}} \quad (\beta \neq 0)$

証明

$\alpha = a+bi, \beta = c+di$ とする。
 (a, b, c, d は実数)

• $\overline{\alpha \pm \beta} = \overline{(a+bi) \pm (c+di)}$
 $= \overline{a \pm c + (b \pm d)i}$
 $= a \pm c - (b \pm d)i$
 $= \frac{(a-bi) \pm (c-di)}{\frac{\alpha}{\beta}} = \bar{\alpha} \pm \bar{\beta} \quad \blacksquare$

• $\overline{\alpha\beta} = \overline{(a+bi)(c+di)}$

$= ac - bd + (ad + bc)i$

$= ac - bd - (ad + bc)i \dots \textcircled{1}$

• $\bar{\alpha}\bar{\beta} = (a-bi)(c-di)$

$= ac - bd - (ad + bc)i \dots \textcircled{2}$

→ ①, ② より $\overline{\alpha\beta} = \bar{\alpha}\bar{\beta} \quad \blacksquare$

確認
 $(3+4i)(1+2i)$
 $= 3-4i+6i-8i^2$
 $= 11+2i$

$$\begin{aligned}
 \left(\frac{\alpha}{\beta}\right) &= \frac{\overline{(a+bi)}}{\overline{(c+di)}} \\
 &= \frac{\overline{(a+bi)(c-di)}}{\overline{(c+di)(c-di)}} \\
 &= \frac{\overline{ac+bd-(ad-bc)i}}{c^2+d^2} \\
 &= \frac{ac+bd+(ad-bc)i}{c^2+d^2} \dots ①
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{\bar{\alpha}}{\bar{\beta}} &= \frac{a-bi}{c-di} \\
 &= \frac{(a-bi)(c+di)}{(c-di)(c+di)} \\
 &= \frac{ac+bd+(ad-bc)i}{c^2+d^2} \dots ②
 \end{aligned}$$

$$\text{①, ② 上) } \therefore \left(\frac{\alpha}{\beta}\right) = \frac{\bar{\alpha}}{\bar{\beta}} \quad \blacksquare$$

1. 極形式

(1) ω の謎を解く.

^{公式}
例1 $x^2 + x + 1 = 0$ を解け.

解) $x = \frac{-1 \pm \sqrt{3}}{2}$
 $= \frac{-1 \pm \sqrt{3}i}{2} \quad \sqrt{-1} = i$

$$ax^2 + bx + c = 0 (a \neq 0)$$

について

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

例2 例1 の 2つの解について.

$$\omega_1 = \frac{-1 + \sqrt{3}i}{2}, \quad \omega_2 = \frac{-1 - \sqrt{3}i}{2}$$

とすると、 ω_1^2 と ω_2^2 を求めよ.

解) $\omega_1^2 = \left(\frac{-1 + \sqrt{3}i}{2}\right)^2$ $\omega_2^2 = \left(\frac{-1 - \sqrt{3}i}{2}\right)^2$
 $= \frac{1 - 2\sqrt{3}i - 3}{4}$ $= \frac{1 + 2\sqrt{3}i - 3}{4}$
 $= \frac{-1 - \sqrt{3}i}{2}$ $= \frac{-1 + \sqrt{3}i}{2}$
 $= \omega_2$ $= \omega_1$

$$\omega_1^2 = \omega_2 \quad \omega_2^2 = \omega_1$$

ω の謎!!

$x^2 + x + 1 = 0$ の 2つの解 $\omega_1 = \frac{-1 + \sqrt{3}i}{2}$, $\omega_2 = \frac{-1 - \sqrt{3}i}{2}$ について.

$\omega_1^2 = \omega_2$ か $\omega_2^2 = \omega_1$ となるのは何故?

複素数平面

x や y 座標平面上の点 $P(a, b)$ に複素数 $z = a + bi$ を対応せると
 この対応により、複素数全体と座標平面上の点とが 1対1に対応する。

点 (a, b) は複素数 $z = a + bi$ を表す.

このように、複素数を表す座標平面を「複素数平面」という。

まとめ1 $z = a + bi$ (a, b : 実数) について.

$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$

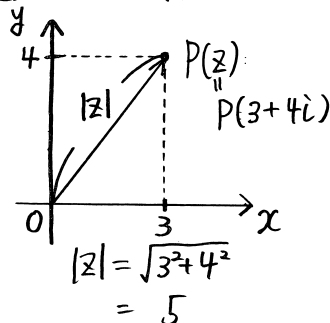
さらに、 $z = a + bi$ (a, b : 実数) について.

$$\begin{aligned} z\bar{z} &= (a + bi)(a - bi) \\ &= a^2 + b^2 = |z|^2 \end{aligned}$$

まとめ2

$|z|^2 = z\bar{z}$

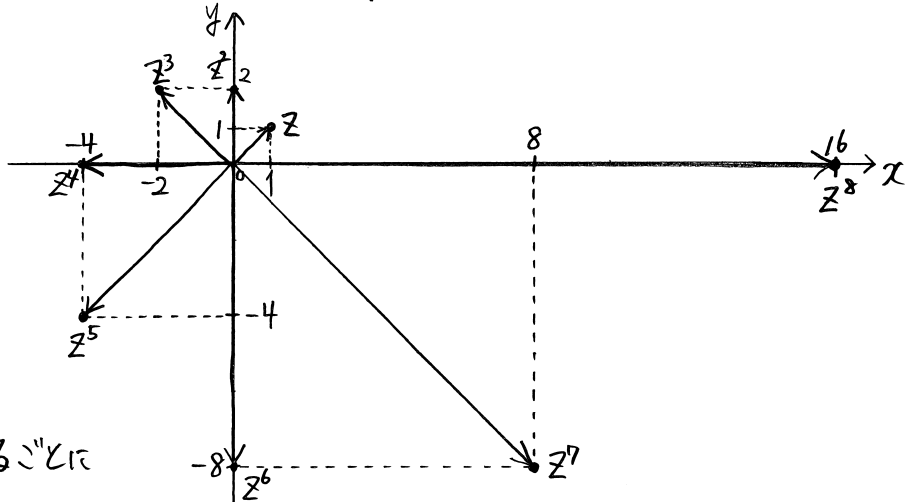
例 $z = 3 + 4i$



例3) $z = 1+i$ とする。 $z^2, z^3, z^4, z^5, z^6, z^7, z^8$ を計算し、 $z, z^2, z^3, \dots, z^8$ すべて、1つの複素数平面上に図示せよ。

解)

$$\begin{aligned} z^2 &= (1+i)^2 = 1+2i+i^2 = 2i \\ z^3 &= z^2 \times z = 2i(1+i) = -2+2i \\ z^4 &= (z^2)^2 = (2i)^2 = -4 \\ z^5 &= z^4 \times z = -4(1+i) = -4-4i \\ z^6 &= z^4 \times z^2 = -4 \times 2i = -8i \\ z^7 &= z^4 \times z^3 = -4(-2+2i) = 8-8i \\ z^8 &= (z^4)^2 = (-4)^2 = 16 \end{aligned}$$

