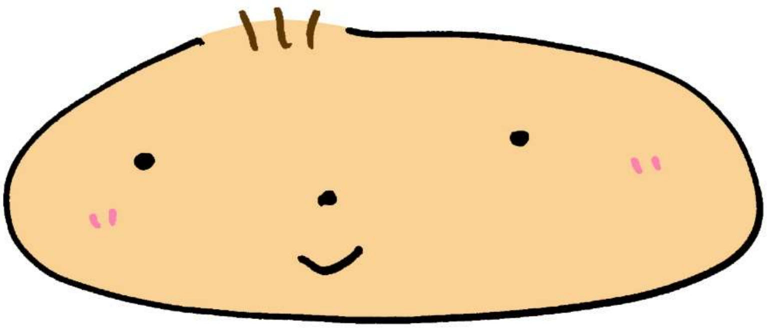
数学C

17-1　平面上の曲線



＜講義ノート＞

平面上の曲線

１　２次曲線

（１）放物線

（２）楕円

（３）双曲線

（４）２次曲線の応用

(i)　接線

(ii) 離心率

２　媒介変数表示と極座標

（１）媒介変数表示

（２）極座標

(i)　基本

(ii) 極方程式

(iii) 面積・弧長

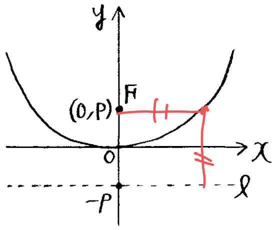
（３）いろいろな曲線

1、2次曲線

(1) 放物線

定点Fと Fを通らない直線ℓとから等距離にある点の軌跡

$p \neq 0$ とし、焦点F$(0, p)$, 準線 $y=-p$ の放物線を求めてみる。
放物線上の点P(x, y)から ℓへ下ろした垂線の足を
Hとすれば、 $PF = PH$ より



$$\sqrt{(x-0)^2+(y-p)^2} = |y-(-p)|$$

$$\Leftrightarrow \quad x^2+(y-p)^2=(y+p)^2$$

$$\Leftrightarrow \quad x^2+y^2-2py+p^2 = y^2+2py+p^2$$

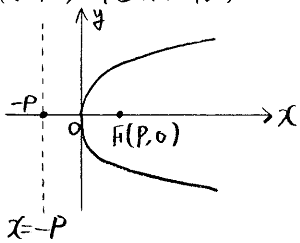
$$\Leftrightarrow \quad x^2 = 4py \quad \left(y=\frac{1}{4p}x^2\right)$$

頂点O$(0,0)$
軸 $x=0$ (y軸)

放物線 $x^2=4py$ の焦点$(0, p)$, 準線 $y=-p$ (頂点$(0,0)$, 軸はy軸)
$(p \neq 0)$

放物線 $y^2=4px$ の焦点$(p, 0)$, 準線 $x=-p$ (頂点$(0,0)$, 軸はx軸)

放物線の方程式の「標準形」

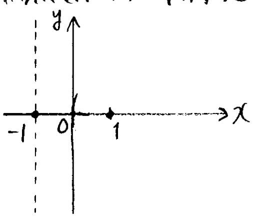


例 次の放物線の焦点の座標、準線の方程式を求め、その概形を書け。

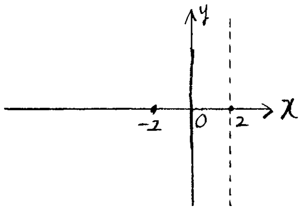
(1) $y^2=4x$ (2) $y^2=-8x$
(3) $x^2=8y$ (4) $(y+1)^2=4(x-1)$

解)

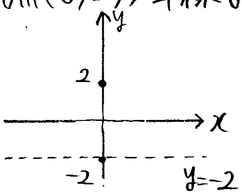
(1) $y^2=4x$
$=4\cdot1\cdot x$
焦点$(1,0)$, 準線 $x=-1$ //



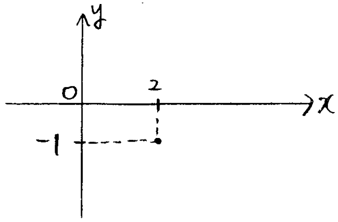
(2) $y^2=-8x$
$=4\cdot(-2)\cdot x$
焦点$(-2,0)$, 準線 $x=2$ //



(3) $x^2=8y$
$=4\cdot2\cdot y$
焦点$(0,2)$, 準線 $y=-2$ //



(4) $(y+1)^2=4(x-1)$
$y^2=4x$のグラフを、x軸正方向に1、y軸正方向に-1 平行移動したもの。
焦点$(1+1, 0-1)=(2,-1)$ //
準線 $x=0$ //

