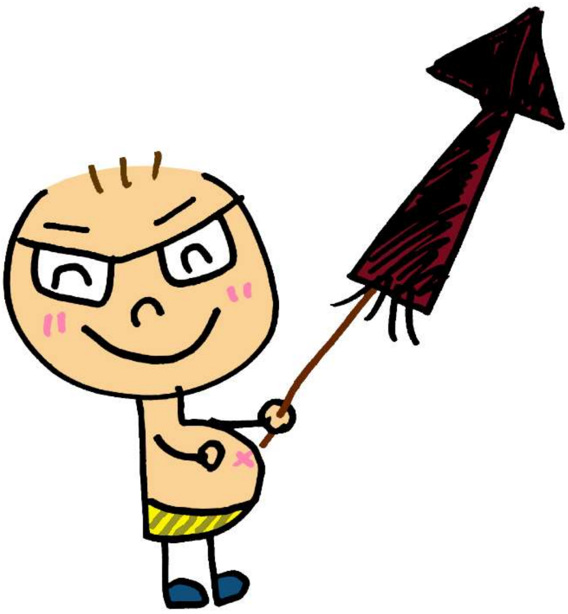
数学C

16　ベクトル



＜講義ノート＞

平面ベクトル

０　ベクトルの基本くん

（１）和・差・実数倍

（２）成分表示

（３）一次独立とは？

１　内積系

（１）内積の基礎

(i)　内積に慣れる

(ii)　内積となす角

(iii)｜ｓａ＋ｔｂ｜形は２乗

（２）内積の応用

(i)　平行条件・垂直条件

(ii)　三角形の面積

(iii) 内積と最大最小

２　位置ベクトル系

（１）一次独立（内分外分を準備）

(i)　点の位置

(ii)　面積比

（２）ベクトル方程式

(i)　直線の方程式

(ii)　円の方程式

これらをつなぐのが

「領域」

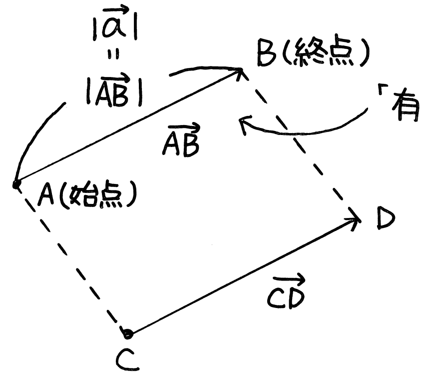
３　「内積系」と「位置ベクトル系」の融合

0. ベクトルの基本くん

(1) 導入 → 和、差、実数倍（同一直線上）

ベクトルとは、

「大きさと向きを合わせもつ量」



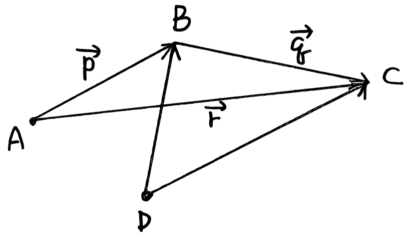
$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$

$|\vec{a}| = 1$

のとき、

$\vec{a}$：「単位ベクトル」

① 和



$\overrightarrow{DB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{DC}$

$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$ … ①

$\vec{p} + \vec{q} = \vec{r}$

② 差

①により、$\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}$

$= \overrightarrow{DC} - \overrightarrow{DB}$

$= \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OB}$

$= \overrightarrow{IC} - \overrightarrow{IB}$

$= \overrightarrow{PC} - \overrightarrow{PB}$

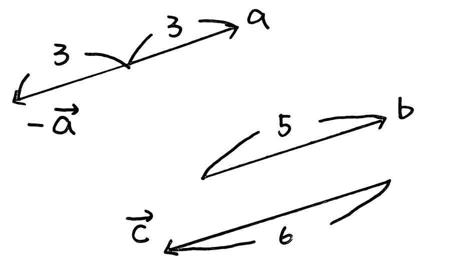
$= \overrightarrow{MC} - \overrightarrow{MB}$

$= \overrightarrow{SC} - \overrightarrow{SB}$

$= \overrightarrow{XC} - \overrightarrow{XB}$

③ 実数倍

㊖



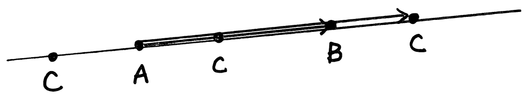
$|\vec{a}| = 3$、$|\vec{b}| = 5$

$\vec{b} = \frac{5}{3}\vec{a}$

$= \frac{|\vec{b}|}{|\vec{a}|}\vec{a}$　（$\vec{a} \neq 0$より
零ベクトル
大きさが0）

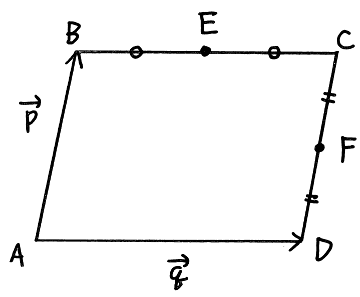
$|\vec{c}| = 6$　　$\vec{c} = -2\vec{a}$

［同一直線上］



異なる3点A、B、Cが同一直線上にあるとき、 $\overrightarrow{AC} = k\overrightarrow{AB}$（$k$：実数）

㊖ 平行四辺形ABCDにおいて、$\overrightarrow{AB} = \vec{p}$、$\overrightarrow{AD} = \vec{q}$とする。また、辺BC、CDの中点を、それぞれE、Fとする。このとき、$\overrightarrow{AE}$、$\overrightarrow{AF}$、$\overrightarrow{EF}$ベクトルをそれぞれ$\vec{p}$、$\vec{q}$で表せ。



解) $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BE}$

$= \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$

$= \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$

$= \vec{p} + \frac{1}{2}\vec{q}$ //

$\overrightarrow{AF} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DF}$

$= \overrightarrow{AD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{DC}$

$= \overrightarrow{AD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$

$= \frac{1}{2}\vec{p} + \vec{q}$ //

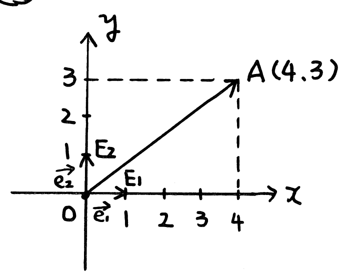
$\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{AF} - \overrightarrow{AE}$

$= (\frac{1}{2}\vec{p} + \vec{q}) - (\vec{p} + \frac{1}{2}\vec{q})$

$= -\frac{1}{2}\vec{p} + \frac{1}{2}\vec{q}$ //

(2) 成分表示、

例



$\overrightarrow{OA} = 4\vec{e_1} + 3\vec{e_2}$

$= 4(1,0) + 3(0,1)$

$= (4,0) + (0,3)$

$= (\underline{4}, \underline{3})$

x成分　y成分

$E_1(1,0)$ で $\vec{e_1} = \overrightarrow{OE_1}$
$E_2(0,1)$ で $\vec{e_2} = \overrightarrow{OE_2}$
基本ベクトル

また、$|\overrightarrow{OA}| = \sqrt{4^2+3^2}$

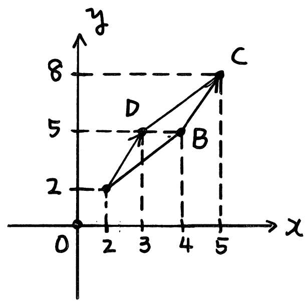
$= 5$

$\boxed{\begin{array}{l} \vec{a} = (a_1, a_2) \text{について} \\ |\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2} \end{array}}$

例′ 3点 A(2, 2)、B(4, 5)、C(5, 8) を頂点とする

平行四辺形ABCDの頂点Dの座標を求めよ。

解)



D(x, y) とすると、

$\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$ より、原点をOとして、

$\overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OB}$

$\therefore (x-2, y-2) = (1, 3)$

$\begin{cases} x - 2 = 1 \\ y - 2 = 3 \end{cases}$

$x = 3,\ y = 5$

D(3, 5)〃

例" 平面上の3つのベクトルを $\overrightarrow{OA}=(6, x)$、$\overrightarrow{OB}=(4, 3)$、$\overrightarrow{OC}=(x, 9)$ とする。3点A、B、Cが一直線上にあるとき、実数 x の値は？

解) 3点A、B、Cは異なるので、

0でない実数 k を用いて、

$\overrightarrow{AC}=k\overrightarrow{AB}$ と表せる。

つまり、$\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA}=k(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA})$

$\therefore (x, 9)-(6, x)=k((4, 3)-(6, x))$

$\Longleftrightarrow (x-6, 9-x)=k(-2, 3-x)$

$=(-2k, k(3-x))$

よって、$\begin{cases} x-6=-2k \cdots ① \\ 9-x=k(3-x) \cdots ② \end{cases}$

①から、$k=\dfrac{6-x}{2}$ を②に代入。

$9-x=\dfrac{6-x}{2}(3-x)$

$\Longleftrightarrow 2(9-x)=(6-x)(3-x)$

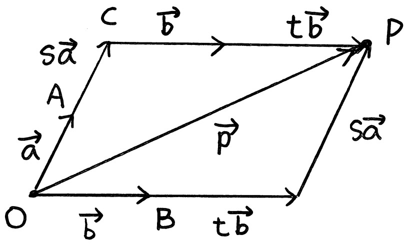
$\Longleftrightarrow 18-2x=18-9x+x^2$

$\Longleftrightarrow x(x-7)=0$

$x=0, 7$ //

(3) 一次独立とは？

$\vec{0}$でない2つのベクトル$\vec{a}$、$\vec{b}$が平行でないとする。



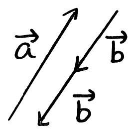
$$\underbrace{\vec{p} = s\vec{a} + t\vec{b}}_{\text{一次結合}}$$

$\vec{0}$でない$\vec{a}$、$\vec{b}$が平行でないとき、

$s\vec{a} + t\vec{b} = s'\vec{a} + t'\vec{b}$ (s, t, s', t'：実数)

$\Longleftrightarrow$ $s = s'$ かつ $t = t'$

特に、$s' = t' = 0$ のとき、

(


平行のとき
①は
成立しない
$\vec{a} + 2\vec{b} = \vec{0}$
)

$\boxed{s\vec{a} + t\vec{b} = \vec{0} \Longleftrightarrow s = t = 0 \cdots ①}$

$\vec{a}$と$\vec{b}$が一次独立

$\vec{a}$と$\vec{b}$は$\vec{0}$でなくかつ $\vec{a} \nparallel \vec{b}$

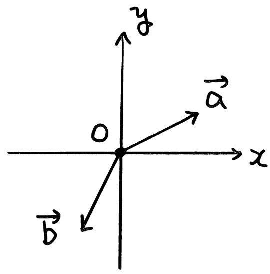
一次独立な2つのベクトル $\vec{a}$、$\vec{b}$ を用いて、任意のベクトル$\vec{p}$は、$\vec{p} = s\vec{a} + t\vec{b}$ 形に唯一の実数 s、tを用いて表せる。