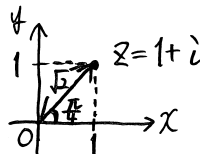


[考察]

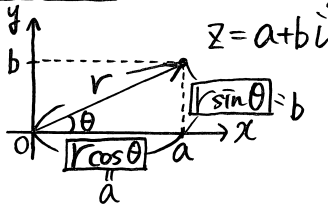
z をかけるごとに

{

という移動をする。



極形式



$$r \cos \theta + (r \sin \theta) i$$

$$r(\cos \theta + i \sin \theta)$$

z の「極形式」

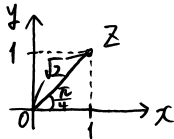
$$\begin{cases} r = |z| \\ \theta = \arg z \end{cases}$$

z の偏角

$$\theta + 2n\pi (n: \text{整数})$$

$$\begin{cases} a = r \cos \theta \\ b = r \sin \theta \end{cases}$$

先ほどの $z = 1+i$ について、



$$z = \sqrt{2} \left(\underbrace{\cos \frac{\pi}{4}}_{\frac{1}{\sqrt{2}}} + i \underbrace{\sin \frac{\pi}{4}}_{\frac{1}{\sqrt{2}}} \right)$$

2つの複素数

$$\begin{cases} z_1 = r_1(\cos \theta_1 + i \sin \theta_1) & (r_1 > 0, 0 \leq \theta_1 < 2\pi) \\ z_2 = r_2(\cos \theta_2 + i \sin \theta_2) & (r_2 > 0, 0 \leq \theta_2 < 2\pi) \end{cases}$$

について

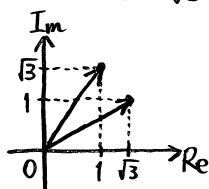
$$z_1 \times z_2 = r_1(\cos \theta_1 + i \sin \theta_1) \times r_2(\cos \theta_2 + i \sin \theta_2)$$

$$= r_1 r_2 \{ \cos \theta_1 \cos \theta_2 - \sin \theta_1 \sin \theta_2 + i (\sin \theta_1 \cos \theta_2 + \cos \theta_1 \sin \theta_2) \}$$

$$= \frac{|z_1 z_2|}{r_1 r_2} \{ \cos(\theta_1 + \theta_2) + i \sin(\theta_1 + \theta_2) \}$$

$\swarrow \quad \searrow$
 $\arg(z_1 z_2)$

(例) $\begin{cases} z_1 = 1 + \sqrt{3}i \\ z_2 = \sqrt{3} + i \end{cases}$ について $\begin{cases} z_1 = 2(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3}) \\ z_2 = 2(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6}) \end{cases}$



$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= 2 \times 2 \{ \cos(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{6}) + i \sin(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{6}) \} \\ &= 4(\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2}) \\ &= 4i \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{また、} z_1 z_2 &= (1 + \sqrt{3}i)(\sqrt{3} + i) \\ &= \sqrt{3} + i + 3i + \sqrt{3}i^2 = 4i \end{aligned}$$

$x^2 + x + 1 = 0$ の2つの解 $w_1 = \frac{-1 + \sqrt{3}i}{2}$, $w_2 = \frac{-1 - \sqrt{3}i}{2}$ について

$w_1^2 = w_2$, $w_2^2 = w_1$ となるのは何故?

$$\begin{aligned} w_1 &= -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \\ &= \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} w_2 &= -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i \\ &= \end{aligned}$$

$$w_1^2 = (\quad)^2$$

$$= \cos \frac{4}{3}\pi + i \sin \frac{4}{3}\pi$$

$$= w_2$$

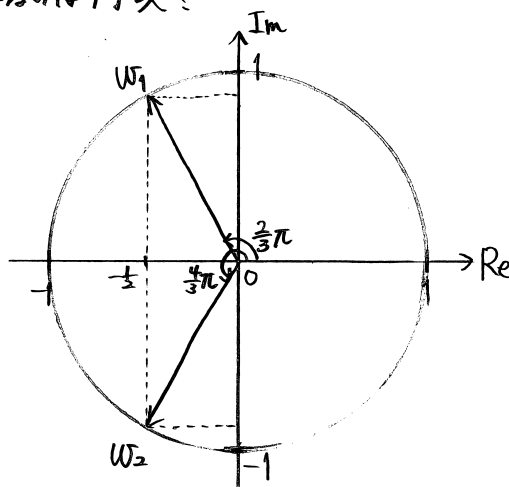
$$w_2^2 = (\quad)^2$$

$$= \cos \frac{8}{3}\pi + i \sin \frac{8}{3}\pi$$

$$= \cos(\frac{8}{3}\pi + 2\pi) + i \sin(\frac{8}{3}\pi + 2\pi)$$

$$= \cos \frac{2}{3}\pi + i \sin \frac{2}{3}\pi$$

$$= w_1$$



1. 極形式

(2) 定着させよう! (4項目)

(2.1) $|z|^2 = z\bar{z}$

(例) 複素数 α が $|\alpha| = 1$ を満たすとき

0でない複素数 β, r に対して

$$|\alpha\bar{\beta} + r| = |\alpha r + \beta|$$

が成り立つことを示せ。

$$\begin{cases} \overline{\alpha \pm \beta} = \bar{\alpha} \pm \bar{\beta} \\ \overline{\frac{\alpha}{\beta}} = \frac{\bar{\alpha}}{\bar{\beta}} \\ \overline{\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)} = \frac{\bar{\alpha}}{\bar{\beta}} \end{cases}$$

証明 $|\alpha\bar{\beta} + r|^2 = |\alpha r + \beta|^2$ を示す。

$$\begin{aligned} |\alpha\bar{\beta} + r|^2 &= (\alpha\bar{\beta} + r)(\overline{\alpha\bar{\beta} + r}) \\ &= (\alpha\bar{\beta} + r)(\bar{\alpha}\beta + \bar{r}) \\ &= (\alpha\bar{\beta} + r)(\bar{\alpha}\beta + \bar{r}) \\ &= \alpha\bar{\alpha}\beta\bar{\beta} + \alpha\bar{\beta}\bar{r} + \bar{\alpha}\beta r + r\bar{r} \\ &= |\beta|^2 + |r|^2 + \alpha\bar{\beta}\bar{r} + \bar{\alpha}\beta r \quad \dots ① \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{また } |\alpha r + \beta|^2 &= (\alpha r + \beta)(\overline{\alpha r + \beta}) \\ &= (\alpha r + \beta)(\bar{\alpha}\bar{r} + \bar{\beta}) \\ &= \alpha\bar{\alpha}r\bar{r} + \alpha\bar{\beta}\bar{r} + \bar{\alpha}\beta\bar{r} + \beta\bar{\beta} \\ &= |\beta|^2 + |r|^2 + \alpha\bar{\beta}\bar{r} + \bar{\alpha}\beta r \quad \dots ② \end{aligned}$$