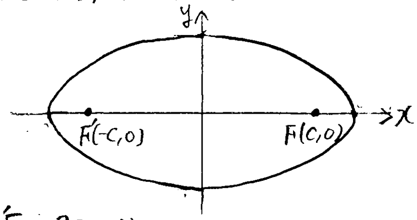


1、2次曲線

(2) 楕円

2定点F, F'からの距離の和が一定である点の軌跡

2点F(c, 0), F'(−c, 0) (c>0)を焦点とし、2点からの距離の和が2aであるような楕円の方程式を求める。ただし、a>c>0とする。



楕円上の点をP(x, y)とすると、FP+PF'=2aより

$$\sqrt{(x-c)^2+y^2}+\sqrt{(x+c)^2+y^2}=2a$$

$$\therefore \sqrt{(x-c)^2+y^2}=2a-\sqrt{(x+c)^2+y^2}$$

両辺2乗して、$(x-c)^2+y^2=4a^2-4a\sqrt{(x+c)^2+y^2}+(x+c)^2+y^2$

$$\Leftrightarrow x^2-2cx+c^2=4a^2-4a\sqrt{(x+c)^2+y^2}+x^2+2cx+c^2$$

$$\Leftrightarrow 4a\sqrt{(x+c)^2+y^2}=4a^2+4cx$$

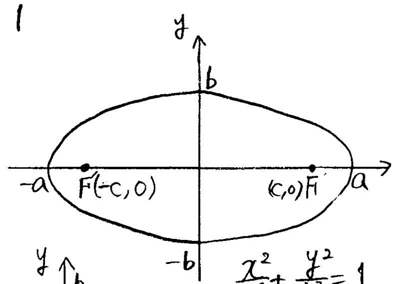
さらに両辺を2乗して、$a^2\{(x+c)^2+y^2\}=(a^2+cx)^2$

$$\Leftrightarrow a^2(x^2+2cx+c^2+y^2)=a^4+2a^2cx+c^2x^2$$

$$\Leftrightarrow (a^2-c^2)x^2+a^2y^2=a^2(a^2-c^2)$$

両辺を$a^2(a^2-c^2)$でわって、$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{a^2-c^2}=1$

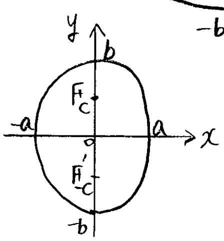
$a^2-c^2=b^2$とすると、$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$



$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$

2焦点F(c, 0), F'(−c, 0), FP+F'P=2a
の楕円の方程式は　　$c=\sqrt{a^2-b^2}$ (>0)

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \quad (\text{長軸}2a,\ \text{短軸}2b)$$



2焦点F(0, c), F'(0, −c), FP+F'P=2b
の楕円の方程式は　　$c=\sqrt{b^2-a^2}$ (>0)

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \quad (\text{長軸}2b,\ \text{短軸}2a)$$

例) 次の楕円の焦点の座標、長軸・短軸の長さを求め、グラフの概形を書け。

(1) $x^2+4y^2=4$　　　(2) $x^2+4y^2-2x+8y+1=0$

(3) $9x^2+4y^2=36$　　　(4) $9x^2+4y^2+18x-16y-11=0$

解) (1) $x^2+4y^2=4$

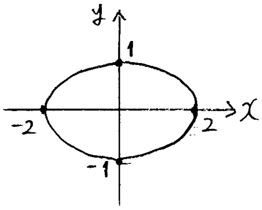
$\Leftrightarrow \dfrac{x^2}{2^2}+\dfrac{y^2}{1^2}=1$

$\sqrt{2^2-1^2}=\sqrt{3}$ より、

焦点 $(\pm\sqrt{3}, 0)$

長軸の長さ $=4$

短軸の長さ $=2$



(2) $x^2+4y^2-2x+8y+1=0$

$\Leftrightarrow (x-1)^2+4(y+1)^2=4$

$\Leftrightarrow \dfrac{(x-1)^2}{2^2}+\dfrac{(y+1)^2}{1^2}=1$

これは、(1)のグラフを x軸正方向に 1

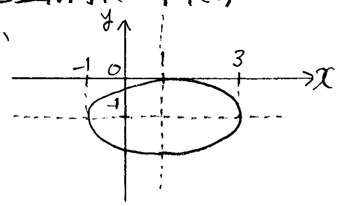
y軸正方向に -1 だけ

平行移動したものだから、

焦点 $(1\pm\sqrt{3}, -1)$ //

長軸の長さ 4 //

短軸の長さ 2 //



(3) $9x^2+4y^2=36$

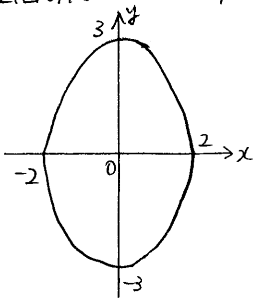
$\Leftrightarrow \dfrac{x^2}{2^2}+\dfrac{y^2}{3^2}=1$

$\sqrt{3^2-2^2}=\sqrt{5}$ より、

焦点 $(0, \pm\sqrt{5})$ //

長軸の長さ $=6$

短軸の長さ $=4$



(4) $9x^2+4y^2+18x-16y-11=0$

$\Leftrightarrow 9(x+1)^2+4(y-2)^2=36$

$\Leftrightarrow \dfrac{(x+1)^2}{2^2}+\dfrac{(y-2)^2}{3^2}=1$

これは、(3)のグラフを x軸正方向に -1,

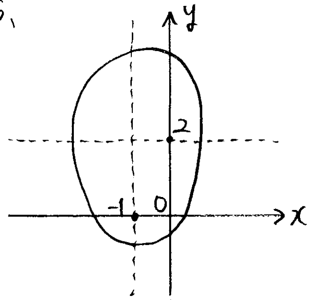
y軸正方向に 2 だけ

平行移動したものだから、

焦点 $(-1, 2\pm\sqrt{5})$ //

長軸の長さ 6 //

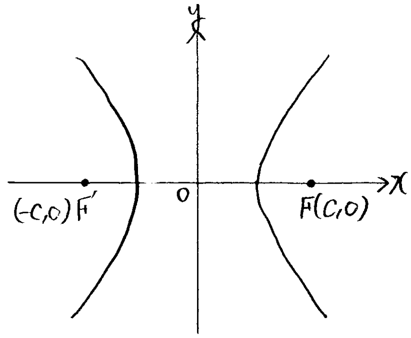
短軸の長さ 4 //



1、2次曲線

(3) 双曲線

2定点 F, F' からの距離の差が一定である点の軌跡



2点 F(c,0)、F'(-c,0) (c>0) を焦点とし、
この2点からの距離の差 2a であるような
双曲線の方程式を求める。ただし、c>a>0 とする。
双曲線上の点を P(x, y) とすると、