例 $\vec{a}=(2, 1)$、$\vec{b}=(-1, -2)$、$\vec{c}=(17, 4)$ とする。

このとき、$\vec{c}=k\vec{a}+l\vec{b}$ (k、l は実数)の形に表せ。

解) $(17, 4)=k(2, 1)+l(-1, -2)$

$$=(2k-l, k-2l)$$



$$\begin{cases} 2k-l=17 \cdots ① \\ k-2l=4 \cdots ② \end{cases}$$

① − ② × 2

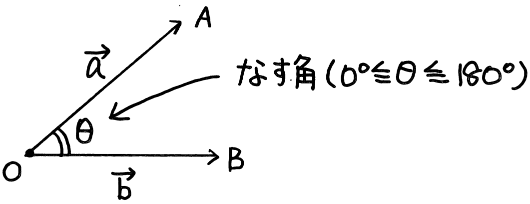
$3l=9$　∴ $l=3$, $k=10$

$\vec{c}=10\vec{a}+3\vec{b}$ //

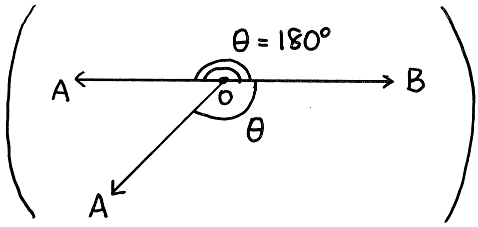
1. 内積系

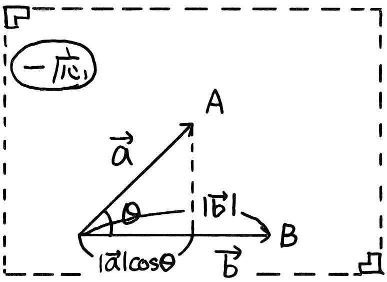
(1) 内積の基礎

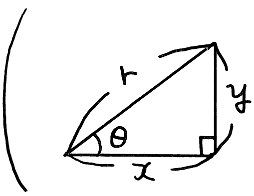
(i) 内積に慣れる



$$\underbrace{\vec{a}\cdot\vec{b}}_{\vec{a}\text{と}\vec{b}\text{の内積}} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$$







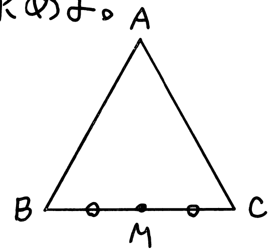
$\cos\theta = \frac{x}{r}$

$\sin\theta = \frac{y}{r}$

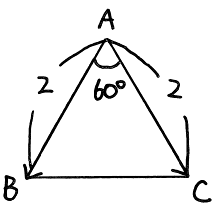
例 1辺の長さ2の正三角形ABCがあって、辺BCの中点をMとするとき、次の値を求めよ。

(1) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$ (2) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AM}$

(3) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BM}$ (4) $\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{BC}$



解) (1)

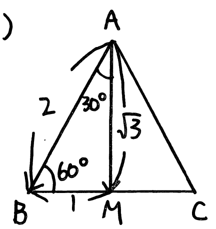


$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$

$= |\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AC}|\cos 60°$

$= 2 \times 2 \times \frac{1}{2} = 2$ //

(2)



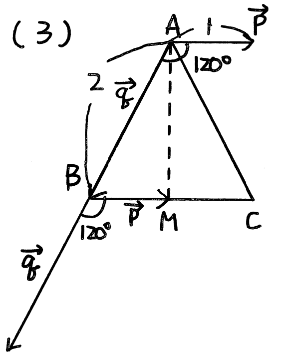
$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AM}$

$= |\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AM}|\cos 30°$

$= 2 \times \sqrt{3} \times \frac{\sqrt{3}}{2}$

$= 3$ //

(3)

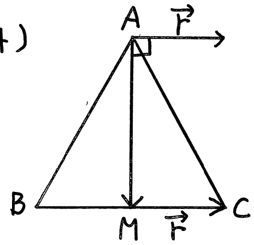


$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BM}$

$= |\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{BM}| \cos 120°$

$= 2 \times 1 \times \left(-\frac{1}{2}\right) = -1$ //

(4)



$\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BC}$

$= |\overrightarrow{AM}||\overrightarrow{BC}| \cos 90°$

$= 0$ //

(ii) 内積となす角　2つのベクトルの「なす角」を求める。

⇓

内積の「成分表示」を学ぶ。

定義

2つのベクトル$\vec{a}$、$\vec{b}$について、そのなす角をθとするとき、

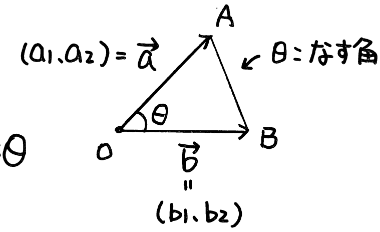
$$\boxed{\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta} \quad \cdots (*1)$$

ここで、$\vec{OA} = \vec{a} = (a_1, a_2)$、$\vec{OB} = \vec{b} = (b_1, b_2)$とすると、

$\triangle OAB$について、余弦定理により、

$$|\vec{AB}|^2 = |\vec{OA}|^2 + |\vec{OB}|^2 - 2|\vec{OA}||\vec{OB}|\cos\theta$$

$$\Longleftrightarrow |\vec{b}-\vec{a}|^2 = |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - 2|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$$



$$\Longleftrightarrow (b_1-a_1)^2 + (b_2-a_2)^2 = a_1^2 + a_2^2 + b_1^2 + b_2^2 - 2\vec{a}\cdot\vec{b}$$

$$\Longleftrightarrow b_1^2 - 2a_1b_1 + a_1^2 + b_2^2 - 2a_2b_2 + a_2^2 = a_1^2 + a_2^2 + b_1^2 + b_2^2 - 2\vec{a}\cdot\vec{b}$$

$$\Longleftrightarrow \vec{a}\cdot\vec{b} = a_1b_1 + a_2b_2$$

$\vec{a} = (a_1, a_2)$、$\vec{b} = (b_1, b_2)$とすると、

$$\boxed{\vec{a}\cdot\vec{b} = a_1b_1 + a_2b_2} \quad \cdots (*2)$$

$(*1)$、$(*2)$より、

$$\cos\theta = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}$$

$$= \frac{a_1b_1 + a_2b_2}{\sqrt{a_1^2+a_2^2}\sqrt{b_1^2+b_2^2}}$$

例1 次のベクトル$\vec{a}$、$\vec{b}$の内積$\vec{a}\cdot\vec{b}$を求め、なす角θも求めよ。

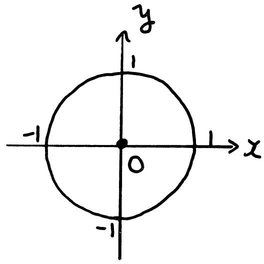
(1) $\vec{a}=(-1,3)$、$\vec{b}=(2,-1)$

(2) $\vec{a}=(3,2)$、$\vec{b}=(4,-6)$

解) (1) $\vec{a}\cdot\vec{b}=(-1)\times 2+3\times(-1)$

$$=-5$$

$$\cos\theta=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}=\frac{-5}{\sqrt{10}\times\sqrt{5}}=\frac{-5}{5\sqrt{2}}=-\frac{1}{\sqrt{2}}$$

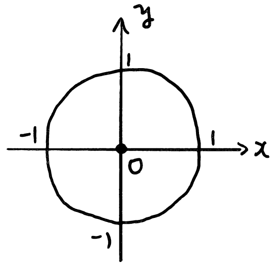


$$\theta=135^\circ$$

(2) $\vec{a}\cdot\vec{b}=3\times 4+2\times(-6)$

$$=0$$

$$\cos\theta=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}=0$$



$$\theta=90^\circ$$

$\boxed{\vec{a}\neq\vec{0}、\vec{b}\neq\vec{0}\text{のもとでは、}\quad \vec{a}\cdot\vec{b}=0 \iff \vec{a}\perp\vec{b}}$

(例2) ベクトル $\vec{a}=(\sqrt{3},1)$ と $30°$ の角をなす単位ベクトルを求めよ。

解) 求める単位ベクトルを $\vec{p}=(x, y)$ とおく。

$\boxed{\text{2条件必要}}$

- $|\vec{p}|^2=1^2$ により、$x^2+y^2=1 \cdots ①$
- また、$\vec{a}\cdot\vec{p}=|\vec{a}||\vec{p}|\cos 30°=\sqrt{3}x+y$

$\therefore \sqrt{3}=\sqrt{3}x+y \rightsquigarrow y=\sqrt{3}-\sqrt{3}x \cdots ②$

②を①に代入して、$x^2+(\sqrt{3}-\sqrt{3}x)^2=1$

$\Longleftrightarrow 4x^2-6x+2=0$

$\Longleftrightarrow 2(x-1)(2x-1)=0$

$x=1,\ \frac{1}{2}$

②より、$y=0,\ \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\therefore \vec{p}=(1, 0),\ \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ //

(iii) $|s\vec{a}+t\vec{b}|$ 形は2乗! 〈公式2〉

まず、$\vec{a}\cdot\vec{a} = |\vec{a}||\vec{a}|\cos 0$

$= |\vec{a}|^2$

公式1 $\vec{a}\cdot\vec{a} = |\vec{a}|^2$

次に、実数 s、t に対し、

$|s\vec{a}+t\vec{b}|^2 = (s\vec{a}+t\vec{b})\cdot(s\vec{a}+t\vec{b})$

$= s\vec{a}\cdot s\vec{a} + s\vec{a}\cdot t\vec{b} + t\vec{b}\cdot s\vec{a} + t\vec{b}\cdot t\vec{b}$

$= s^2|\vec{a}|^2 + 2st\,\vec{a}\cdot\vec{b} + t^2|\vec{b}|^2$

公式2 $|s\vec{a}+t\vec{b}|^2 = s^2|\vec{a}|^2 + 2st\,\vec{a}\cdot\vec{b} + t^2|\vec{b}|^2$

ついでに

- $\vec{a}\cdot\vec{b} = \vec{b}\cdot\vec{a}$
- $(k\vec{a})\vec{b} = \vec{a}\cdot(k\vec{b})$

  $= k\,\vec{a}\cdot\vec{b}$ （証明略）

$\left.\begin{array}{l}\vec{a}=(a_1, a_2)\\ \vec{b}=(b_1, b_2)\\ \vec{c}=(c_1, c_2)\end{array}\right\}$ に対し、

$\begin{cases}\vec{a}\cdot(\vec{b}+\vec{c}) = \vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{c} \cdots ① \\ (\vec{a}+\vec{b})\cdot\vec{c} = \vec{a}\cdot\vec{c}+\vec{b}\cdot\vec{c} \cdots ②\end{cases}$

を示す。

①について、

$\vec{a}\cdot(\vec{b}+\vec{c})$

$= (a_1, a_2)\cdot(b_1+c_1, b_2+c_2)$

$= a_1(b_1+c_1) + a_2(b_2+c_2)$

$= a_1b_1 + a_2b_2 + a_1c_1 + a_2c_2$

（証明終）

②について、

$(\vec{a}+\vec{b})\cdot\vec{c}$

$= (a_1+b_1, a_2+b_2)\cdot(c_1, c_2)$

$= (a_1+b_1)c_1 + (a_2+b_2)c_2$

$= a_1c_1 + a_2c_2 + b_1c_1 + b_2c_2$

（証明終）

例1) $|\vec{a}|=2$、$|\vec{b}|=\sqrt{2}$ で $\vec{a}$ と $\vec{b}$ のなす角が $45°$ であるとき、$2\vec{a}-\vec{b}$ の大きさを求めよ。

解) まず、$\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos 45°$

$$= 2 \times \sqrt{2} \times \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$= 2$$

このとき、

$$|2\vec{a}-\vec{b}|^2 = 4|\vec{a}|^2 - 4\vec{a}\cdot\vec{b} + |\vec{b}|^2$$

$$= 4\times 2^2 - 4\times 2 + \sqrt{2}^2$$

$$= 10$$

$\therefore |2\vec{a}-\vec{b}| = \sqrt{10}$ //

例2) $|\vec{a}|=3$、$|\vec{b}|=2$、$|2\vec{a}+\vec{b}|=2\sqrt{13}$ をみたすベクトル $\vec{a}$、$\vec{b}$ について、