よって, $|\alpha\bar{\beta} + r|^2 = |\alpha r + \beta|^2$ により,
 $|\alpha\bar{\beta} + r| = |\alpha r + \beta|$ ■

(2.2) 大きさをかけて...

$$\begin{cases} z_1 = r_1(\cos \theta_1 + i \sin \theta_1) \\ z_2 = r_2(\cos \theta_2 + i \sin \theta_2) \end{cases} \quad \text{ただし } (z_1 \neq 0, z_2 \neq 0)$$

$$\begin{aligned} z_1 \times z_2 &= r_1 r_2 (\cos \theta_1 + i \sin \theta_1)(\cos \theta_2 + i \sin \theta_2) \\ &= r_1 r_2 \{ \cos \theta_1 \cos \theta_2 - \sin \theta_1 \sin \theta_2 + i(\sin \theta_1 \cos \theta_2 + \cos \theta_1 \sin \theta_2) \} \\ &= r_1 r_2 \{ \cos(\theta_1 + \theta_2) + i \sin(\theta_1 + \theta_2) \} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{z_1}{z_2} &= \frac{r_1 (\cos \theta_1 + i \sin \theta_1)}{r_2 (\cos \theta_2 + i \sin \theta_2)} \\
 &= \frac{r_1 (\cos \theta_1 + i \sin \theta_1) (\cos \theta_2 - i \sin \theta_2)}{r_2 (\cos \theta_2 + i \sin \theta_2) (\cos \theta_2 - i \sin \theta_2)} \\
 &= \frac{r_1}{r_2} \{ \cos \theta_1 \cos \theta_2 + \sin \theta_1 \sin \theta_2 + i (\sin \theta_1 \cos \theta_2 - \cos \theta_1 \sin \theta_2) \} \\
 &= \frac{r_1}{r_2} \{ \cos (\theta_1 - \theta_2) + i \sin (\theta_1 - \theta_2) \}
 \end{aligned}$$



$$\begin{cases} |z_1 z_2| = |z_1| |z_2|, \arg(z_1 z_2) = \arg z_1 + \arg z_2 \\ \left| \frac{z_1}{z_2} \right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}, \arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \arg z_1 - \arg z_2. \end{cases}$$

例) $z_1 = i, z_2 = 1 + \sqrt{3}i$ について, $z_1 z_2, \frac{z_1}{z_2}$ を求める。

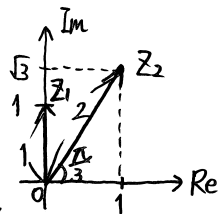
解) $z_1 = \cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2}$
 $z_2 = 2 \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right)$

$$\begin{aligned}
 z_1 z_2 &= 1 \times 2 \left\{ \cos \left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{3} \right) + i \sin \left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{3} \right) \right\} \\
 &= 2 \left(\cos \frac{5}{6} \pi + i \sin \frac{5}{6} \pi \right) = -\sqrt{3} + i //
 \end{aligned}$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{1 \cdot \left(\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2} \right)}{2 \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right)}$$

$$= \frac{1}{2} \left\{ \cos \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3} \right) + i \sin \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3} \right) \right\}$$

$$= \frac{1}{2} \left(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} \right) = \frac{\sqrt{3} + i}{4} //$$



(3.3) ド・モアブルの定理

整数 n に対して.

$$(\cos \theta + i \sin \theta)^n = \cos n\theta + i \sin n\theta$$

例)

$$(1) \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \right)^{30} = \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right)^{30}$$

$$= \cos \left(\frac{\pi}{3} \times 30 \right) + i \sin \left(\frac{\pi}{3} \times 30 \right)$$

$$= \cos 10\pi + i \sin 10\pi$$

$$= \cos(2\pi \times 5) + i \sin(2\pi \times 5)$$

$$= \cos 0 + i \sin 0$$

$$= 1 //$$

$$\begin{aligned}
 (2) \left(\frac{5-i}{2-3i} \right)^{10} &= \left\{ \frac{(5-i)(2+3i)}{(2-3i)(2+3i)} \right\}^{10} \\
 &= \left(\frac{13+13i}{13} \right)^{10} \\
 &= (1+i)^{10} \\
 &= \left\{ \sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right) \right\}^{10} \\
 &= (\sqrt{2})^{10} \left\{ \cos \left(\frac{\pi}{4} \times 10 \right) + i \sin \left(\frac{\pi}{4} \times 10 \right) \right\} \\
 &= 2^5 \left(\cos \frac{5\pi}{2} + i \sin \frac{5\pi}{2} \right) \\
 &= 32 \left(\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2} \right) = 32i //
 \end{aligned}$$

(2a4) 方程式を解く!

(例) 方程式 $z^2 = -1 + \sqrt{3}i$ を解け。

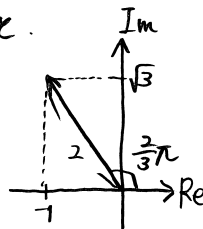
解) $z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$ ($r > 0, 0 \leq \theta < 2\pi$) とおくと。

$$z^2 = r^2 (\cos 2\theta + i \sin 2\theta) = \frac{-1 + \sqrt{3}i}{2 \left(\cos \frac{2}{3}\pi + i \sin \frac{2}{3}\pi \right)}$$

$$\therefore r^2 = 2 \quad \text{かつ} \quad 2\theta = \frac{2}{3}\pi, \frac{8}{3}\pi$$

$$r = \sqrt{2} \quad \text{かつ} \quad \theta = \frac{\pi}{3}, \frac{4}{3}\pi$$

$$\begin{aligned}
 \text{したがって、} z &= \begin{cases} \sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right) \\ \sqrt{2} \left(\cos \frac{4}{3}\pi + i \sin \frac{4}{3}\pi \right) \end{cases} \\
 &= \begin{cases} \sqrt{2} \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \right) \\ \sqrt{2} \left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i \right) \end{cases} = \begin{cases} \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}i}{2} \\ -\frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}i}{2} \end{cases} //
 \end{aligned}$$



1. 極形式

(3) 5次にもいこう!!