$$|PF - PF'| = 2a$$

すなわち $PF - PF' = \pm 2a$

よって、$\sqrt{(x-c)^2+y^2} - \sqrt{(x+c)^2+y^2} = \pm 2a$

$$\Leftrightarrow \sqrt{(x-c)^2+y^2} = \sqrt{(x+c)^2+y^2} \pm 2a$$

両辺を2乗して、

$$(x-c)^2+y^2 = (x+c)^2+y^2 \pm 4a\sqrt{(x+c)^2+y^2} + 4a^2$$

$$\Leftrightarrow x^2-2cx+c^2 = x^2+2cx+c^2 \pm 4a\sqrt{(x+c)^2+y^2} + 4a^2$$

$$\Leftrightarrow -4cx-4a^2 = \pm 4a\sqrt{(x+c)^2+y^2}$$

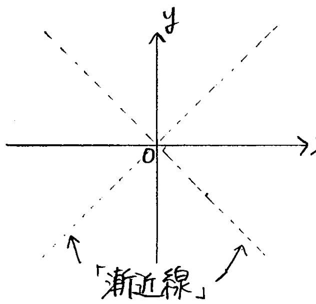
さらに両辺を2乗して、

$$c^2x^2+2a^2cx+a^4 = a^2\{(x+c)^2+y^2\}$$

$$\Leftrightarrow c^2x^2+2a^2cx+a^4 = a^2x^2+2a^2cx+a^2c^2+a^2y^2$$

$$\Leftrightarrow (c^2-a^2)x^2-a^2y^2 = a^2(c^2-a^2)$$

両辺を $a^2(c^2-a^2)$ でわって、 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{c^2-a^2} = 1$



2焦点 F(c, 0), F'(-c, 0), |FP − F'P| = 2a
の双曲線の方程式は $c^2=a^2+b^2\ (a,b,c>0)$

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1 \quad (\text{頂点}A(a,0),\ A'(-a,0))$$

$\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ について、$\dfrac{y^2}{b^2}=\dfrac{x^2}{a^2}-1$ より

$$y^2 = b^2\left(\frac{x^2}{a^2}-1\right)$$

$$= \frac{b^2}{a^2}(x^2-a^2) \qquad y=\pm\frac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2}$$

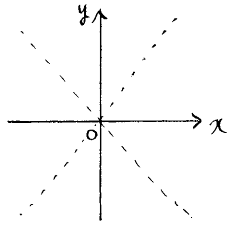
(これが $y=mx+n$ という漸近線をもつとすると ($x\to\pm\infty$)

$$m=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{y}{x} = \lim_{x\to\pm\infty}\left(\pm\frac{b}{a}\sqrt{1-\frac{a^2}{x^2}}\right)=\pm\frac{b}{a}$$

$$n=\lim_{x\to\pm\infty}\left\{\pm\frac{b}{a}\left(\sqrt{x^2-a^2}-x\right)\right\} = \lim_{x\to\pm\infty}\left\{\pm\frac{b}{a}\times\frac{-a^2}{\sqrt{x^2-a^2}+x}\right\}=0 \text{ より}$$
)

2焦点 F(0, c)、F'(0, −c)、|FP − F'P| = 2b
の双曲線の方程式は $c^2=a^2+b^2\ (a,b,c>0)$

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=-1 \quad (\text{頂点}B(0,b),\ B'(0,-b))$$



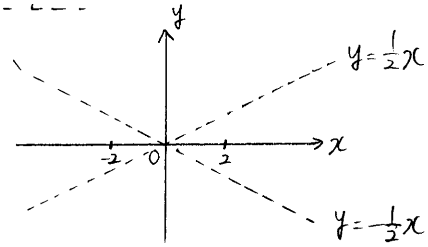
例) 次の双曲線の焦点の座標、漸近線の方程式を求め、そのグラフの概形をかけ。

(1) $x^2-4y^2=4$　　　　(2) $x^2-4y^2=4$

解) (1) $x^2-4y^2=4$

$\iff \dfrac{x^2}{2^2}-\dfrac{y^2}{1^2}=1$

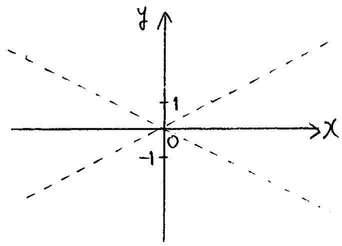
焦点 $(\pm\sqrt{5},0)$, 漸近線 $y=\pm\frac{1}{2}$ //