(1) 内積 $\vec{a}\cdot\vec{b}$ を求めよ。

(2) $\vec{a}$ と $\vec{b}$ のなす角 θ $(0° \leqq \theta \leqq 180°)$ を求めよ。

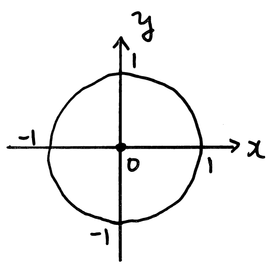
解) (1) $|2\vec{a}+\vec{b}|^2 = (2\sqrt{13})^2$ より、

$$4|\vec{a}|^2 + 4\vec{a}\cdot\vec{b} + |\vec{b}|^2 = 52$$

$\therefore \vec{a}\cdot\vec{b} = 3$ //

(2) $\cos\theta = \dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}$

$$= \frac{3}{3\times 2} = \frac{1}{2}$$



$\theta = 60°$ //

(2) 内積の応用　3つ

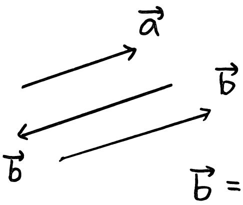
(i) 平行条件・垂直条件

$\vec{a}=(a_1, a_2)\ (\neq\vec{0})$、$\vec{b}=(b_1, b_2)\ (\neq\vec{0})$ について、

これらが

$\boxed{\text{平行}}$

$$\begin{cases} \vec{b}=k\vec{a} & (k\text{は}0\text{でない実数}) \\ a_1b_2-a_2b_1=0 \end{cases}$$



$\vec{b}=k\vec{a}$
(k：0でない実数)

$(b_1, b_2)=k(a_1, a_2)$

$\therefore\ a_1:a_2=b_1:b_2$

$a_1b_2=a_2b_1$

$a_1b_2-a_2b_1=0$

または、

$$\begin{cases} \vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos 0^\circ \\ \vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos 180^\circ \end{cases}$$

$\vec{a}\cdot\vec{b}=\pm|\vec{a}||\vec{b}|$

$\Longleftrightarrow (\vec{a}\cdot\vec{b})^2=|\vec{a}|^2|\vec{b}|^2$

$\Longleftrightarrow (a_1b_1+a_2b_2)^2=(a_1^2+a_2^2)(b_1^2+b_2^2)$

$\Longleftrightarrow a_1^2b_1^2+2a_1a_2b_1b_2+a_2^2b_2^2$
$\qquad = a_1^2b_1^2+a_1^2b_2^2+a_2^2b_1^2+a_2^2b_2^2$

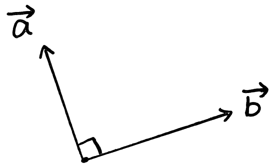
$\Longleftrightarrow a_1^2b_2^2-2a_1a_2b_1b_2+a_2^2b_1^2=0$

$\Longleftrightarrow (a_1b_2-a_2b_1)^2=0$

$\Longleftrightarrow a_1b_2-a_2b_1=0$

$\boxed{\text{垂直}}$

$$\begin{cases} \vec{a}\cdot\vec{b}=0 \\ a_1b_1+a_2b_2=0 \end{cases}$$



$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos 90^\circ$
$\qquad =0$

$\therefore\ a_1b_1+a_2b_2=0$

例 (1) $\vec{a}=(3, x)$、$\vec{b}=(-1, 6)$ が $\boxed{\text{平行}}$ になるように、

実数 x の値を求めよ。

(2) $\vec{a}=(3, 1)$ に $\boxed{\text{垂直}}$ な単位ベクトルを求めよ。

解) (1) $3\times 6 - x\times(-1)=0$ 　$\therefore x=-18$ //

(2) 求めるベクトルを、$\vec{p}=(x, y)$ とすると、

○ $|\vec{p}|^2=1^2$ より、$x^2+y^2=1$ …①

○ $\vec{a}\cdot\vec{p}=3x+1\times y=0$ 　$\therefore y=-3x$ …②

② を ① に代入 $x^2+(-3x)^2=1$

$\therefore 10x^2=1 \longrightarrow x=\pm\frac{1}{\sqrt{10}}$

② によって、$y=(-3)\times\left(\pm\frac{1}{\sqrt{10}}\right)$

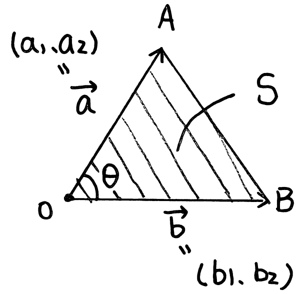
$=\mp\frac{3}{\sqrt{10}}$

$\therefore \vec{p}=\left(\frac{1}{\sqrt{10}}, -\frac{3}{\sqrt{10}}\right), \left(-\frac{1}{\sqrt{10}}, \frac{3}{\sqrt{10}}\right)$ //

(ii) 三角形の面積

△OABについて、

$$\begin{cases} \overrightarrow{OA} = \vec{a} = (a_1, a_2) \\ \overrightarrow{OB} = \vec{b} = (b_1, b_2) \end{cases}$$ とし



面積をSとすると、

$$S = \begin{cases} \frac{1}{2}\sqrt{|\vec{a}|^2|\vec{b}|^2 - (\vec{a}\cdot\vec{b})^2} \\ \frac{1}{2}|a_1b_2 - a_2b_1| \end{cases}$$

$S = \frac{1}{2}|\vec{a}||\vec{b}|\sin\theta$ について、

$$S^2 = \frac{1}{4}|\vec{a}|^2|\vec{b}|^2\sin^2\theta$$

$$= \frac{1}{4}|\vec{a}|^2|\vec{b}|^2(1-\cos^2\theta)$$

$$= \frac{1}{4}(|\vec{a}|^2|\vec{b}|^2 - |\vec{a}|^2|\vec{b}|^2\cos^2\theta)$$

$$\therefore S = \frac{1}{2}\sqrt{|\vec{a}|^2|\vec{b}|^2 - (\vec{a}\cdot\vec{b})^2}$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{(a_1^2+a_2^2)(b_1^2+b_2^2) - (a_1b_1+a_2b_2)^2}$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{a_1^2b_1^2 + a_1^2b_2^2 + a_2^2b_1^2 + a_2^2b_2^2 - (a_1^2b_1^2 + 2a_1a_2b_1b_2 + a_2^2b_2^2)}$$

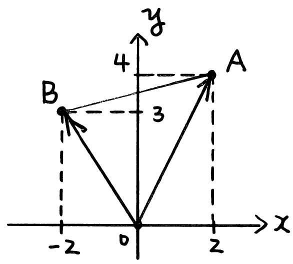
$$= \frac{1}{2}\sqrt{a_1^2b_2^2 - 2a_1a_2b_1b_2 + a_2^2b_1^2}$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{(a_1b_2 - a_2b_1)^2}$$

$$= \frac{1}{2}|a_1b_2 - a_2b_1|$$

例 2点 A(2、4)、B(−2、3) と原点Oについて、
∠AOB = θ とするとき、cosθ を求め、また、
三角形 OAB の面積 S を求めよ。

解) $\overrightarrow{OA} = (2, 4)$、$\overrightarrow{OB} = (-2, 3)$



$$\cos\theta = \frac{\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}}{|\overrightarrow{OA}||\overrightarrow{OB}|}$$

$$= \frac{2\times(-2)+4\times3}{\sqrt{2^2+4^2}\times\sqrt{(-2)^2+3^2}}$$

$$= \frac{8}{2\sqrt{5}\times\sqrt{13}} = \frac{4}{\sqrt{65}}$$ //

(解1)

$$\sin\theta = \sqrt{1-\cos^2\theta}$$

$$= \sqrt{1-\left(\frac{4}{\sqrt{65}}\right)^2}$$

$$= \frac{7}{\sqrt{65}}$$

$$S = \frac{1}{2}|\overrightarrow{OA}||\overrightarrow{OB}|\sin\theta$$

$$= \frac{1}{2}\times2\sqrt{5}\times\sqrt{13}\times\frac{7}{\sqrt{65}} = 7$$ //

(解2)

$$S = \frac{1}{2}\sqrt{|\overrightarrow{OA}|^2|\overrightarrow{OB}|^2-(\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB})^2}$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{20\times13-8^2}$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{196}$$

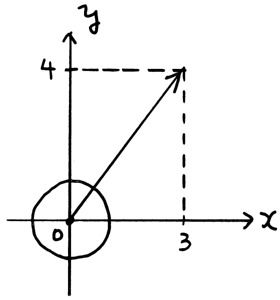
$$= \frac{1}{2}\times14$$

$$= 7$$ //

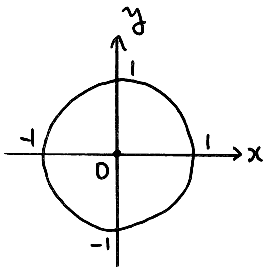
(iii) 内積と最大最小

例 実数 x、y が $x^2+y^2=1$ $(y \geqq 0)$ をみたすとき、
$3x+4y$ の最大値・最小値を求めよ。

解) $\vec{a}=(3,4)$、$\vec{b}=(x,y)$ とし、$\vec{a}$ と $\vec{b}$ のなす角を
θ とする。$(0^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ)$



$$
\begin{aligned}
3x+4y &= (3,4)\cdot(x,y) \\
&= |\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta \\
&= \underline{5\cos\theta}
\end{aligned}
$$



$\begin{cases} \theta \text{ が最小のとき最大} \\ \theta \text{ が最大のとき最小} \end{cases}$

$\begin{cases} \text{最大値は } 5\cos 0^\circ = 5 \text{〃} \\ \text{最小値は } 3\times(-1)+4\times 0 = -3 \text{〃} \end{cases}$

2. 位置ベクトル系

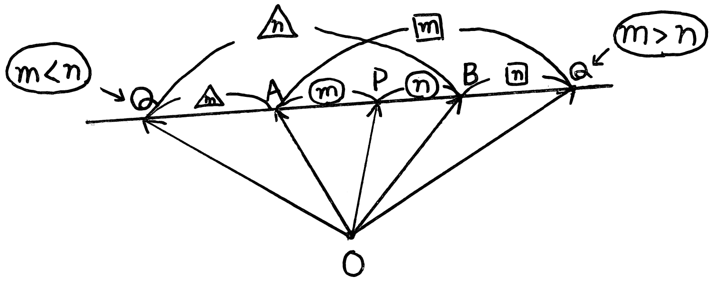
定点Oを定め、それを始点とし、Pを終点とするベクトル $\overrightarrow{OP}$ を点Oに関するPの「位置ベクトル」といい、$P(\vec{p})$ と表す。

(一般に、2点 $A(\vec{a})$、$B(\vec{b})$ に対し、$\overrightarrow{AB} = \vec{b} - \vec{a}$)

(1) 一次独立

準備(内分・外分)

2点 $A(\vec{a})$、$B(\vec{b})$ に対して、



ABを $m:n$ の比に内分する点をP、外分する点をQとする。($m>0$、$n>0$)

$$\overrightarrow{OP} = \frac{m\overrightarrow{OB} + n\overrightarrow{OA}}{m+n} = \frac{n}{m+n}\overrightarrow{OA} + \frac{m}{m+n}\overrightarrow{OB} = (1-t)\overrightarrow{OA} + t\overrightarrow{OB}$$

$$\overrightarrow{OQ} = \frac{m\overrightarrow{OB} - n\overrightarrow{OA}}{m-n} = \frac{-n}{m-n}\overrightarrow{OA} + \frac{m}{m-n}\overrightarrow{OB} = (1-t)\overrightarrow{OA} + t\overrightarrow{OB}$$

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AP}$$
$$= \overrightarrow{OA} + \frac{m}{m+n}\overrightarrow{AB}$$
$$= \overrightarrow{OA} + \frac{m}{m+n}(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA})$$
$$= \frac{(m+n)\overrightarrow{OA} + m(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA})}{m+n}$$
$$= \frac{m\overrightarrow{OB} + n\overrightarrow{OA}}{m+n}$$

$m > n$

$$\overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AQ}$$
$$= \overrightarrow{OA} + \frac{m}{m-n}\overrightarrow{AB}$$