例 $x^5 = 1$ を解く。 (1の5乗根を求める)
5次方程式

$x = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ とおく。 ($r > 0$ かつ $0 \leq \theta < 2\pi$)

$x^5 = 1$ に代入して

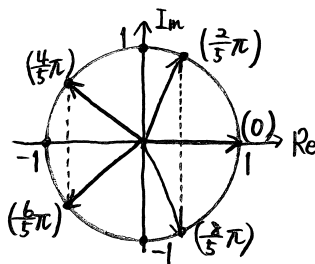
$$\{r(\cos\theta + i\sin\theta)\}^5 = 1$$

$$\therefore r^5(\cos 5\theta + i\sin 5\theta) = 1 \cdot (\cos 0 + i\sin 0)$$

したがって、 $r^5 = 1$ かつ $5\theta = 0, 2\pi, 4\pi, 6\pi, 8\pi$

$$\therefore r = 1 \text{ かつ } \theta = 0, \frac{2}{5}\pi, \frac{4}{5}\pi, \frac{6}{5}\pi, \frac{8}{5}\pi$$

$$\text{よって、 } x = \begin{cases} \cos 0 + i\sin 0 \\ \cos \frac{2}{5}\pi + i\sin \frac{2}{5}\pi \\ \cos \frac{4}{5}\pi + i\sin \frac{4}{5}\pi \\ \cos \frac{6}{5}\pi + i\sin \frac{6}{5}\pi \\ \cos \frac{8}{5}\pi + i\sin \frac{8}{5}\pi \end{cases}$$



$\cos \frac{2}{5}\pi$ の値を求める!
($\cos 72^\circ$)

準備 $|z| = 1$ かつ $z + \frac{1}{z} = ?$

$$z = \cos\theta + i\sin\theta \text{ とおく。}$$

$$\begin{aligned} z + \frac{1}{z} &= \cos\theta + i\sin\theta + \frac{\cos\theta + i\sin\theta}{\cos\theta + i\sin\theta} \\ &= \cos\theta + i\sin\theta + \cos(-\theta) + i\sin(-\theta) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= 2\cos\theta \\ &= 2\cos(\arg z) \end{aligned}$$

$$|z| = 1 \text{ かつ } z + \frac{1}{z} = 2\cos(\arg z)$$

$x^5 = 1$ の解のうち

$$z = \cos \frac{2}{5}\pi + i\sin \frac{2}{5}\pi \text{ について。}$$

$$x^5 = 1 \text{ に代入して } z^5 = 1$$

$$\therefore z^5 - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow (z-1)(z^4 + z^3 + z^2 + z + 1) = 0$$

$$z \neq 1 \text{ なのだから } z^4 + z^3 + z^2 + z + 1 = 0$$

$z \neq 0$ なのだから両辺を z で割る。

$$z^3 + z^2 + z + 1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} = 0$$

$$\Leftrightarrow z^3 + \frac{1}{z} + z^2 + \frac{1}{z^2} + 1 = 0$$

$$(z + \frac{1}{z})^2 + (z + \frac{1}{z}) - 1 = 0$$

$$\therefore z + \frac{1}{z} = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2} \dots ①$$

一方、 $|z| = 1$ なのだから

$$z + \frac{1}{z} = 2\cos \frac{2}{5}\pi \dots ②$$

$$\text{①②より、 } 2\cos \frac{2}{5}\pi = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}$$

$$\therefore \cos \frac{2}{5}\pi = \frac{-1 + \sqrt{5}}{4}$$

ただし、 $\cos \frac{2}{5}\pi > 0$ より $\cos \frac{2}{5}\pi = \frac{-1+\sqrt{5}}{4}$ //

$$\begin{cases} \cos \frac{2}{5}\pi = \cos \frac{8}{5}\pi = \frac{-1+\sqrt{5}}{4} \\ \cos \frac{4}{5}\pi = \cos \frac{6}{5}\pi = \frac{-1-\sqrt{5}}{4} \end{cases}$$

1. 極形式

(4) 7次に挑戦!!

「 $x^7 = 1$ の解について考える」

④ $x^7 = 1$ を解く。

$x = r(\cos \theta + i \sin \theta)$ ($r > 0$ かつ $0 \leq \theta < 2\pi$) とおく。

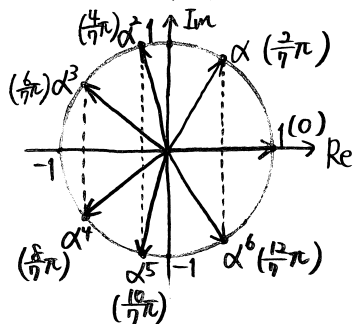
$$x^7 = \{r(\cos \theta + i \sin \theta)\}^7$$

$$= r^7(\cos 7\theta + i \sin 7\theta) = 1 \cdot (\cos 0 + i \sin 0)$$

よって、 $r^7 = 1$ かつ $7\theta = 0, 2\pi, 4\pi, 6\pi, 8\pi, 10\pi, 12\pi$

$\therefore r = 1$ かつ $\theta = 0, \frac{2}{7}\pi, \frac{4}{7}\pi, \frac{6}{7}\pi, \frac{8}{7}\pi, \frac{10}{7}\pi, \frac{12}{7}\pi$
 したがって、

$$x = \begin{cases} \cos 0 + i \sin 0 \\ \cos \frac{2}{7}\pi + i \sin \frac{2}{7}\pi \\ \cos \frac{4}{7}\pi + i \sin \frac{4}{7}\pi \\ \cos \frac{6}{7}\pi + i \sin \frac{6}{7}\pi \\ \cos \frac{8}{7}\pi + i \sin \frac{8}{7}\pi \\ \cos \frac{10}{7}\pi + i \sin \frac{10}{7}\pi \\ \cos \frac{12}{7}\pi + i \sin \frac{12}{7}\pi \end{cases}$$



⑤ $\theta = \frac{2}{7}\pi$, $\alpha = \cos \theta + i \sin \theta$, $\beta = \alpha + \alpha^2 + \alpha^4$ とおく。

(1) $\bar{\alpha} = \alpha^6$ を示す。

(2) $\beta + \bar{\beta}$, $\beta \bar{\beta}$ を求めよ。

(3) $\sin \theta + \sin 2\theta + \sin 4\theta$ を求めよ。

解)

$$\begin{aligned} (1) \bar{\alpha} &= \cos \theta - i \sin \theta \\ &= \cos(-\theta) + i \sin(-\theta) \\ &= \cos(2\pi - \underbrace{\theta}_{\frac{2}{7}\pi}) + i \sin(2\pi - \underbrace{\theta}_{\frac{2}{7}\pi}) \\ &= \cos \frac{12}{7}\pi + i \sin \frac{12}{7}\pi \\ &= \cos 6\theta + i \sin 6\theta \\ &= \frac{(\cos \theta + i \sin \theta)^6}{\alpha} \\ &= \alpha^6 \quad \blacksquare \end{aligned}$$

$$(2) \alpha^7 = 1 \dots \textcircled{1} \text{ 并 } \alpha^2 - 1 = 0$$

$$\therefore (\alpha - 1)(\alpha^6 + \alpha^5 + \alpha^4 + \alpha^3 + \alpha^2 + \alpha + 1) = 0$$

$$\alpha \neq 1 \text{ 并 } \alpha^6 + \alpha^5 + \alpha^4 + \alpha^3 + \alpha^2 + \alpha + 1 = 0 \dots \textcircled{2}$$