(2) $x^2-4y^2=-4$

$\iff \dfrac{x^2}{2^2}-\dfrac{y^2}{1^2}=-1$

焦点 $(0,\pm\sqrt{5})$, 漸近線 $y=\pm\frac{1}{2}x$ //

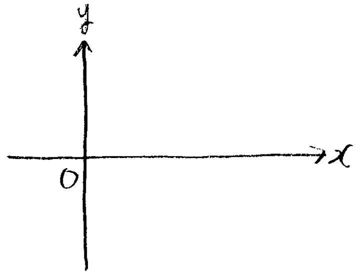


1、2次曲線

(4) 2次曲線の応用

(i) 接線

〈放物線〉



$y^2=4px\ (p\neq0)$ 上の点 (x_0, y_0) における接線の方程式を求める。

$y^2=4px$ の両辺を x で微分。

$$2y\times\frac{dy}{dx}=4p$$

$$\therefore \frac{dy}{dx}=\frac{2p}{y}\quad(y\neq0)$$

よって、$y_0\neq0$ なら、接線の方程式は

$$y=\frac{2p}{y_0}(x-x_0)+y_0$$

$$\therefore y_0y=2p(x-x_0)+y_0^2$$

$$=2px-2px_0+y_0^2$$

ここで、$y_0^2=4px_0$ なので

$$y_0y=2px-2px_0+4px_0$$

$$=2p(x+x_0)\cdots①$$

ここで、$y_0=0$ のとき、$x_0=0$ で、接線の方程式は $x=0$ であるが、①で $x_0=0$，$y_0=0$ とすると、

$$0=2px$$

$x=0$ となり、満たす。

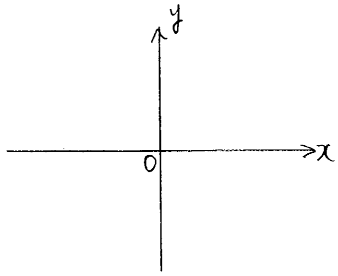
したがって、

$$y_0y=2p(x+x_0)$$

放物線 $y^2=4px\ (p\neq0)$ 上の点 (x_0, y_0) における接線の方程式は

$$y_0y=2p(x+x_0)$$

〈楕円〉



$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\ (a>0,\ b>0)$ 上の点 (x_0, y_0) における接線の方程式を求める。

楕円上の点 (x_0, y_0) について、

$$\frac{x_0^2}{a^2}+\frac{y_0^2}{b^2}=1\cdots①$$

次に、$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ の両辺を x で微分

$$\frac{2x}{a^2}+\frac{2y}{b^2}\times\frac{dy}{dx}=0$$

$$\therefore \frac{y}{b^2}\times\frac{dy}{dx}=-\frac{x}{a^2}\ \Rightarrow\ \frac{dy}{dx}=-\frac{b^2x}{a^2y}\quad(y\neq0)$$

よって、$y_0\neq0$ なら接線の方程式は

$$y=-\frac{b^2x_0}{a^2y_0}(x-x_0)+y_0$$

$$\therefore a^2y_0y=-b^2x_0(x-x_0)+a^2y_0^2$$

$$=-b^2x_0x+b^2x_0^2+a^2y_0^2$$

$$\Leftrightarrow b^2x_0x+a^2y_0y=b^2x_0^2+a^2y_0^2$$

両辺を a^2b^2 でわって

$$\frac{x_0x}{a^2}+\frac{y_0y}{b^2}=\frac{x_0^2}{a^2}+\frac{y_0^2}{b^2}$$

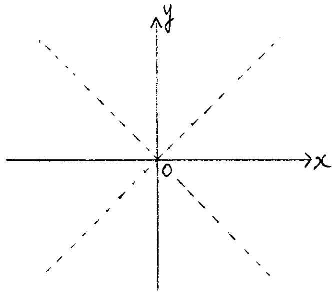
①より $\dfrac{x_0 x}{a^2} + \dfrac{y_0 y}{b^2} = 1$ …②

ここで、$y_0 = 0$ のとき $x_0 = \pm a$ で
このとき、接線は $x = \pm a$ となるが
②より、$\dfrac{\pm a x}{a^2} + 0 = 1 \Rightarrow x = \pm a$
したがって、$y_0 = 0$ も含めて
②は接線となる。

楕円 $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ 上の
点 (x_0, y_0) における接線の方程式は
$$\frac{x_0 x}{a^2} + \frac{y_0 y}{b^2} = 1$$

〈双曲線〉

$\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ $(a>0, b>0)$ 上の点 (x_0, y_0)
において、$\dfrac{x_0^2}{a^2} - \dfrac{y_0^2}{b^2} = 1$ …①



$\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ の両辺を x で微分すると
$$\frac{2x}{a^2} - \frac{2y}{b^2} \times \frac{dy}{dx} = 0$$
$$\therefore \frac{y}{b^2} \times \frac{dy}{dx} = \frac{x}{a^2} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{b^2 x}{a^2 y} \quad (y \neq 0)$$
よって、$y_0 \neq 0$ なら、接線の方程式は
$$y = \frac{b^2 x_0}{a^2 y_0}(x - x_0) + y_0$$
$$\therefore a^2 y_0 y = b^2 x_0 (x - x_0) + a^2 y_0^2$$
$$= b^2 x_0 x - b^2 x_0^2 + a^2 y_0^2$$
$$\Leftrightarrow b^2 x_0 x - a^2 y_0 y = b^2 x_0^2 - a^2 y_0^2$$
両辺 $a^2 b^2$ でわって、
$$\frac{x_0 x}{a^2} - \frac{y_0 y}{b^2} = \frac{x_0^2}{a^2} - \frac{y_0^2}{b^2}$$

①より $\dfrac{x_0 x}{a^2} - \dfrac{y_0 y}{b^2} = 1$ …② $(y \neq 0)$
$y_0 = 0$ のとき、$x_0 = \pm a$ であり、このとき、
接線の方程式は $x = \pm a$
であるが、②に $x_0 = \pm a, y_0 = 0$ を
代入すると、$\dfrac{\pm a x}{a^2} - 0 = 1 \Rightarrow x = \pm a$
よって、$y_0 = 0$ のときも②は接線。