$m < n$

$$\overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AQ}$$
$$= \overrightarrow{OA} - \frac{m}{n-m}\overrightarrow{AB}$$

$$= \overrightarrow{OA} + \frac{m}{m-n}(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA})$$
$$= \frac{(m-n)\overrightarrow{OA} + m(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA})}{m-n}$$
$$= \frac{m\overrightarrow{OB} - n\overrightarrow{OA}}{m-n}$$

(i) 点の位置

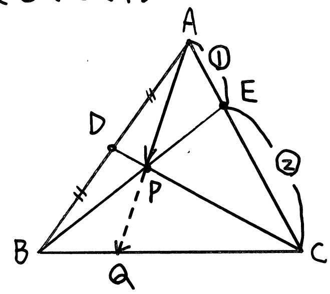
点の位置を確定する。

例 三角形ABCにおいて、辺ABの中点D、辺ACを1:2に内分する点をEとする。さらに、線分BEと線分CDとの交点をPとする。

(1) ベクトル$\overrightarrow{AP}$をベクトル$\overrightarrow{AB}$、$\overrightarrow{AC}$を用いて表せ。

(2) 点Pの位置を説明せよ。

解) (1) $BP:PE = t:1-t$ とすると $(0<t<1)$



$$\overrightarrow{AP} = \frac{(1-t)\overrightarrow{AB} + t\overrightarrow{AE}}{t+(1-t)}$$

$$= (1-t)\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}t\overrightarrow{AC} \cdots ①$$

$DP:PC = s:1-s$ とすると、$(0<s<1)$

$$\overrightarrow{AP} = \frac{(1-s)\overrightarrow{AD} + s\overrightarrow{AC}}{s+(1-s)}$$

$$= \frac{1}{2}(1-s)\overrightarrow{AB} + s\overrightarrow{AC} \cdots ②$$

$\overrightarrow{AB}$と$\overrightarrow{AC}$は一次独立なので、①、②から、

$$\begin{cases} 1-t = \frac{1}{2}(1-s) \cdots ③ \\ \frac{1}{3}t = s \cdots ④ \end{cases}$$

④から $t=3s$ を③に代入。

$1-3s = \frac{1}{2}(1-s)$

$\iff 2-6s = 1-s$

$\iff s = \frac{1}{5}$ 、 $t = \frac{3}{5}$

①より、$\overrightarrow{AP} = \frac{2}{5}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{5}\overrightarrow{AC}$ //

(2) $\overrightarrow{AP} = \frac{2}{5}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{5}\overrightarrow{AC}$

$$= \frac{2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}}{5}$$

$$= \frac{3}{5} \times \frac{2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}}{3}$$

点Pは、BCを1:2に内分する点をQとすると、

AQを3:2に内分する点〃

(ii) 面積比

△ABCと点Pにおいて、 $l\overrightarrow{AP}+m\overrightarrow{BP}+n\overrightarrow{CP}=\vec{0}$ $(l\overrightarrow{PA}+m\overrightarrow{PB}+n\overrightarrow{PC}=\vec{0})$　$(l>0、m>0、n>0)$ 穴埋め 検算)用 のとき、面積比 $(\triangle PBC):(\triangle PCA):(\triangle PAB)=l:m:n$

例 △ABCと点Pにおいて、等式 $3\overrightarrow{AP}+2\overrightarrow{BP}+\overrightarrow{CP}=\vec{0}$ が成り立っている。

(1) 点Pはどのような位置にあるか。

(2) 面積の比 △PBC：△PCA：△PABを求めよ。

解) (1) $3\overrightarrow{AP}+2\overrightarrow{BP}+\overrightarrow{CP}=\vec{0}$

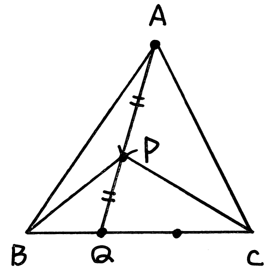
$3\overrightarrow{AP}+2(\overrightarrow{AP}-\overrightarrow{AB})+(\overrightarrow{AP}-\overrightarrow{AC})=\vec{0}$

$\iff 6\overrightarrow{AP}=2\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$

$\iff \overrightarrow{AP}=\dfrac{2\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}}{6}$

$=\dfrac{3}{6}\times\dfrac{2\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}}{3}$

$=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{2\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}}{3}$



辺BCを1：2に内分する点をQとすると、

点PはAQの中点となる。//

(2) $\triangle ABC$の面積をSとし、

$\triangle PBC$、$\triangle PCA$、$\triangle PAB$の面積をそれぞれ

$(\triangle PBC)$、$(\triangle PCA)$、$(\triangle PAB)$と表す。

$(\triangle PBC) = \frac{1}{2}S$

$(\triangle PCA) = \frac{1}{2}(\triangle AQC) = \frac{1}{3}S$

$(\triangle PAB) = \frac{1}{2}(\triangle ABQ) = \frac{1}{6}S$

したがって、$(\triangle PBC):(\triangle PCA):(\triangle PAB) = \frac{1}{2}S : \frac{1}{3}S : \frac{1}{6}$

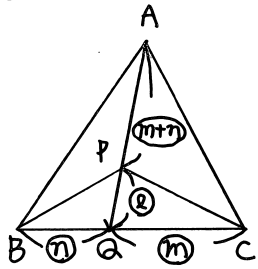
$= 3:2:1$ //

(確認)

$l\overrightarrow{AP} + m\overrightarrow{BP} + n\overrightarrow{CP} = \vec{0}$

$\iff l\overrightarrow{AP} + m(\overrightarrow{AP} - \overrightarrow{AB}) + n(\overrightarrow{AP} - \overrightarrow{AC}) = \vec{0}$

$\iff (l+m+n)\overrightarrow{AP} = m\overrightarrow{AB} + n\overrightarrow{AC}$



$\iff \overrightarrow{AP} = \dfrac{m\overrightarrow{AB} + n\overrightarrow{AC}}{l+m+n}$

$= \dfrac{m+n}{l+m+n} \times \dfrac{m\overrightarrow{AB} + n\overrightarrow{AC}}{m+n}$

$(\triangle PBC) = \dfrac{l}{l+m+n}S$

$(\triangle PCA) = \dfrac{m+n}{l+m+n}(\triangle AQC) = \dfrac{m}{l+m+n}S$

$(\triangle PAB) = \dfrac{m+n}{l+m+n}(\triangle ABQ) = \dfrac{n}{l+m+n}S$

したがって、面積比

$(\triangle PBC):(\triangle PCA):(\triangle PAB) = \dfrac{l}{l+m+n}S : \dfrac{m}{l+m+n}S : \dfrac{n}{l+m+n}S$

$= l:m:n$

領域

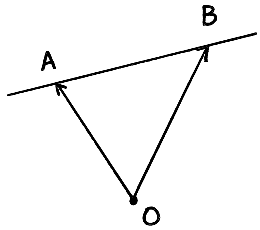
「基本5パターン」をベースに。

三角形OABに対し、s、tは実数の変数とし、

$\overrightarrow{OP} = s\overrightarrow{OA} + t\overrightarrow{OB}$

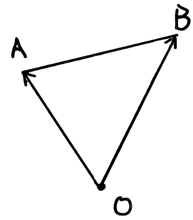
とするとき、点Pの存在範囲について。

(i) $s+t=1$ のとき、



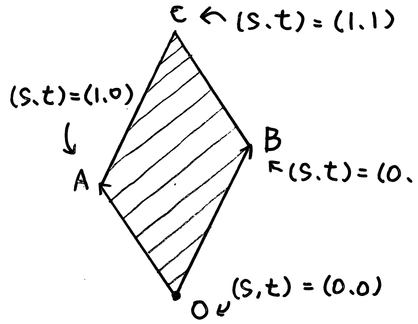
点Pは「直線AB上」

(ii) $s+t=1$、$s \geqq 0$、$t \geqq 0$ のとき、



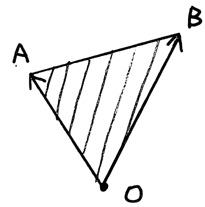
点Pは「線分AB上」

(iii) $0 \leqq s \leqq 1$、$0 \leqq t \leqq 1$ のとき、



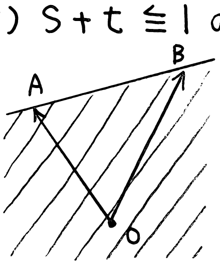
点Pは「平行四辺形OACBとその内部」

(iv) $s+t \leqq 1$、$s \geqq 0$、$t \geqq 0$ のとき、



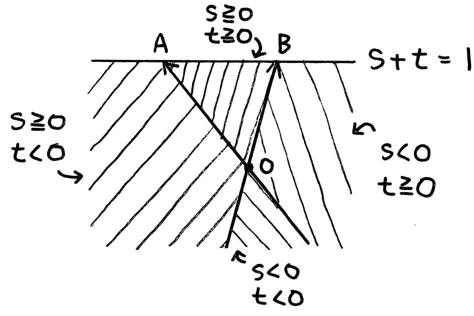
点Pは「△OABとその内部」

(v) $s+t \leqq 1$ のとき、



点Pは「直線ABとその O側」

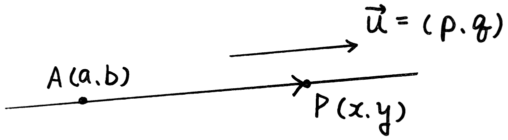
詳細 $\overrightarrow{OP} = s\overrightarrow{OA} + t\overrightarrow{OB}$



(2) ベクトル方程式

(i) 直線の方程式

(ア) 通る点と方向ベクトルを用いて、



点A (a, b) を通り、

方向ベクトル $\vec{u} = (p, q)$ の ベクトル方程式は、

$$\boxed{\overrightarrow{AP} = t\vec{u} \quad (t : 実数)}$$

媒介変数
(パラメータ)

$$\boxed{\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + t\vec{u}}$$

(x, y) (a, b) (p, q)

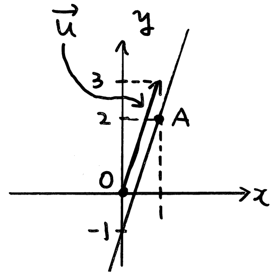
$$\boxed{\begin{array}{l} x = a + pt \\ y = b + qt \end{array}}$$

例1 点A $(1, 2)$ を通り、方向ベクトル

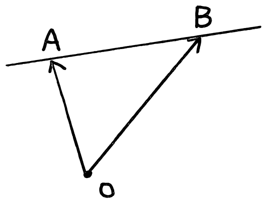
$\vec{u} = (1, 3)$ の 直線のベクトル方程式 は

$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + t\vec{u}$

$$\therefore \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 + 3t \end{cases}$$ (t : パラメータ)



(イ) 通る2点を用いて、



2点A、Bを通る直線のベクトル方程式は、

$$\boxed{\overrightarrow{OP} = \underline{s\overrightarrow{OA} + t\overrightarrow{OB}} \quad (s+t=1)}$$

$$/\!/ \quad (1-t)\overrightarrow{OA} + t\overrightarrow{OB}$$

(例2) 2点A(2、3)、B(−1、2)を通る直線の

ベクトル方程式は、

$$\overrightarrow{OP} = s\overrightarrow{OA} + t\overrightarrow{OB} \quad (s+t=1)$$

$$= (1-t)\overrightarrow{OA} + t\overrightarrow{OB}$$

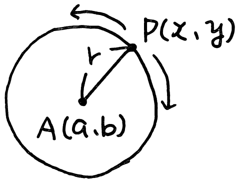
$$\therefore (x, y) = (1-t)(2, 3) + t(-1, 2)$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-2t \\ 3-3t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -t \\ 2t \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2-3t \\ 3-t \end{pmatrix}$$

よって、$\begin{cases} x = 2-3t \\ y = 3-t \end{cases}$ (t:パラメータ)