また、

$$\beta + \bar{\beta} = \alpha + \alpha^2 + \alpha^4 + \overline{\alpha + \alpha^2 + \alpha^4} \rightarrow \overline{\alpha \times \alpha} = \bar{\alpha} \times \bar{\alpha} = (\bar{\alpha})^2$$

$$= \alpha + \alpha^2 + \alpha^4 + \bar{\alpha} + \underbrace{(\bar{\alpha}^2)}_{\alpha^5} + \underbrace{(\bar{\alpha}^4)}_{\alpha^3} \rightarrow \overline{\alpha \times \alpha \times \alpha \times \alpha} = (\bar{\alpha})^4$$

$$= \alpha + \alpha^2 + \alpha^4 + \alpha^6 + (\alpha^6)^2 + (\alpha^6)^4 \quad (\textcircled{1} \text{ 并 })$$

$$= \alpha + \alpha^2 + \alpha^4 + \alpha^6 + \alpha^5 + \alpha^3 \quad (\textcircled{1} \text{ 并 })$$

$$= \alpha + \alpha^2 + \alpha^3 + \alpha^4 + \alpha^5 + \alpha^6 = -1 \quad \text{〃} \quad (\textcircled{2} \text{ 并 })$$

$$\text{また、} \beta \bar{\beta} = (\alpha + \alpha^2 + \alpha^4)(\alpha^6 + \alpha^5 + \alpha^3)$$

$$= \alpha(1 + \alpha + \alpha^3) \times \alpha^3(1 + \alpha^2 + \alpha^3)$$

$$= \alpha^4(1 + \alpha + \alpha^3 + \alpha^2 + \alpha^3 + \alpha^5 + \alpha^3 + \alpha^4 + \alpha^6)$$

$$= \alpha^4 \times 2\alpha^3 \quad (\textcircled{2} \text{ 并 })$$

$$= 2\alpha^7$$

$$= 2 \quad \text{〃} \quad (\textcircled{1} \text{ 并 })$$

(3) β と $\bar{\beta}$ を解にもつ 2次方程式は

$$(x - \beta)(x - \bar{\beta}) = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 - (\beta + \bar{\beta})x + \beta\bar{\beta} = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 + x + 2 = 0$$

$$\text{これを解くと } x = \frac{-1 \pm \sqrt{1-8}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{7}i}{2} = \underbrace{-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{7}}{2}i}_{\beta?} , \underbrace{-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{7}}{2}i}_{\bar{\beta} ?}$$

$$\therefore \sin \theta + \sin 2\theta + \sin 4\theta$$

$$= \sin \frac{2\pi}{7} + 2 \sin \frac{3\pi}{7} \cos \frac{\pi}{7} \quad \begin{matrix} \nearrow \sin A + \sin B \\ 2 \sin \frac{A+B}{2} \cos \frac{A-B}{2} \end{matrix}$$

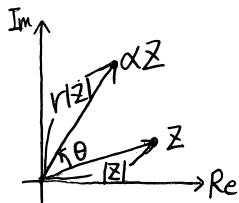
$$\text{したがって、} \sin \theta + \sin 2\theta + \sin 4\theta = \frac{\sqrt{7}}{2} \quad \text{〃}$$

2. 三角形

原点を含む ($\triangle OAB$)
 原点を含まない ($\triangle ABC$)

(1) 原点を含む ($\triangle OAB$)

準備 (回転・相似変換)



$\alpha = r(\cos \theta + i \sin \theta)$ とする。 ($r > 0$)
 複素数 z に対して、 αz の表す点は

である。

例) 0 を原点とする複素数平面上の点 A, B を表す複素数をそれぞれ α, β とし、 α, β が次の条件をみたすとき、三角形 OAB はどのような三角形か。

$$\alpha^2 - 2\alpha\beta + 2\beta^2 = 0$$

解) $\triangle OAB$ が存在するには $\alpha \neq 0$ か $\beta \neq 0$
 このもとで、 $\alpha^2 - 2\alpha\beta + 2\beta^2 = 0$ について。

両辺を $\alpha^2 (\neq 0)$ でわると。

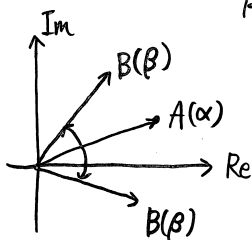
$$1 - 2 \times \frac{\beta}{\alpha} + 2 \left(\frac{\beta}{\alpha} \right)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow 2 \times \left(\frac{\beta}{\alpha} \right)^2 - 2 \times \frac{\beta}{\alpha} + 1 = 0$$

$$\frac{\beta}{\alpha} = \frac{1 \pm i}{2}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \{ \cos(\pm \frac{\pi}{4}) + i \sin(\pm \frac{\pi}{4}) \}$$

$$\beta = \frac{1}{\sqrt{2}} \{ \cos(\pm \frac{\pi}{4}) + i \sin(\pm \frac{\pi}{4}) \} \alpha$$



$\angle B = \frac{\pi}{2}$ の直角三角形 //

2. 三角形

原点を含む ($\triangle OAB$)

原点を含まない ($\triangle ABC$)

(2) 原点を含まない ($\triangle ABC$)

準備 (2つ)

① 点 $A(\alpha)$ のまわりの回転

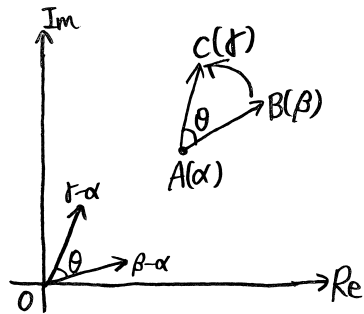
点 $A(\alpha)$ を中心に $B(\beta)$ を

θ だけ回転した点を $C(r)$ とすると

$$\vec{AC} = \frac{r-\alpha}{\beta-\alpha} = (\cos \theta + i \sin \theta) \frac{\beta-\alpha}{\beta-\alpha} = \vec{AB}$$

$$\frac{r-\alpha}{\beta-\alpha} = \cos \theta + i \sin \theta$$

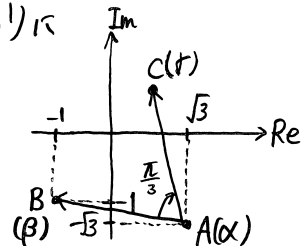
$$\arg \left(\frac{r-\alpha}{\beta-\alpha} \right) = \theta$$



例1 複素数平面内で $B(-1-i)$ を $A(\sqrt{3}-\sqrt{3}i)$ のまわりに $-\pi/3$ 回転させた点 $C(r)$ について、 r を求めよ。

解) $\alpha = \sqrt{3}-\sqrt{3}i$, $\beta = -1-i$ とする。

$$r-\alpha = \left\{ \cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i \sin\left(-\frac{\pi}{3}\right) \right\} (\beta-\alpha)$$



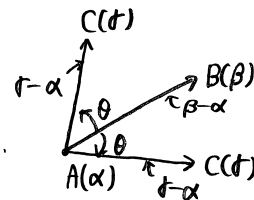
$$\begin{aligned} r &= \alpha + \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i \right) (\beta - \alpha) \\ &= \sqrt{3} - \sqrt{3}i + \frac{1}{2}(1 - \sqrt{3}i) \{-1 - i - (\sqrt{3} - \sqrt{3}i)\} \\ &= \sqrt{3} - \sqrt{3}i - \frac{1}{2}(1 - \sqrt{3}i) \{1 + \sqrt{3} + (1 - \sqrt{3})i\} \\ &= \sqrt{3} - \sqrt{3}i - \frac{1}{2} \{1 + \sqrt{3} + (1 - \sqrt{3})i - \sqrt{3}(1 + \sqrt{3})i + \sqrt{3}(1 - \sqrt{3})\} \\ &= \sqrt{3} - \sqrt{3}i + \{(1 - \sqrt{3}) + (\sqrt{3} + 1)i\} \\ &= 1 + i \end{aligned}$$