双曲線 $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = \pm 1$ 上の
点 (x_0, y_0) における接線の方程式は
$$\frac{x_0 x}{a^2} - \frac{y_0 y}{b^2} = \pm 1 \quad (\text{上と複合同順})$$

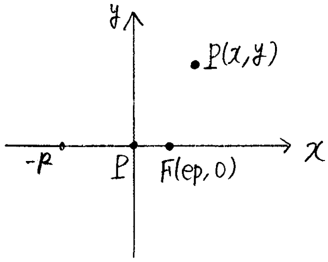
1、2次曲線

(4) 2次曲線の応用

(ii) 離心率

定点Fと定直線ℓへ距離の比の値eが一定である点Pの軌跡。

↖ eの範囲により、放物線だけでなく楕円や双曲線にもなりうる。



右の図のように、焦点の座標を$(ep, 0)$ $(p>0)$とし、準線ℓの方程式を$x=-p$とおいて条件をみたす点Pの座標を(x, y)とおくと.

$$\frac{PF}{PH} = e \qquad \therefore PF = e\cdot PH$$

$$\sqrt{(x-ep)^2+y^2} = e\,|x-(-p)|$$

$$\Leftrightarrow (x-ep)^2+y^2 = e^2(x+p)^2$$

$$\Leftrightarrow x^2-2epx+e^2p^2+y^2 = e^2x^2+2e^2px+e^2p^2$$

$$\Leftrightarrow (1-e^2)x^2+y^2-2ep(1+e)x = 0$$

2、媒介変数表示と極座標

(1) 媒介変数表示

例

(1) $\begin{cases} x = 2t+1 & \cdots ① \\ y = 3-4t^2 & \cdots ② \end{cases}$

①から、$t = \dfrac{x-1}{2}$ を②に代入して

$$y = 3 - 4\left(\frac{x-1}{2}\right)^2$$
$$= 3 - (x-1)^2$$
$$= -x^2+2x+2$$

一般に、x と y が t を媒介にして、

$\begin{cases} x = f(t) \\ y = g(t) \end{cases}$ の形で与えられる時、

t を「媒介変数」といい、

このような表し方を、

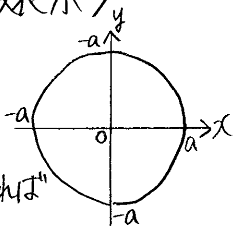
「媒介変数表示」という。

〈2次曲線の媒介変数表示〉

①円

円 $x^2+y^2=a^2$ 上に任意の点 $P(x, y)$ をとり、OP が x 軸の正方向となす角を θ とすれば

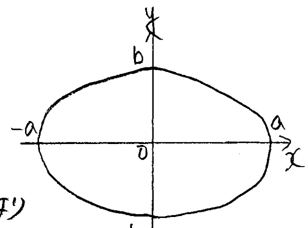
$$\begin{cases} x = a\cos\theta \\ y = a\sin\theta \end{cases}$$



②楕円

楕円 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ について。

$\left(\dfrac{x}{a}\right)^2+\left(\dfrac{y}{b}\right)^2=1$ より



$$\begin{cases} x = a\cos\theta \\ y = b\sin\theta \end{cases}$$

また、QH : PH
$= a\sin\theta : b\sin\theta$
$= a : b$

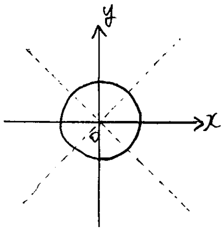
楕円 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ は

円 $x^2+y^2=a^2$ を y 軸方向に $\dfrac{b}{a}$ の比に拡大(もしくは縮小)した曲線である

③双曲線

双曲線 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ について。

$1+\left(\dfrac{y}{b}\right)^2=\left(\dfrac{x}{a}\right)^2$ より



$$\begin{cases} x = \dfrac{a}{\cos\theta} \\ y = b\tan\theta \end{cases}$$

④放物線

$y^2 = 4px$ $(p \neq 0)$ について。

$y = 2pt$ として代入すると、

$(2pt)^2 = 4px$

$\therefore x = \dfrac{4p^2t^2}{4p} = pt^2$

$$\begin{cases} x = pt^2 \\ y = 2pt \end{cases}$$

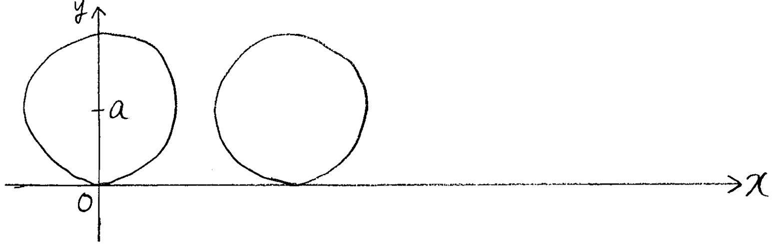
2、媒介変数表示と極座標

(1) 媒介変数表示　＜自分で作る

㊎(サイクロイド)