(ii) 円の方程式



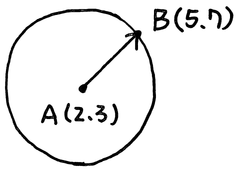
中心 A(a, b)、半径 r の円のベクトル方程式は

$|\overrightarrow{AP}| = r$

$$\boxed{|\underset{(x,\,y)}{\overrightarrow{OP}} - \underset{(a,\,b)}{\overrightarrow{OA}}| = r}$$

$$\boxed{(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2}$$

例1　点 A(2, 3) を中心、B(5, 7) を通る円の方程式は、



$|\overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OA}| = |\overrightarrow{AB}|$

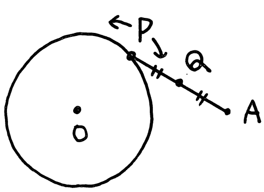
$\Longleftrightarrow |\overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OA}| = 5$

$\therefore (x-2)^2 + (y-3)^2 = 25$

例2　点Pが、中心O、半径1の円周上を動くとする。

定点Aに対し、APの中点Qは、どんな図形をえがくか？

解) 題意より、$|\overrightarrow{OP}| = 1$ …①



また、$\overrightarrow{OQ} = \dfrac{\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OP}}{2}$ から、

$2\overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OP}$

$\therefore \overrightarrow{OP} = 2\overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OA}$

① に代入して、$|2\overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OA}| = 1$

$\therefore |\overrightarrow{OQ} - \frac{1}{2}\overrightarrow{OA}| = \frac{1}{2}$

よって点Qは、OAの中点A′を中心とし、半径$\frac{1}{2}$の円をえがく〃

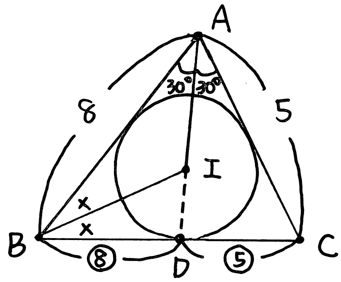
3. 「内積系」と「位置ベクトル系」の融合

例 $\triangle ABC$において、$\angle A=60°$、$AB=8$、$AC=5$とする。

$\triangle ABC$の中心をI、$\overrightarrow{AB}=\vec{a}$、$\overrightarrow{AC}=\vec{b}$とするとき、

$\overrightarrow{AI}=\boxed{}\,\vec{a}+\boxed{}\,\vec{b}$であり、また、その長さは$|\overrightarrow{AI}|=\boxed{}$である。

解) $\triangle ABC$について余弦定理より、



$$BC^2=8^2+5^2-2\times8\times5\times\cos60°$$

$$=64+25-40$$

$$=49 \qquad \therefore BC=7$$

よって、$BD:DC=8:5$から、

$$BD=7\times\frac{8}{13}=\frac{56}{13}$$

したがって、$AI:ID=AB:BD$

$$=8:\frac{56}{13}$$

$$=13:7$$

$$\overrightarrow{AI}=\frac{13}{20}\overrightarrow{AD}$$

$$=\frac{13}{20}\times\frac{5\overrightarrow{AB}+8\overrightarrow{AC}}{13}$$

$$=\frac{1}{4}\vec{a}+\frac{2}{5}\vec{b}$$ 〃

ここで、$|\vec{a}| = 8$、$|\vec{b}| = 5$
$$\left.\begin{array}{l} |\vec{a}| = 8,\ |\vec{b}| = 5 \\ \vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos 60^\circ = 20 \end{array}\right\} ①$$

$$|\overrightarrow{AI}|^2 = \left|\frac{1}{4}\vec{a} + \frac{2}{5}\vec{b}\right|^2$$
$$= \frac{1}{16}|\vec{a}|^2 + \frac{1}{5}\vec{a}\cdot\vec{b} + \frac{4}{25}|\vec{b}|^2$$
$$= \frac{1}{16}\times 64 + \frac{1}{5}\times 20 + \frac{4}{25}\times 25 \quad (①より)$$
$$= 12$$

$\therefore |\overrightarrow{AI}| = 2\sqrt{3}$〃

空間ベクトル

１　内積系

（１）内積の基本

(i)　ベクトルの大きさ

(ii)　内積となす角

（２）内積の応用

(i)　２つのﾍﾞｸﾄﾙに垂直なﾍﾞｸﾄﾙ

(ii)　正射影ベクトル

２　位置ベクトル系

（１）一次独立（同一平面上を準備）

(i)　基本

(ii)　点の位置

（２）ベクトル方程式

(i)　直線の方程式

(ii)　球面の方程式

(iii)　平面の方程式（課程外）

「互いの関係」

①２直線

②直線と球面

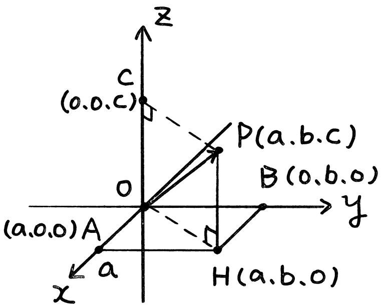
③直線と平面

３　「内積系」と「位置ベクトル系」の融合

1. 内積系

(1) 内積の基本

(i) ベクトルの大きさ



$|\overrightarrow{OP}|^2 = |\overrightarrow{OH}|^2 + |\overrightarrow{HP}|^2$

$= |\overrightarrow{OA}|^2 + |\overrightarrow{OB}|^2 + |\overrightarrow{OC}|^2$

$= a^2 + b^2 + c^2$

まとめ1

Oを原点、P(a、b、c)とするとき、

$|\overrightarrow{OP}| = \sqrt{a^2+b^2+c^2} \leftarrow \overrightarrow{OP} = (a.b.c)$

まとめ2

2点間のキョリ

A(a_1、a_2、a_3)、B(b_1、b_2、b_3)について、

$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(b_1-a_1)^2+(b_2-a_2)^2+(b_3-a_3)^2}$

$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = (b_1-a_1、b_2-a_2、b_3-a_3)$

㊥ 空間に3点 A(3、-1、2)、B(1、2、3)、C(4、2、0) がある。三角形ABCはどんな形の三角形か。

解) $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$

$= (1, 2, 3) - (3, -1, 2)$

$= (-2, 3, 1)$

より、

$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(-2)^2 + 3^2 + 1^2}$

$= \sqrt{14}$

$\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OB}$

$= (4, 2, 0) - (1, 2, 3)$

$= (3, 0, -3)$

より、

$|\overrightarrow{BC}| = \sqrt{3^2 + 0^2 + (-3)^2}$

$= 3\sqrt{2}$

$\overrightarrow{CA} = \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OC}$

$= (3, -1, 2) - (4, 2, 0)$

$= (-1, -3, 2)$

より、

$|\overrightarrow{CA}| = \sqrt{(-1)^2 + (-3)^2 + 2^2}$

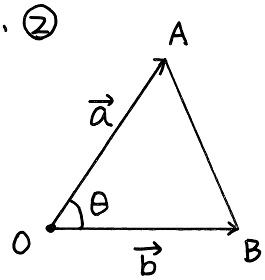
$= \sqrt{14}$

よって、AB = AC の二等辺三角形〃

(ii) 内積となす角

2つのベクトル $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$、$\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$ のなす角を θ とすると、

$$\begin{cases} \vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta \cdots ① \\ \vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 \cdots ② \end{cases}$$



①、② より、

$$\cos\theta = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}$$

右の △OAB について余弦定理を用いると、

$$|\overrightarrow{AB}|^2 = |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - 2|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$$

$$\therefore (b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2 + (b_3 - a_3)^2 = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 - 2\vec{a} \cdot \vec{b}$$

$$\Longleftrightarrow b_1^2 - 2a_1 b_1 + a_1^2 + b_2^2 - a_2 b_2 + a_2^2 + b_3^2 - 2a_3 b_3 + a_3^2 = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 - 2\vec{a} \cdot \vec{b}$$

$$\Longleftrightarrow 2\vec{a} \cdot \vec{b} = 2a_1 b_1 + 2a_2 b_2 + 2a_3 b_3$$

$$\Longleftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$$

㊀例 次の2つのベクトル$\vec{a}$、$\vec{b}$の内積とそのなす角θを求めよ。($0° \leqq \theta \leqq 180°$)

(1) $\vec{a} = (1, -1, 1)$、$\vec{b} = (1, \sqrt{6}, -1)$

(2) $\vec{a} = (3, 2, -4)$、$\vec{b} = (2, 3, 3)$

解) (1) $|\vec{a}| = \sqrt{1^2 + (-1)^2 + 1^2} = \sqrt{3}$

$|\vec{b}| = \sqrt{1^2 + (\sqrt{6})^2 + (-1)^2} = 2\sqrt{2}$

$\vec{a} \cdot \vec{b} = 1 \times 1 + (-1) \times \sqrt{6} + 1 \times (-1) = -\sqrt{6}$〃

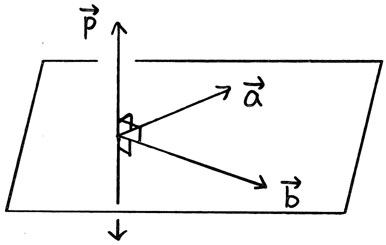
$\therefore \cos\theta = \dfrac{-\sqrt{6}}{\sqrt{3} \times 2\sqrt{2}} = -\dfrac{1}{2}$　よって、$\theta = 120°$〃

(2) $\vec{a} \cdot \vec{b} = 3 \times 2 + 2 \times 3 + (-4) \times 3 = 0$〃

$\cos\theta = \dfrac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|} = 0$　よって、$\theta = 90°$〃

(2) 内積の応用

(i) 2つのベクトルに垂直なベクトル



㊎ 2つのベクトル $\vec{a}=(1,2,-3)$、$\vec{b}=(3,-1,4)$ の両方に垂直なベクトルで、大きさが1のものを求めよ。

(解1) ふつうに。

$\vec{a}$ と $\vec{b}$ の両方に垂直なベクトルの1つを $\vec{p}=(x,y,z)\,(\neq 0)$ とすると、

$$\left(\begin{array}{l}\vec{a}\perp\vec{p}\ \text{なので、}\ \vec{a}\cdot\vec{p}=0\\ \vec{b}\perp\vec{p}\ \text{なので、}\ \vec{b}\cdot\vec{p}=0\end{array}\right)$$

よって、
$$\begin{cases} x+2y-3z=0 & \cdots ① \\ 3x-y+4z=0 & \cdots ② \end{cases}$$

①+②×2　$7x+5z=0$

$\therefore\ z=-\frac{7}{5}x\ \cdots ③$

③を①に代入　$x+2y+\frac{21}{5}x=0$

$\therefore\ y=-\frac{13}{5}x\ \cdots ④$

③、④により、

$\vec{p} = \left(x,\ -\frac{13}{5}x,\ -\frac{7}{5}x\right)$

$\quad /\!/ (5, -13, 7) = \vec{q}$ とおくと、

$|\vec{q}| = \sqrt{5^2 + (-13)^2 + (-7)^2}$

$\quad = \sqrt{243} = 9\sqrt{3}$

求めるベクトルは、$\pm \frac{1}{9\sqrt{3}}(5, -13, -7)$〃

(解2)「外積」を利用

$\vec{a} = (1, 2, -3)$

$\vec{b} = (3, -1, 4)$ の両方に垂直なベクトルの1つは、

(つづき)

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 1 \\ 3 & -1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

$(5, -13, -7)$

2つのベクトル $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$

$\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$

について、
$$\left(\begin{array}{ccccccc} a_1 & & a_2 & & a_3 & & a_1 \\ & \times & & \times & & \times & \\ b_1 & z & b_2 & x & b_3 & y & b_1 \end{array}\right)$$

外積

$$\underbrace{\vec{a} \times \vec{b}}_{\vec{p}} = (a_2b_3 - a_3b_2,\ a_3b_1 - a_1b_3,\ a_1b_2 - a_2b_1)$$