② 2直線のなす角

$A(\alpha)$, $B(\beta)$, $C(r)$ を異なる3点とすると

線分 AB から AC へ測った角は

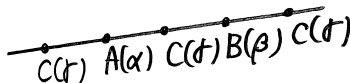
$$\theta = \arg \left(\frac{r-\alpha}{\beta-\alpha} \right)$$



(i) 3点 A, B, C が同一直線上にあるとき

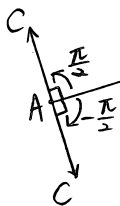


$$\arg \left(\frac{r-\alpha}{\beta-\alpha} \right) = 0 \text{ or } \pi$$



$$\frac{r-\alpha}{\beta-\alpha} = \begin{cases} r(\cos 0 + i \sin 0) = r \\ r(\cos \pi + i \sin \pi) = -r \end{cases}$$

(ii) $\angle BAC = \frac{\pi}{2}$ のとき



$$\arg\left(\frac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}\right) = \pm \frac{\pi}{2}$$

$$\frac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha} = \begin{cases} r(\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2}) = ri \\ r\{\cos(-\frac{\pi}{2}) + i \sin(-\frac{\pi}{2})\} = -ri \end{cases}$$

例2 複素数平面上に3点 $A(3+2i)$, $B(-4i)$, $C(7+\lambda i)$ がある。

次の条件を満たすように、実数 λ の値を定めよ。

(1) 3点 A, B, C が同じ直線上にある。

(2) $AB \perp AC$

解) $\alpha = 3+2i$, $\beta = -4i$, $\gamma = 7+\lambda i$ とおくと

$$\begin{aligned} \frac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha} &= \frac{7+\lambda i - (3+2i)}{-4i - (3+2i)} \\ &= \frac{4+(\lambda-2)i}{-3-6i} \\ &= \frac{\{4+(\lambda-2)i\}(1-2i)}{-3(1+2i)(1-2i)} \end{aligned} \quad \begin{aligned} &= \frac{4+(\lambda-2)i-8i+2(\lambda-2)}{-3 \times 5} \\ &= -\frac{1}{15} \{2\lambda + (\lambda-10)i\} \end{aligned}$$

(1) $\frac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}$ が実数な λ として、 $\lambda = 10$ //

(2) $\frac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}$ が純虚数な λ として、 $\lambda = 0$ //

例3 異なる3つの複素数 α, β, γ の間に

$$(1+i)\gamma + 2\beta = (3+i)\alpha$$

の関係がある。

(1) $\frac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}$ を極形式で表せ

(2) 3点 $A(\alpha)$, $B(\beta)$, $C(\gamma)$ を頂点とする三角形はどんな形の三角形か。

解)

$$(1) (1+i)\gamma + 2\beta = (3+i)\alpha \quad \text{より}$$

$$(1+i)\gamma + 2\beta = (1+i)\alpha + 2\alpha$$

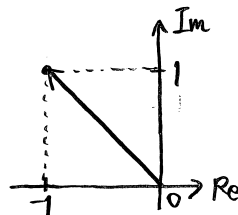
$$\Leftrightarrow (1+i)(\gamma-\alpha) = -2(\beta-\alpha)$$

$$\Leftrightarrow \frac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha} = \frac{-2}{1+i}$$

$$= \frac{-2(1-i)}{(1+i)(1-i)}$$

$$= -1+i$$

$$= \sqrt{2}(\cos \frac{3}{4}\pi + i \sin \frac{3}{4}\pi)$$



(2) (1)の結果から

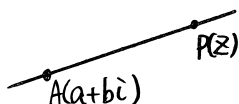
$$\frac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha} = \sqrt{2}(\cos \frac{3}{4}\pi + i \sin \frac{3}{4}\pi) \quad \begin{matrix} \xrightarrow{\vec{AC}} \\ \xrightarrow{\vec{AB}} \end{matrix}$$

$\angle A = \frac{3}{4}\pi$, $AB=AC=1=\sqrt{2}$ の鈍角三角形 //

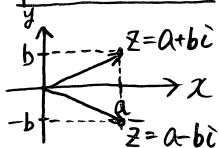
3. 図形と方程式

(1) 直線の方程式

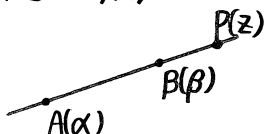
〈通る1点と傾き〉



z が実数 a とき
 $z = \bar{z}$



〈通る2点〉



$$\frac{z-\alpha}{\beta-\alpha} = t \text{ (実数)}$$

$$z-\alpha = (\beta-\alpha)t$$

$$z = \alpha + (\beta-\alpha)t$$

異なる2点 $A(\alpha)$, $B(\beta)$ を通る
直線上の点 $P(z)$ について

$$z = \alpha + (\beta-\alpha)t \quad (t: \text{実数})$$

③ $\frac{z-\alpha}{\beta-\alpha} = t \text{ (実数)}$ から

$$\frac{z-\alpha}{\beta-\alpha} = \frac{\overline{z-\alpha}}{\overline{\beta-\alpha}}$$

$$= \frac{\overline{z}-\bar{\alpha}}{\bar{\beta}-\bar{\alpha}}$$

$$\therefore (\bar{\beta}-\bar{\alpha})(z-\alpha) = (\beta-\alpha)(\overline{z}-\bar{\alpha})$$

$$\Leftrightarrow (\bar{\beta}-\bar{\alpha})z - (\beta-\alpha)\bar{z} = C \text{ (実数)}$$

④ 例) 原点 O と異なる点 $A(\alpha)$ に対し、
点 A を通り、線分 OA と垂直な直線上の点 $P(z)$ は

$$\frac{z-\alpha}{\alpha-0} + \frac{\overline{z-\alpha}}{\overline{\alpha-0}} = 0$$

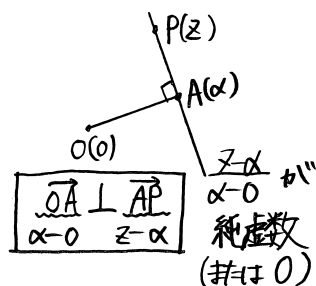
$$\Leftrightarrow \frac{z-\alpha}{\alpha} + \frac{\overline{z}-\bar{\alpha}}{\bar{\alpha}} = 0$$

$$\Leftrightarrow \bar{\alpha}(z-\alpha) + \alpha(\overline{z}-\bar{\alpha}) = 0$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\bar{\alpha}z + \alpha\bar{z} = 2\alpha\bar{\alpha}}$$

z が純虚数のとき

$$\boxed{z + \bar{z} = 0 \quad (z \neq 0)}$$



3. 図形と方程式

(2) 円の方程式

準備 (2点間の長さ)