直線上を滑らずに回転しながら移動する円の周上の固定点が描く軌跡を「サイクロイド」という。

x軸の上側をころがる半径aの円を考える。円周上の固定点Pは、動きはじめのとき原点にあるとする。

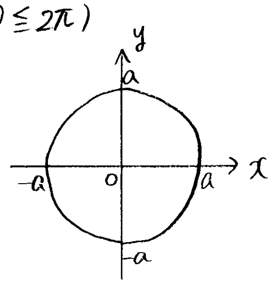


角θ $(0 \leqq \theta \leqq 2\pi)$だけ回転してころがったとき、
円の中心をQ，円とx軸との接点をHとする。

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OH} + \overrightarrow{HQ} + \overrightarrow{QP}$$
$$= (a\theta, 0) + (0, a) + a\left(\cos\left(\tfrac{3}{2}\pi - \theta\right), \sin\left(\tfrac{3}{2}\pi - \theta\right)\right)$$
$$= (a\theta, a) + a(-\sin\theta, -\cos\theta)$$
$$= (a\theta - \sin\theta, a - a\cos\theta)$$

サイクロイド $\begin{cases} x = a(\theta - \sin\theta) \\ y = a(1 - \cos\theta) \end{cases}$ $(0 \leqq \theta \leqq 2\pi)$

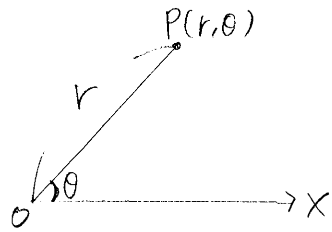
アステロイド $\begin{cases} x = a\cos^3\theta \\ y = a\sin^3\theta \end{cases}$ $(0 \leqq \theta < 2\pi)$



2、媒介変数表示と極座標

(2) 極座標

(i) 基本



平面上に点Oと半直線OXを考える。
この平面上の任意の点Pは、OPの大きさrと
半直線OPとOXのなす角θで、その位置が決まる。
つまり、「1組の数(r, θ)は点Pの位置」を定める。
このとき、(r, θ)を点Pの極座標といい、
点Oを「極」、半直線OXを「始線」、OPを「動径」という。
また、rを大きさ、θを偏角という。

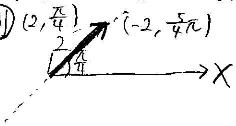
(注1) $P \neq O$のとき、$0 \leqq \theta < 2\pi$では
Pの極座標は1通りに定まる

（一般角まで許すと
(r, θ)と$(r, \theta + 2n\pi)$は
同じ点を表す）

(注2) 極Oの極座標は$r = 0$だが
θは定まらない

(注3) $r < 0$の場合を考えることもある

例



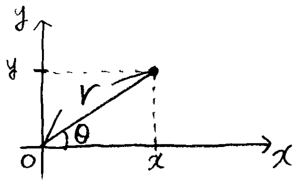
(r, θ)は
$(-r, \theta + \pi)$と同じ点である。

〈直交座標と極座標の関係〉

点Pの直交座標を(x, y)、極座標を(r, θ)とすると

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$$

$$\begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \cos\theta = \dfrac{x}{r},\ \sin\theta = \dfrac{y}{r} \end{cases}$$

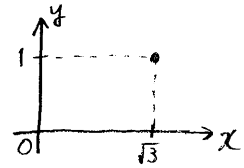


例1 直交座標で表された次の点の極座標を求めよ。
ただし、$r > 0$, $0 \leqq \theta \leqq 2\pi$とする

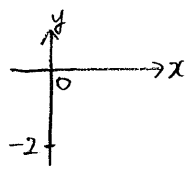
(1) $(\sqrt{3}, 1)$　　(2) $(0, -2)$

(3) $\left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$　　(4) $(2, -2)$

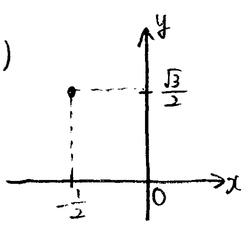
解) (1)



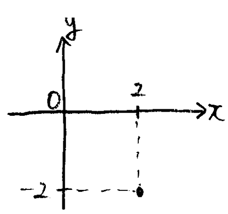
(2)



(3)

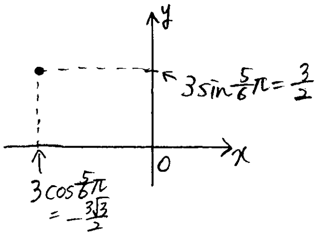


(4)



例2 極座標で表された2点 $P\left(3, \frac{5}{6}\pi\right)$, $Q\left(2, \frac{\pi}{2}\right)$ の距離を求めよ。

(解1) 直交座標に直す



P, Qの直交座標はそれぞれ,

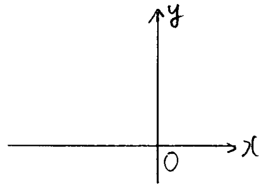
$P\left(-\frac{3\sqrt{3}}{2}, \frac{3}{2}\right)$, $Q(0, 2)$

よって、$PQ = \sqrt{\left\{0-\left(-\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)\right\}^2 + \left(2-\frac{3}{2}\right)^2}$

$= \sqrt{\frac{27}{4} + \frac{1}{4}}$

$= \sqrt{7}$ //

(解2) 余弦定理を利用



△OPQについて、余弦定理より

$PQ^2 = 3^2 + 2^2 - 2\times3\times2\times\cos\frac{\pi}{3}$

$= 9 + 4 - 6$

$= 7$

$\therefore PQ = \sqrt{7}$ //

2、媒介変数と極座標

(2) 極座標

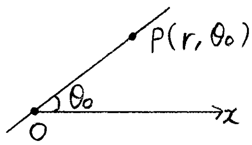
(ii) 極方程式

(ア) 直線の極方程式

① 極Oを通るとき

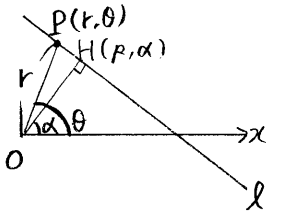
極Oを通り、始線となす角がθ_0の直線の方程式は

であある。



② 極Oを通らないとき.