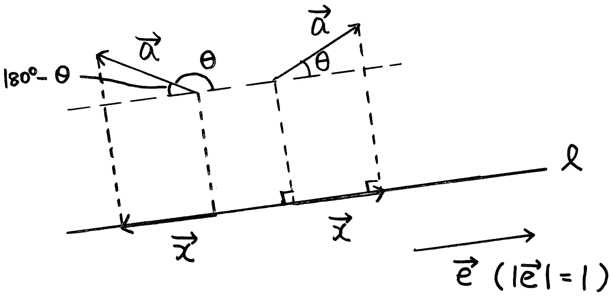
$\vec{p}$とおく。

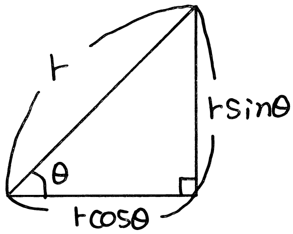
$$\begin{aligned} \vec{p} \cdot \vec{a} &= (a_2b_3 - a_3b_2) \times a_1 + (a_3b_1 - a_1b_3) \times a_2 \\ &\quad + (a_1b_2 - a_2b_1) \times a_3 \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \vec{p} \cdot \vec{b} &= (a_2b_3 - a_3b_2) \times b_1 + (a_3b_1 - a_1b_3) \times b_2 \\ &\quad + (a_1b_2 - a_2b_1) \times b_3 \\ &= 0 \end{aligned}$$

よって、$\vec{p} \perp \vec{a}$ かつ $\vec{p} \perp \vec{b}$

(ii) 正射影ベクトル

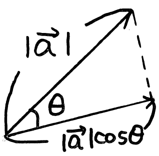




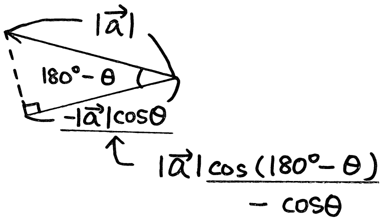
$$|\vec{a}\cdot\vec{e}| = |\vec{a}||\vec{e}||\cos\theta|$$

$$= |\vec{a}||\cos\theta| = |\vec{x}|$$

$\boxed{0° < \theta < 90°}$



$\boxed{90° < \theta \leqq 180°}$



$$|\vec{x}| = \begin{cases} |\vec{a}|\cos\theta \quad (0° \leqq \theta < 90°) & \rightarrow \vec{x} = |\vec{x}|\cdot\vec{e} \\ -|\vec{a}|\cos\theta \ (90° < \theta \leqq 180°) & \rightarrow \vec{x} = -|\vec{x}|\cdot\vec{e} \end{cases}$$

まとめ

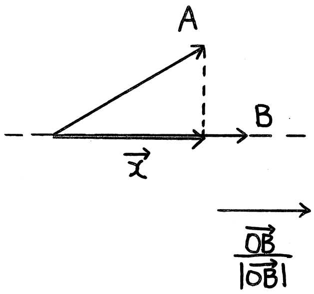
$\vec{a}$の直線ℓへの正射影ベクトルを

$\vec{x}$とすると、(ℓ方向の単位ベクトルを$\vec{e}$)

$|\vec{x}| = |\vec{a}\cdot\vec{e}|$

$\vec{x} = (\vec{a}\cdot\vec{e})\vec{e}$

例



$$\vec{x} = \left(\overrightarrow{OA} \cdot \frac{\overrightarrow{OB}}{|\overrightarrow{OB}|}\right)\frac{\overrightarrow{OB}}{|\overrightarrow{OB}|}$$

$$= \frac{\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB}}{|\overrightarrow{OB}|^2}\overrightarrow{OB}$$

〈その他、平面ベクトルからの継承事項〉〈6つ〉

① $|s\vec{a}+t\vec{b}|$ 形は2乗

$$\begin{cases} \vec{a}\cdot\vec{a} = |\vec{a}|^2 \\ |s\vec{a}+t\vec{b}|^2 = s^2|\vec{a}|^2 + 2st\,\vec{a}\cdot\vec{b} + t^2|\vec{b}|^2 \end{cases}$$

例1　$\vec{a}=(0,1,2)$、$\vec{b}=(2,4,6)$ とする。
$\vec{x}=\vec{a}+t\vec{b}$（t は実数）について、$|\vec{x}|$ の最小値を求めよ。

解）
$$\begin{cases} |\vec{a}|^2 = 0^2+1^2+2^2 = 5 \\ |\vec{b}|^2 = 2^2+4^2+6^2 = 56 \\ \vec{a}\cdot\vec{b} = 0\times 2 + 1\times 4 + 2\times 6 = 16 \end{cases}$$

このとき、

$$\begin{aligned} |\vec{x}|^2 &= |\vec{a}+t\vec{b}|^2 \\ &= |\vec{a}|^2 + 2t\,\vec{a}\cdot\vec{b} + t^2|\vec{b}|^2 \\ &= 5 + 32t + 56t^2 \\ &= 56\left\{t^2+\frac{4}{7}t+\left(\frac{2}{7}\right)^2-\left(\frac{2}{7}\right)^2\right\}+5 \\ &= 56\left(t+\frac{2}{7}\right)^2 - 56\times\frac{4}{49}+5 \\ &= 56\left(t+\frac{2}{7}\right)^2+\frac{3}{7} \end{aligned}$$

$t=-\frac{2}{7}$ のとき、最小値 $\sqrt{\frac{3}{7}} = \frac{\sqrt{21}}{7}$ //

(別解) $\vec{x}=\vec{a}+t\vec{b}$

$=(0,1,2)+t(2,4,6)$

$=(2t,1+4t,2+6t)$

$\therefore |\vec{x}|^2=(2t)^2+(1+4t)^2+(2+6t)^2$

$\hookrightarrow 5+32t+56t^2$

$\vdots$

② 平行条件

$\vec{0}$でない2つのベクトル$\vec{a}$と$\vec{b}$が平行

のとき、$\boxed{\vec{a}=k\vec{b}}$ (kは0でない実数)

例2 2つのベクトル $\vec{p}=(2m-1,n,-2)$、$\vec{q}=(5,-18,-6)$

が平行となるような実数m、nの値を求めよ。

解) $\vec{p}\parallel\vec{q}$となるとき、実数kを用いて、

$\vec{p}=k\vec{q}$ (k：実数)

と表せる。

つまり、$(2m-1,n,-2)=k(5,-18,-6)$

$=(5k,-18k,-6k)$

$$\begin{cases} 2m-1=5k \\ n=-18k \\ -2=-6k \end{cases}$$

よって、$k=\frac{1}{3}$、$n=-6$〃 $m=\frac{4}{3}$〃

③ 同一直線上

異なる3点A、B、Cが同一直線上にあるとき、$\boxed{\overrightarrow{AC} = k\overrightarrow{AB}}$ (k：実数)

(例3) A(−2、−2、3)、B(4、−4、6)とxy平面上の点Pが一直線上にあるとき、点Pの座標を求めよ。

解) P(X、Y、0)とおくと、実数kを用いて、

$\overrightarrow{AP} = k\overrightarrow{AB}$ …①

と表せる。

①より、$\overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OA} = k(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA})$ (Oは原点)

$\therefore \overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + k(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA})$

$= (-2, -2, 3) + k(6, -2, 3)$

$= (-2+6k, -2-2k, 3+3k)$

よって、$\begin{cases} X = -2+6k \\ Y = -2-2k \\ 0 = 3+3k \rightarrow k = -1 \end{cases}$　$X = -8$　$Y = 0$

したがって、P(−8、0、0)//

④ 内分・外分

ABを$m:n$の比に内分する点P、

$m:n$の比に外分する点Qとするとき、

$$\begin{cases} \overrightarrow{OP} = \dfrac{m\overrightarrow{OB} + n\overrightarrow{OA}}{m+n} \\ \\ \overrightarrow{OQ} = \dfrac{m\overrightarrow{OB} - n\overrightarrow{OA}}{m-n} \end{cases}$$

（Oは原点）

例4 2点 A(4、−1、2)、B(1、1、3)がある。

(1) 線分ABを2:1に内分する点Cを求めよ。

(2) 線分ABを2:1に外分する点Dを求めよ。

解) (1) $\overrightarrow{OC} = \dfrac{2\overrightarrow{OB} + 1\times\overrightarrow{OA}}{2+1}$

$= \dfrac{2(1,1,3) + (4,-1,2)}{3}$

$= \left(2, \frac{1}{3}, \frac{8}{3}\right)$ 　　　$\therefore C\left(2, \frac{1}{3}, \frac{8}{3}\right)$ //

(2) $\overrightarrow{OD} = \dfrac{2\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}}{2-1}$

$= 2(1,1,3) - (4,-1,2)$

$= (-2, 3, 4)$ 　　　$\therefore D(-2, 3, 4)$ //

⑤ 三角形の面積

三角形ABCの面積をSとすると、

$$S = \frac{1}{2}\sqrt{|\overrightarrow{AB}|^2|\overrightarrow{AC}|^2 - (\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC})^2}$$

(例5) 空間内に3点A(1、1、2)、B(1、3、1)、C(4、1、1)があるとき、△ABCの面積Sを求めよ。

解) $\overrightarrow{AB} = (0, 2, -1)$、$\overrightarrow{AC} = (3, 0, -1)$より、

$$\begin{cases} |\overrightarrow{AB}|^2 = 0^2 + 2^2 + (-1)^2 = 5 \\ |\overrightarrow{AC}|^2 = 3^2 + 0^2 + (-1)^2 = 10 \\ \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = 0\times3 + 2\times0 + (-1)\times(-1) = 1 \end{cases}$$

よって、$S = \frac{1}{2}\sqrt{5\times10 - 1^2} = \frac{7}{2}$ //

⑥ 内積と最大最小

(例6) 実数x、y、zが$x^2+y^2+z^2=4$をみたすとき、$x+2y+3z$のとりうる値の最大値と最小値を求めよ。

解) $\vec{a} = (1, 2, 3)$、$\vec{b} = (x, y, z)$とし、これらのなす角をθ ($0° \leqq \theta \leqq 180°$)とすると、

$$x + 2y + 3z = (1, 2, 3)\cdot(x, y, z)$$

$$= \vec{a}\cdot\vec{b}$$

$$= |\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$$

$$= \sqrt{1^2+2^2+3^2} \times \sqrt{x^2+y^2+z^2}\ \cos\theta$$

$$= 2\sqrt{14}\cos\theta$$

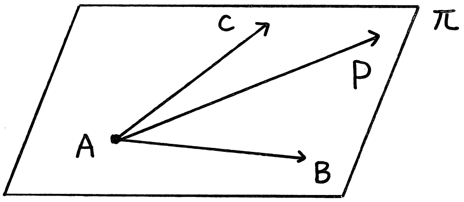
よって、$x+2y+3z$ の最大値は $2\sqrt{14}$

最小値は $-2\sqrt{14}$ //

2. 位置ベクトル系

(1) 一次独立

ア 準備(同一平面上)



一直線上にない3点A、B、Cを通る平面π上の任意の点Pは $\overrightarrow{AP} = \underbrace{s\overrightarrow{AB} + t\overrightarrow{AC}}_{\text{一次結合}}$ で表される。

$\boxed{\overrightarrow{AB}\text{と}\overrightarrow{AC}\text{は一次独立}}$

s、tは、$\overrightarrow{AP}$に対してただ1通りに定まる実数

例 3点 A(1、2、3)、B(2、1、4)、C(3、4、1)を通る平面上に点P(0、y、1)があるとき、yの値を求めよ。

解) 題意より、$\overrightarrow{AP} = s\overrightarrow{AB} + t\overrightarrow{AC}$ …①

をみたす実数s、tの組が、ただ1組定まる。

ここで、
$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$$
$$= (2、1、4) - (1、2、3)$$
$$= (1、-1、1)$$

$$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA}$$
$$= (3、4、1) - (1、2、3)$$
$$= (2、2、-2)$$

$$\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OA}$$
$$= (0、y、1) - (1、2、3)$$
$$= (-1、y-2、-2)$$