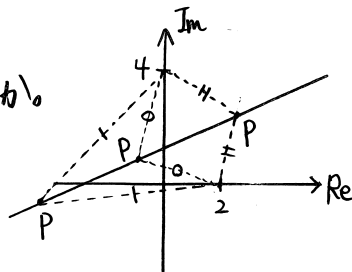
$$|z_1 - z_2| \rightarrow B(z_2)$$

$A(z_1)$

例 次の等式を満たす点 $P(z)$ はどのような図形を描くか。

$$\frac{|z-2|}{z \text{ と } 2 \text{ の長さ}} = \frac{|z-4i|}{z \text{ と } 4i \text{ の長さ}}$$

解 点 $P(z)$ は、2 と $4i$ の垂直二等分線を描く。



補 $|z-2|^2 = |z-4i|^2$ より

$$(z-2)(\bar{z}-2) = (z-4i)(\bar{z}-4i)$$

$$\Leftrightarrow (z-2)(\bar{z}-2) = (z-4i)(\bar{z}+4i)$$

$$\Leftrightarrow z\bar{z} - 2z - 2\bar{z} + 4 = z\bar{z} + 4i\bar{z} - 4i\bar{z} + 16$$

$$\Leftrightarrow (1+2i)z + (1-2i)\bar{z} = -6$$

$z = x + yi$ (x, y は実数) とすると

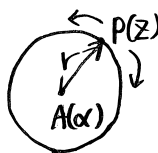
$$(1+2i)(x+yi) + (1-2i)(x-yi) = -6$$

$$\Leftrightarrow 2x - 4y = -6$$

$$\Leftrightarrow y = \frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$$

中心 $A(\alpha)$ 、半径 r の円の方程式は

$$|z - \alpha| = r$$



例 次の等式を満たす点 $P(z)$ はどのような図形を描くか。

(1) $|z+3-2i| = 4$

(2) $z\bar{z} + i\bar{z} - i\bar{z} = 3$

(3) $|z+2| = 2|z-1|$

解 (1) $|z - (-3+2i)| = 4$ 中心 $-3+2i$ 、半径 4 の円、

(2) $z\bar{z} + i\bar{z} - i\bar{z} = 3$

$$\Leftrightarrow z(\bar{z}+i) - i\bar{z} = 3$$

$$\Leftrightarrow z(\bar{z}+i) - i(\bar{z}+i) + i^2 = 3$$

$$\Leftrightarrow (z-i)(\bar{z}+i) = 4$$

$$\Leftrightarrow (z-i)(\bar{z}-i) = 4$$

$$\Leftrightarrow (z-i)(\bar{z}-i) = 4$$

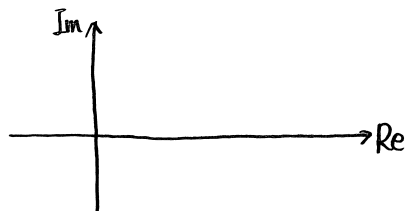
$$\Leftrightarrow |z-i|^2 = 4$$

$$\Leftrightarrow |z-i| = 2$$

中心 i 、半径 2 の円、

$$(3) |z+2| = 2|z-1|$$

$$\left\{ \begin{array}{l} |z+2| : |z-1| = 2:1 \\ \begin{array}{cc} z \neq -2 & z \neq 1 \\ \text{特異} & \text{特異} \end{array} \end{array} \right.$$



$$|z+2|^2 = 4|z-1|^2$$

$$\Leftrightarrow (z+2)(\overline{z+2}) = 4(z-1)(\overline{z-1})$$

$$\Leftrightarrow z\overline{z} + 2z + 2\overline{z} + 4 = 4(z\overline{z} - z - \overline{z} + 1)$$

$$\Leftrightarrow 3z\overline{z} - 6z - 6\overline{z} = 0$$

$$\Leftrightarrow z\overline{z} - 2z - 2\overline{z} = 0$$

$$\Leftrightarrow z(\overline{z}-2) - 2(\overline{z}-2) = 4$$

$$\Leftrightarrow (z-2)(\overline{z}-2) = 4$$

$$\begin{aligned} &\rightarrow (z-2)(\overline{z-2}) = 4 \\ &\Leftrightarrow |z-2|^2 = 4 \\ &\Leftrightarrow |z-2| = 2 \end{aligned}$$

中心 2, 半径 2 の円 //

異なる 2 点 $A(\alpha)$, $B(\beta)$ からの距離の比が $m:n$ である点 $P(z)$ の軌跡
($m>0, n>0$)

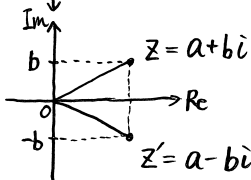
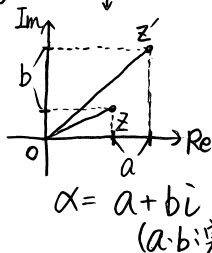
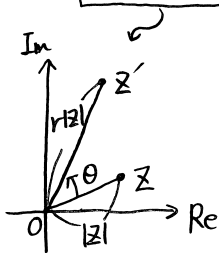
$m=n$ のとき 線分 AB の垂直二等分線

$m \neq n$ のとき (アポロニウスの) 円 $\swarrow$ AB を $m:n$ に内分する点と
外分する点を直径の両端とする円

4. 図形的应用

(1) 図形の移動

〈基本編〉回転・相似・平行移動・折り返し(実軸)



$$z = r(\cos \theta + i \sin \theta) \quad (r > 0)$$

とすると、 $z' = \overline{z}$ の表す点は

点 z を $\begin{cases} 0 \text{ を中心に } \theta \text{ 回転} \\ \text{絶対値を } r \text{ 倍} \end{cases}$ した点。

例1 複素数 z が等式 $|z - i| = 1$ を満たすとき、

$w = 2i(z + 1)$ の偏角 θ のとりうる範囲を求めよ。 ($0 \leq \theta < 2\pi$ とする)

解

$$z_1 = z + 1, \quad z_2 = 2iz_1 \text{ とすると}$$

$$w = \overline{z_2} \text{ である。}$$

z_1 は 中心 $1 + i$, 半径 1 の円をえがく。

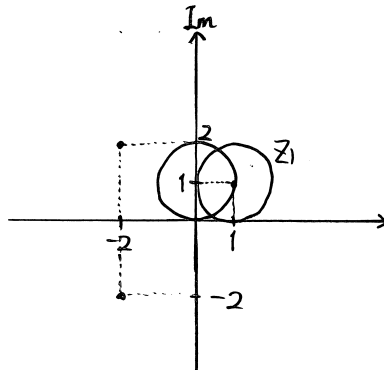
$$\text{また, } z_2 = 2iz_1$$

$$= 2(\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2}) z_1 \text{ により}$$