求める直線をℓとする。ℓに極からひいた垂線の足Hの極座標を(p, α)とし、直線上の任意の点をP(r, θ)とすると、



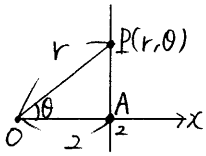
例 次の直線の極方程式を求めよ。

(1) 極を通り、始線となす角が $\frac{\pi}{3}$ の直線 ⤳ (答)

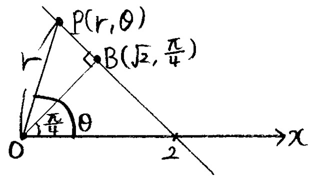
(2) 点A$(2, 0)$を通り、直線OAと垂直な直線

(3) 点B$(\sqrt{2}, \frac{\pi}{4})$を通り、直線OBと垂直な直線

解) (2) 直線上の点をP(r, θ)とすると△POAについて.



(3) 右図において、$\angle$BOP $= \theta - \frac{\pi}{4}$, OB $= \sqrt{2}$ から、



$$r(\cos\theta\cos\tfrac{\pi}{4} + \sin\theta\sin\tfrac{\pi}{4}) = \sqrt{2}$$

$$\Leftrightarrow \quad r\cos\theta + r\sin\theta = \sqrt{2}$$

$$\Leftrightarrow \quad x + y = 2 \quad (y = -x + 2)$$

2、媒介変数表示と極座標

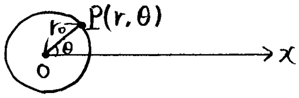
(2) 極座標

(ii) 極方程式

(イ) 円の極方程式

①極Oが中心

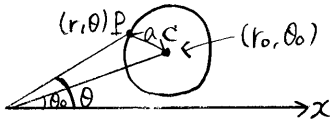
極Oを中心とする半径r_0の円の方程式は



である。

②極O以外が中心

中心$C(r_0, \theta_0)$ $(r_0 \neq 0)$、半径aの円の方程式は



↑ △COPについて、余弦定理

㊙ 次の円の極方程式を求めよ。

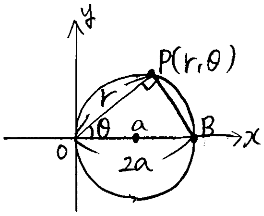
(1) 極が中心で半径2 ⤳ (答)

(2) 中心$C(a, 0)$、半径a

(3) 中心$D(3, 0)$、半径1

解) (2) $r = OB \times \cos\theta$

$=$



$a = r_0$ より、

$a^2 = r^2 + a^2 - 2ra\cos\theta$

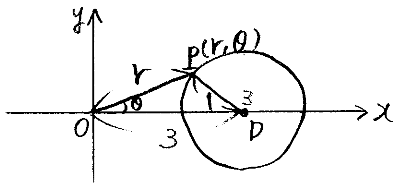
$\Leftrightarrow r(r - 2a\cos\theta) = 0$

$r = 0,\ 2a\cos\theta$

(3) △ODPについて、余弦定理より

$1^2 = r^2 + 3^2 - 2 \times r \times 3 \times \cos\theta$

$\Leftrightarrow$



$(x-3)^2 + y^2 = 1$

$\Leftrightarrow x^2 + y^2 - 6x + 9 = 1$

2、媒介変数表示と極座標

(2) 極座標

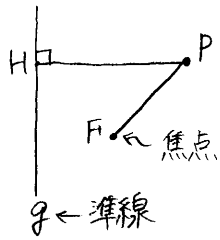
(ii) 極方程式

(ウ) 2次曲線

準備(離心率)

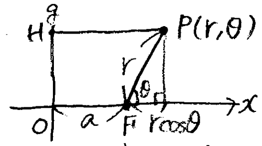
楕円・双曲線も放物線と同じように、定点と定直線からの距離の比が一定である点の軌跡として、統一的にとらえることができる。

定点Fと Fを通らない定直線gが与えられていて、点Pからgに下ろした垂線をPHとするとき、



を満足する点Pの軌跡は、Fを1つの焦点とする2次曲線(円を除く)となる。

$e=1$ のとき「放物線」、$0<e<1$ のとき「楕円」、$e>1$ のとき「双曲線」



右の図のように、定点Fから定直線gに下ろした垂線の足をO、2次曲線上の点Pからgにひいた垂線の足をHとする。

Fを極とするとき、$\dfrac{PF}{PH}=e$ をみたす点Pの軌跡を求める。(始線Fx)

$\dfrac{PF}{PH}=e$ より、$PF=ePH \iff r=e(a+r\cos\theta)$

$\iff r(1-e\cos\theta)=ea$

よって点Pの軌跡は、$r=\dfrac{ea}{1-e\cos\theta}$ //

例1 焦点Fと準線gとの距離が3、離心率が$\frac{1}{2}$である2次曲線の極方程式を求めよ。

解) $\dfrac{PF}{PH}=\dfrac{1}{2}$ より、$r=\dfrac{1}{2}(3+r\cos\theta)$

$2r=3+r\cos\theta$

$r=\dfrac{3}{2-\cos\theta}$ //

例3 次の極方程式を、直交座標の方程式に直せ。

$$r=\frac{9}{5-4\cos\theta}\left(=\frac{\frac{9}{5}}{1-\frac{4}{5}\cos\theta}\right)$$