①に代入して

$$(-1,\ y-2,\ -2) = s(1,\ -1,\ 1) + t(2,\ 2,\ -2)$$

よって、
$$\begin{cases} -1 = s + 2t \quad \cdots ② \\ y - 2 = -s + 2t \quad \cdots ③ \\ -2 = s - 2t \quad \cdots ④ \end{cases}$$

②+④　$-3 = 2s$　　$\therefore\ s = -\frac{3}{2}$

②−④　$1 = 4t$　　$\therefore\ t = \frac{1}{4}$

③に代入して、

$$y - 2 = -\left(-\frac{3}{2}\right) + 2 \times \frac{1}{4}$$
$$= 2$$

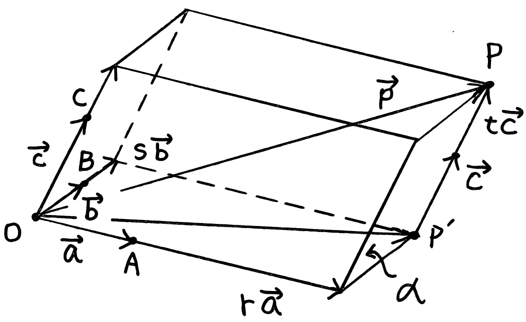
$y = 4$〃

(i) 基本

空間内の4点A、B、C、Dは同一平面上にないとし、Oに関するA、B、Cの位置ベクトルを、それぞれ$\vec{a}$、$\vec{b}$、$\vec{c}$とする。このとき、任意のベクトル$\vec{p}$は、次の形に表される。

$$\vec{p} = r\vec{a} + s\vec{b} + t\vec{c} \quad (r、s、t：実数)$$

<u>証明</u>



$\overrightarrow{OP} = \vec{p}$となる点Pをとる。3点O、A、Bの定める平面をαとし、点Pを通り、OCに平行な直線と、平面αとの交点をP′とする。

このとき、$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OP'} + \overrightarrow{P'P}$

$= \underline{r\vec{a} + s\vec{b} + t\vec{c}}$ (r、s、t：実数)(証明終)

この表し方はただ1通り

$r\vec{a} + s\vec{b} + t\vec{c} = r'\vec{a} + s'\vec{b} + t'\vec{c}$

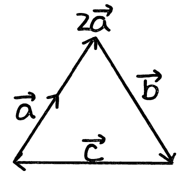
$\iff r = r'$ かつ $s = s'$ かつ $t = t'$

r、s、t、r′、s′、t′は実数

$r'=s'=t'=0$ のとき、

$$\boxed{r\vec{a}+s\vec{b}+t\vec{c}=\vec{0} \Longleftrightarrow r=s=t=0}$$

$\vec{a}$ と $\vec{b}$ と $\vec{c}$ は一次独立



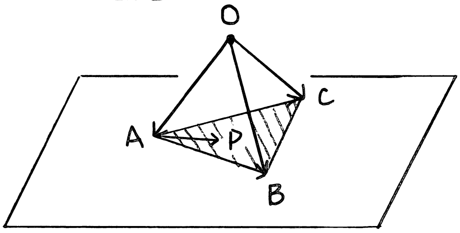
$2\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=\vec{0}$

$$\begin{cases} \vec{a} \neq \vec{0}、\ \vec{b} \neq \vec{0}、\ \vec{c} \neq \vec{0} \\ \text{かつ} \\ \vec{a}\text{と}\vec{b}\text{と}\vec{c}\text{は同一平面上にない} \\ \text{（どの２つも平行でない）} \end{cases}$$

任意のベクトル $\vec{p}$ は唯一の実数 r、s、t を用いて、

$\vec{p} = \underbrace{r\vec{a}+s\vec{b}+t\vec{c}}_{\text{一次結合}}$ と表せる。

(ii) 点の位置



点Pが△ABCまたはその内部にあるとき、

$\overrightarrow{AP} = s\overrightarrow{AB} + t\overrightarrow{AC}$　($s+t \leqq 1$、$s \geqq 0$、$t \geqq 0$)

Oを始点に。

$\overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OA} = s(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}) + t(\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA})$

$\overrightarrow{OP} = \underline{(1-s-t)}\,\overrightarrow{OA} + \underline{s}\,\overrightarrow{OB} + \underline{t}\,\overrightarrow{OC}$

たして1

$1 - s - t = r$ とすると、

$r + s + t = 1$

まとめ

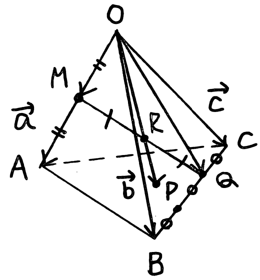
点Pが、△ABC または その内部にあるとき、

$\overrightarrow{OP} = r\,\overrightarrow{OA} + s\,\overrightarrow{OB} + t\,\overrightarrow{OC}$

(ただし、$r+s+t=1$ かつ $\underline{r \geqq 0、s \geqq 0、t \geqq 0}$)

これが無ければ
点Pは平面ABC上。

㊞ 四面体OABCの辺OAの中点M、辺BCを2:1に内分する点Q、線分MQの中点をRとし、直線ORと平面ABCの交点をPとする。
$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$、$\overrightarrow{OB}=\vec{b}$、$\overrightarrow{OC}=\vec{c}$ とするとき、$\overrightarrow{OP}$ を $\vec{a}$、$\vec{b}$、$\vec{c}$ を用いて表せ。



解) $\overrightarrow{OR}=\dfrac{\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{OQ}}{2}$

$=\dfrac{\frac{1}{2}\vec{a}+\frac{2\vec{c}+1\times\vec{b}}{3}}{2}$

$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\vec{a}+\frac{1}{3}\vec{b}+\frac{2}{3}\vec{c}\right)$

$=\frac{1}{4}\vec{a}+\frac{1}{6}\vec{b}+\frac{1}{3}\vec{c}$

$\overrightarrow{OP}=k\,\overrightarrow{OR}\quad(k>1)$

$=k\left(\frac{1}{4}\vec{a}+\frac{1}{6}\vec{b}+\frac{1}{3}\vec{c}\right)$

$=\frac{1}{4}k\vec{a}+\frac{1}{6}k\vec{b}+\frac{1}{3}k\vec{c}$ とすると、

$\frac{1}{4}k+\frac{1}{6}k+\frac{1}{3}k=1$

$\Longleftrightarrow\ \frac{3+2+4}{12}k=1$ から $k=\frac{4}{3}$

①より、$\overrightarrow{OP}=\frac{1}{3}\vec{a}+\frac{2}{9}\vec{b}+\frac{4}{9}\vec{c}$ //

(2) ベクトル方程式

(i) 直線の方程式

(ア) 通る点と方向ベクトルを用いて、

点A (a, b, c) を通り、方向ベクトル $\vec{u} = (p, q, r)$ の直線のベクトル方程式は、

$\boxed{\overrightarrow{AP} = t\vec{u}}$ (t: 実数)

媒介変数(パラメータ)

$\Longleftrightarrow \boxed{\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + t\vec{u}}$

(x, y, z)　(a, b, c)　(p, q, r)

$$\boxed{\begin{cases} x = a + pt \\ y = b + qt \\ z = c + rt \end{cases}}$$

(イ) 通る2点を用いて、

2点A、Bを通る直線のベクトル方程式は

$$\boxed{\overrightarrow{OP} = \underbrace{s}_{=(1-t)}\overrightarrow{OA} + t\overrightarrow{OB} \quad (s + t = 1)}$$

例1　点A $(2, -3, 5)$ を通り、$\vec{u} = (1, 2, -1)$ に平行な直線の方程式は、

$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + t\vec{u}$

$$\therefore \begin{cases} x = 2 + t \\ y = -3 + 2t \\ z = 5 - t \end{cases} \quad (t: \text{媒介変数})$$

例2 2点A(1、2、3)、B(2、-1、5)を通る直線の方程式は、

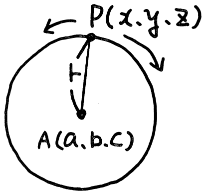
$$\overrightarrow{OP} = (1-t)\overrightarrow{OA} + t\,\overrightarrow{OB}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = (1-t)\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1+t \\ 2-3t \\ 3+2t \end{pmatrix}$$ （t：媒介変数）

$$\begin{cases} x = 1+t \\ y = 2-3t \\ z = 3+2t \end{cases}$$ //

(ii) 球面の方程式



中心A(a、b、c)、半径rの球面のベクトル方程式は、

$|\overrightarrow{AP}| = r$

$$\boxed{|\underset{(x,y,z)}{\overrightarrow{OP}} - \underset{(a,b,c)}{\overrightarrow{OA}}| = r}$$

$\overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OA} = (x-a, y-b, z-c)$

$$\boxed{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = r^2}$$

例 次の球面の方程式を求めよ。

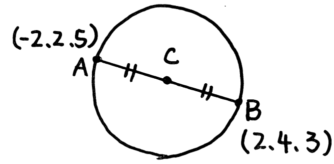
(1) 中心が (2、1、−3)で、半径が2の球面。

(2) 2点A(−2、2、5)、B(2、4、3)を直径の両端とする球面。

(3) 4点O(0、0、0)、A(1、1、0)、B(1、0、1)、C(0、1、1)を通る球面。

解) (1) $(x-2)^2 + (y-1)^2 + (z+3)^2 = 4$

(2) 中心をCとすると、



$C\left(\frac{-2+2}{2}, \frac{2+4}{2}, \frac{5+3}{2}\right)$

$= (0, 3, 4)$

半径は $AC = \sqrt{(0+2)^2 + (3-2)^2 + (4-5)^2} = \sqrt{6}$

よって、求める方程式は $x^2 + (y-3)^2 + (z-4)^2 = 6$ //

(3) 求める球面の方程式を、

$x^2+y^2+z^2+px+qy+rz+s=0$ とおく。

O(0、0、0) を通るので、$s=0$

A(1、1、0) を通るので、$2+p+q=0$

$\rightsquigarrow p+q=-2$ …①

B(1、0、1) を通るので、$2+p+r=0$

$\rightsquigarrow r+p=-2$ …②

C(0、0、1) を通るので、$2+q+r=0$

$\rightsquigarrow q+r=-2$ …③

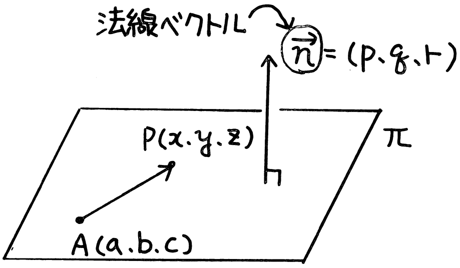
$\dfrac{①+②+③}{2}$ $p+q+r=-3$ …④

④−③ $p=-1$ よって、$q=-1$、$r=-1$

したがって、$x^2+y^2+z^2-x-y-z=0$

$\therefore \left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2+\left(z-\frac{1}{2}\right)^2=\frac{3}{4}$ //

(iii) 平面の方程式　＋「点と平面の距離」



$\overrightarrow{AP}=(x-a, y-b, z-c)$

$\overrightarrow{AP}\neq\vec{0}$ のとき、$\overrightarrow{AP}\perp\vec{n}$ より、$\overrightarrow{AP}\cdot\vec{n}=0$

$\therefore p(x-a)+q(y-b)+r(z-c)=0$　($\overrightarrow{AP}=\vec{0}$でも成立)