中心 $-2 + 2i$, 半径 2 の円をえがく。

w は 中心 $-2 - 2i$, 半径 2 の円をえがくので

$$\pi \leq \theta \leq \frac{3}{2}\pi //$$



例2 複素数平面において複素数 z が表す点 P が

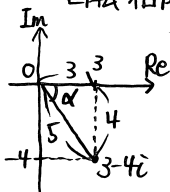
点 $2i$ を中心とする半径 1 の円をえがくとき

$w = (3 - 4i)z + 1$ をみたす複素数 w が表す

点 Q はどんな図形をえがくか。

解1)

回転・相似・平行移動で。



$$\cos \alpha = \frac{3}{5}, \quad \sin \alpha = \frac{4}{5} \quad (0 < \alpha < \frac{\pi}{2})$$

とすると、

$$z = (3 - 4i)z \text{ とすれば}$$

z の表す点は点 P は

$\begin{cases} 0 \text{ を中心に } -\alpha \text{ 回転} \\ \text{絶対値を } 5 \text{ 倍} \end{cases}$

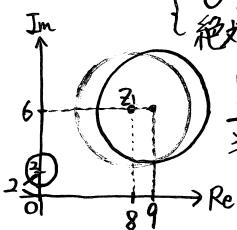
した点。つまり、中心が

$$2i(3 - 4i) = 8 + 6i$$

半径 5 の円をえがく。

したがって、点 Q は

中心 $9 + 6i$, 半径 5 の円をえがく。



解2)

動点の軌跡で。

題意より、 $|z - 2i| = 1 \dots ①$

こゝで $w = (3 - 4i)z + 1 \dots ②$

$$(3 - 4i)z = w - 1 \quad \therefore z = \frac{w - 1}{3 - 4i}$$

これを ① に代入。

$$\left| \frac{w - 1}{3 - 4i} - 2i \right| = 1$$

$$\Leftrightarrow \left| \frac{w - 1 - 2i(3 - 4i)}{3 - 4i} \right| = 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{|w - 9 - 6i|}{|3 - 4i|} = 1$$

$$\Leftrightarrow |w - (9 + 6i)| = 5$$

4. 図形の応用

(1) 図形の移動

<応用編> 折り返し・反転

直線 OA に関して

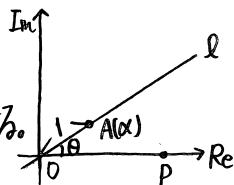
① 折り返し (直線に関する対称移動)

直線 OA について、 $A(\alpha)$ とし、

$$|\alpha| = 1 \text{ とする。}$$

また、 x 軸の正の部分に

ある点 P に対し、 $\angle AOP = \theta$ とする。



l と z を原点まわり

$(-\theta)$ 回転すると、

l は x 軸に、 z は z_1 に移る。

$$z_1 = z \times \left[\underbrace{\cos(-\theta)}_{\cos \theta} + i \underbrace{\sin(-\theta)}_{-\sin \theta} \right]$$

$$= z(\cos \theta - i \sin \theta)$$

$$\therefore \bar{z}_1 = \overline{z(\cos \theta - i \sin \theta)}$$

$$= \bar{z}(\cos \theta + i \sin \theta)$$

$$= \bar{z}(\cos \theta + i \sin \theta)$$

z' は $\bar{z}_1$ を原点のまわりに θ 回転した点なので

$$\begin{aligned} z' &= \bar{z}_1 (\cos \theta + i \sin \theta) \\ &= \bar{z} (\cos \theta + i \sin \theta)^2 \\ &= \alpha^2 \bar{z} \end{aligned}$$

$$\boxed{z' = \alpha^2 \bar{z}}$$

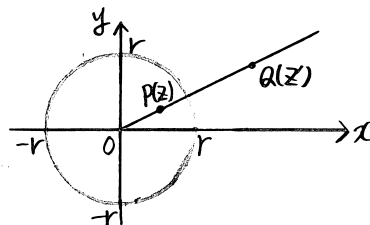
② 反転

O と異なる点 $P(z)$ に対し

半直線 OP 上の点 $Q(z')$ が

$$OP \cdot OQ = r^2 \quad (r > 0)$$

をみたすとき、点 P から点 Q への変換を
中心 O 、半径 r の円に関する「反転」という。



まず、 $OP \cdot OQ = r^2 \dots$ ① である。

また、図に示し、 $z' = t z \quad (t > 0) \dots$ ② とおくと、

$$t = \frac{|z'|}{|z|} = \frac{|z| |z'|}{|z|^2} = \frac{r^2}{z \bar{z}} \quad (\text{①より})$$

$$\text{②に代入して、} \quad z' = \frac{r^2}{z \bar{z}} \times z = \frac{r^2}{\bar{z}}$$

$$\boxed{z' = \frac{r^2}{\bar{z}}}$$

4. 図形的应用

(2) ベクトルとともに.

① 一次結合

異なる3点 $O(0)$, $A(\alpha)$, $B(\beta)$ は
一直線上にないものとする。

任意の複素数 z は実数 k, l を用いて

$$z = k\alpha + l\beta$$

とただ1通りに表せる。

さらに、実数 k', l' に対して

$$k\alpha + l\beta = k'\alpha + l'\beta$$

$$\Leftrightarrow k = k' \text{ かつ } l = l'$$

$\vec{OA}$ と $\vec{OB}$ は
一次独立

任意の点 P は実数 k, l を用いて

$$\vec{OP} = k\vec{OA} + l\vec{OB}$$

とただ1通りに表せる。

さらに、実数 k', l' に対して

$$k\vec{OA} + l\vec{OB} = k'\vec{OA} + l'\vec{OB}$$

$$\Leftrightarrow k = k' \text{ かつ } l = l'$$

② 内分・外分

2点 $A(\alpha)$, $B(\beta)$ を $m:n$ の比に ($m>0, n>0$)

内分する点を $P(z_1)$ とすると $z_1 = \frac{m\beta + n\alpha}{m+n}$

外分する点を $Q(z_2)$ とすると $z_2 = \frac{m\beta - n\alpha}{m-n}$

$$\vec{OP} = \frac{m\vec{OB} + n\vec{OA}}{m+n}$$

$$\vec{OQ} = \frac{m\vec{OB} - n\vec{OA}}{m-n}$$

③ 領域

$\vec{OA}$ と $\vec{OB}$ は一次独立

異なる3点 $O(0)$, $A(\alpha)$, $B(\beta)$ は一直線上にないものとする。

s, t を実数として、 $z = s\alpha + t\beta$ と表される点 $P(z)$

の存在範囲(領域)について。 $\vec{OP} = s\vec{OA} + t\vec{OB}$

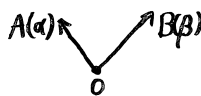
(i) $s+t=1$



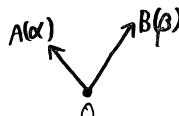
(ii) $s+t=1$
($s \geq 0, t \geq 0$)



(iii) $0 \leq s \leq 1$
 $0 \leq t \leq 1$



(iv) $s+t \leq 1$
($s \geq 0, t \geq 0$)



(v) $s+t \leq 1$