解) 与式を変形して、$r(5-4\cos\theta)=9$

$\Leftrightarrow \quad 5r=9+4r\cos\theta$

両辺を平方して、

$25r^2=(9+4r\cos\theta)^2$

$\Leftrightarrow 25(x^2+y^2)=(9+4x)^2$

$\Leftrightarrow 25x^2+25y^2=81+72x+16x^2$

$\Leftrightarrow 9x^2-72x+25y^2=81$

$\Leftrightarrow 9(x-4)^2-144+25y^2=81$

$\Leftrightarrow 9(x-4)^2+25y^2=225$

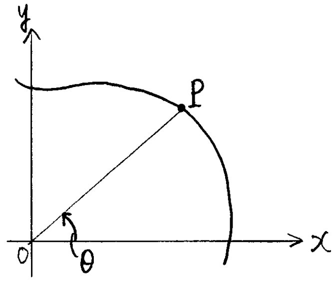
$\Leftrightarrow \frac{(x-4)^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$ //

2、媒介変数表示と極座標

(2) 標座標

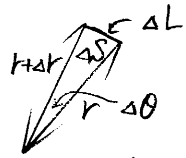
(iii) 面積・弧長（極方程式と面積・曲線の長さ）

右図において、極方程式 $r=f(\theta)$ で表された曲線を C とし、C 上で偏角が α, β $(0 \leqq \alpha < \beta < 2\pi)$ である点をそれぞれ A, B とする。C と OA, OB で囲まれた部分の面積を S、A から B までの曲線の長さを L とするとき、



$C: r=f(\theta)$

○ S について。



偏角が θ $(\alpha \leqq \theta \leqq \beta)$ である C 上の点を P とし、C と OA、OP で囲まれた部分の面積を $S(\theta)$ とすると、
$S(\alpha)=0$, $S(\beta)=S$ である。

θ が $\Delta\theta$ だけ増加したとき、$S(\theta)$ および r の増分をそれぞれ ΔS、Δr とすると、

$$\Delta S = S(\theta+\Delta\theta) - S(\theta),\quad \Delta r = f(\theta+\Delta\theta) - f(\theta)$$

である。このとき、

$$\Delta S \fallingdotseq \frac{1}{2} \times r \times (r+\Delta r) \times \sin\Delta\theta$$
$$\fallingdotseq \frac{1}{2}r^2\Delta\theta + \frac{1}{2}r \times \Delta r \times \Delta\theta$$

$$\therefore \frac{\Delta S}{\Delta\theta} \fallingdotseq \frac{1}{2}r^2 \quad より \quad S'(\theta) = \lim_{\theta \to 0}\frac{\Delta S}{\Delta\theta} = \frac{1}{2}r^2$$

したがって、

$$S = S(\beta) - S(\alpha)$$
$$= \left[S(\theta)\right]_{\theta=\alpha}^{\theta=\beta} \longrightarrow \int_\alpha^\beta S'(\theta)\,d\theta$$
$$= \frac{1}{2}\int_\alpha^\beta r^2\,d\theta \text{ //}$$

$$\boxed{\begin{array}{l} \displaystyle\lim_{\theta\to 0}\frac{1-\cos\theta}{\theta^2} = \frac{1}{2} \\ \text{から、} \displaystyle\frac{1-\cos\Delta\theta}{(\Delta\theta)^2} \fallingdotseq \frac{1}{2} \\ \therefore \cos\Delta\theta = 1 - \frac{1}{2}(\Delta\theta)^2 \end{array}}$$

○ L について。

A から P までの曲線の長さを $L(\theta)$ とすると、
$L(\alpha)=0$, $L(\beta)=L$ である。
θ が $\Delta\theta$ だけ増加したときの $L(\theta)$ の増分を ΔL とすると、余弦定理を用いて

$$(\Delta L)^2 = r^2 + (r+\Delta r)^2 - 2r(r+\Delta r)\cos\Delta\theta$$

$$= 2r^2 + 2r\Delta r + (\Delta r)^2 - (r^2 + r\Delta r)\{2-(\Delta\theta)^2\}$$
$$= 2r^2 + 2r\Delta r + (\Delta r)^2 - 2r^2 - 2r\Delta r + (r^2 + r\Delta r)(\Delta\theta)^2$$
$$\fallingdotseq (\Delta r)^2 + r^2(\Delta\theta)^2 + r\Delta r(\Delta\theta)^2$$

$$\therefore (\Delta L)^2 \fallingdotseq (\Delta r)^2 + r^2(\Delta\theta)^2 \quad より、\quad \Delta L \fallingdotseq \sqrt{(\Delta r)^2 + r^2(\Delta\theta)^2}$$

したがって、$\displaystyle\frac{\Delta L}{\Delta\theta} = \sqrt{\left(\frac{\Delta r}{\Delta\theta}\right)^2 + r^2}$ から

$$L = L(\beta) - L(\alpha)$$
$$= \left[L(\theta)\right]_{\theta=\alpha}^{\theta=\beta} \longrightarrow \int_\alpha^\beta L'(\theta)\,d\theta$$
$$= \int_\alpha^\beta \frac{dL}{d\theta}\,d\theta = \int_\alpha^\beta \sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2}\,d\theta \text{ //}$$