まとめ1

点$A(a, b, c)$を通り、法線ベクトル $\vec{n}=(p, q, r)$の

$\boxed{\text{平面の方程式}}$は、

$$\underbrace{p(x-a)+q(y-b)+r(z-c)=0}_{\overrightarrow{AP}\cdot\vec{n}=0}$$

例1　次の平面の方程式を求めよ。

(1) 点$(1, -2, 3)$を通り、ベクトル$(1, 2, -1)$に垂直な平面。

(2) 3点$(0, 3, 3)$、$(0, 1, 5)$、$(-4, 3, 1)$を通る。

解）(1) 求める方程式は、

$$1\times(x-1)+2\times\{y-(-2)\}+(-1)\times(z-3)=0$$

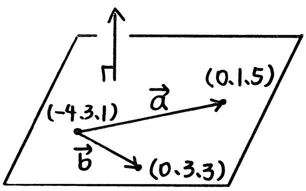
$$\Leftrightarrow\ x+2y-z+6=0 \,/\!/$$

(2) $\vec{a}=(0,1,5)-(-4,3,1)$

$$=(4,-2,4)\ /\!/\ (2,-1,2)=\vec{a'}$$

$\vec{b}=(0,3,3)-(-4,3,1)$

$$=(4,0,2)\ /\!/\ (2,0,1)=\vec{b'}$$ とする。



$\vec{a'}=\frac{1}{2}\vec{a}$ 、$\vec{b'}=\frac{1}{2}\vec{b}$ とし、

これらに垂直なベクトルの1つは、

「外積」利用

$$\left(\begin{array}{ccccccc} 2 & & -1 & & 2 & & 2 \\ & \times & & \times & & \times & \\ 2 & z & 0 & x & 1 & y & 2 \end{array}\right)$$

$(-1,2,2)$ であることから、

求める方程式は、$(-1)(x-0)+2(y-3)+2(z-3)=0$

$$\therefore\ -x+2y+2z-12=0$$

$$\Leftrightarrow\ x-2y-2z+12=0 \,/\!/$$

（(2)の別解）

求める方程式を $px+qy+rz+s=0$ とおく。

$(0, 3, 3)$ を代入　$3q+3r+s=0$ …①

$(0, 1, 5)$ を代入　$q+5r+s=0$ …②

$(-4, 3, 1)$ を代入　$-4p+3q+r+s=0$ …③

②−①　$-2q+2r=0$　$\therefore q=r$

これを①に代入して、$6q+s=0$　$\therefore s=-6q$

よって③から、$-4p+3q+q-6q=0$　$\therefore q=-2p$

したがって、$s=-6\times(-2p)=12p$

$\therefore px-2py-2pz+12p=0$

$p=0$ だと方程式とならないので、

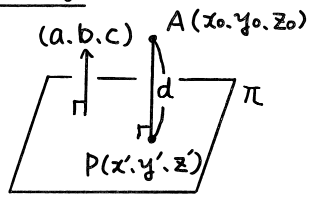
$p\neq 0$ として、$x-2y-2z+12=0$ //

まとめ2

点 $A(x_0, y_0, z_0)$ と平面 $ax+by+cz+d=0$ の距離 d は、

$$d=\frac{|ax_0+by_0+cz_0+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

証明



$ax+by+cz+d=0$

$A(x_0、y_0、z_0)$ から平面 $ax+by+cz+d=0$ におろした垂線の足を $P(x'、y'、z')$ とすると、実数 t を用いて、

$$\overrightarrow{AP} = t(a、b、c)$$

$$\Leftrightarrow (x'-x_0、y'-y_0、z'-z_0) = t(a、b、c)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x' = x_0 + at \\ y' = y_0 + bt \\ z' = z_0 + ct \end{cases}$$

$P(x'、y'、z')$ は、平面 $ax+by+cz+d=0$ 上にあるから、

$$a(x_0+at)+b(y_0+bt)+c(z_0+ct)+d=0$$

$$\Leftrightarrow (a^2+b^2+c^2)t + ax_0 + by_0 + cz_0 + d = 0$$

$$\therefore t = -\frac{ax_0+by_0+cz_0+d}{a^2+b^2+c^2}$$

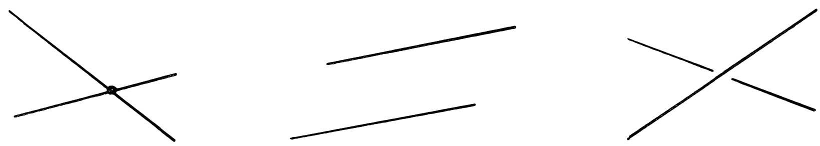
したがって、
$$\begin{aligned} d &= |\overrightarrow{AP}| \\ &= |t(a、b、c)| \\ &= |t||(a、b、c)| \\ &= \left|\frac{ax_0+by_0+cz_0+d}{a^2+b^2+c^2}\right| \times \sqrt{a^2+b^2+c^2} \\ &= \frac{|ax_0+by_0+cz_0+d|}{a^2+b^2+c^2} \times \sqrt{a^2+b^2+c^2} \\ &= \frac{|ax_0+by_0+cz_0+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} \end{aligned}$$
（証明終）

(例2) 点 $(4, 3, 1)$ と平面 $x + 2y + 2z - 3 = 0$ のキョリ d は?

解) $d = \dfrac{|4 + 2\times 3 + 2\times 1 - 3|}{\sqrt{1^2 + 2^2 + 2^2}} = 3$

「互いの関係」
↳直線・球面・平面

① 2直線



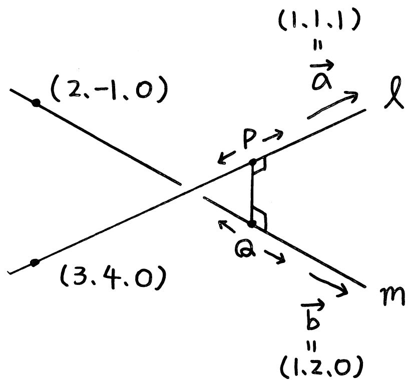
「交わる」　「平行」　「ねじれの位置」
平行でなく、交わらない

例 座標空間で点(3、4、0)を通りベクトル $\vec{a}=(1,1,1)$ に平行な直線を l、点(2、−1、0)を通りベクトル $\vec{b}=(1,-2,0)$ に平行な直線を m とする。点Pは直線 l 上を、点Qは直線 m 上をそれぞれ勝手に動くとき、線分PQの長さの最小値を求めよ。

解) 直線 l の方程式は
$$\begin{cases} x = 3+t \\ y = 4+t \quad (t\text{：実数}) \\ z = 0+t \end{cases}$$

直線 m の方程式は
$$\begin{cases} x = 2+s \\ y = -1-2s \quad (s\text{：実数}) \\ z = 0+0s \end{cases}$$

よって、$P(3+t,\ 4+t,\ t)$、$Q(2+s,\ -1-2s,\ 0)$ とする。$\overrightarrow{PQ} = (-1+s-t,\ -5-2s-t,\ -t)$



（解1）$|\overrightarrow{PQ}|$が最小のとき、

$\overrightarrow{PQ} \perp \vec{a}$ かつ $\overrightarrow{PQ} \perp \vec{b}$

$\therefore \overrightarrow{PQ} \cdot \vec{a} = 1 \cdot (-1+s-t) + 1 \cdot (-5-2s-t) + 1 \cdot (-t)$

$= -6 - s - 3t = 0$ より、

$s + 3t + 6 = 0 \cdots ①$

$\overrightarrow{PQ} \cdot \vec{b} = 1 \cdot (-1+s-t) + (-2) \cdot (-5-2s-t) + 0 \cdot (-t)$

$= 9 + 5s + t = 0 \cdots ②$

②×3−①　$21 + 14s = 0$　$\therefore s = -\frac{3}{2}$

①に代入して、$-\frac{3}{2} + 3t + 6 = 0$　$\therefore t = -\frac{3}{2}$

このときの $\overrightarrow{PQ} = (-1, -\frac{1}{2}, \frac{3}{2})$ より、

PQの長さの最小値は

$\sqrt{(-1)^2 + (-\frac{1}{2})^2 + (\frac{3}{2})^2}$

$= \sqrt{1 + \frac{1}{4} + \frac{9}{4}}$

$= \frac{\sqrt{14}}{2}$ //

(解2)

$$|\overrightarrow{PQ}|^2 = (-1+s-t)^2+(-5-2s+t)^2+(-t)^2$$

$$= 1+s^2+t^2-2s-2st+2t+25+4s^2+t^2$$

$$+20s+4st+10t+t^2$$

$$= 5s^2+3t^2+2st+18s+12t+26$$

$$= 5s^2+2(t+9)s+3t^2+12t+26$$

$$= 5\left(s+\frac{t+9}{5}\right)^2-\frac{(t+9)^2}{5}+3t^2+12t+26$$

$$= 5\left(s+\frac{t+9}{5}\right)^2+\frac{14}{5}t^2+\frac{42}{5}t+\frac{49}{5}$$

$$= 5\left(s+\frac{t+9}{5}\right)^2+\frac{14}{5}\left(t+\frac{3}{2}\right)^2+\frac{7}{2} \geqq \frac{7}{2}$$

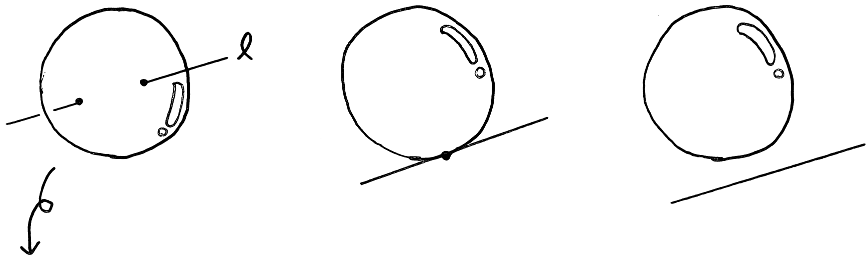
したがって、

$s+\frac{t+9}{5}=0$ かつ $t+\frac{3}{2}=0$

つまり、$t=-\frac{3}{2}$ かつ $s=-\frac{3}{2}$ のとき、

最小値 $\sqrt{\frac{7}{2}}=\frac{\sqrt{14}}{2}$ //

② 直線と球面



㊎ A(4, 1, −6)を通り、ベクトル $\vec{u}=(-1, 1, 4)$ に平行な直線と、球面 $x^2+(y-2)^2+(z-4)^2=9$ の交点の座標を求めよ。

解) 直線の方程式は

$$\begin{cases} x=4-t \\ y=1+t \\ z=-6+4t \end{cases} \quad (t\text{：媒介変数})$$

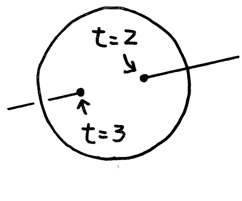
球面：$x^2+(y-2)^2+(z-4)^2=9$ に代入。

$(4-t)^2+(t-1)^2+(4t-10)^2=9$

$\Leftrightarrow 18t^2-90t+108=0$

$\Leftrightarrow t^2-5t+6=0$

$\Leftrightarrow (t-2)(t-3)=0$



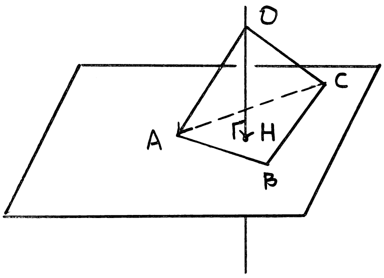
$\therefore t=2, 3$

よって、(2, 3, 2)、(1, 4, 6)//

③ 直線と平面

㋐ 3点A(3, 2, 3)、B(1, 3, 3)、C(1, 2, 1)が定める平面αに、原点Oから下ろした垂線をOHとするとき、Hの座標を求めよ。

(解1) 正射影ベクトル



$\overrightarrow{AB} = (-2, 1, 0)$、$\overrightarrow{AC} = (-2, 0, -2)$

の両方に垂直なベクトルの1つは、

$$\begin{pmatrix} -2 & & 1 & & 0 & & -2 \\ & \times & & \times & & \times & \\ -2 & z & 0 & x & -2 & y & -2 \end{pmatrix} \quad (-2, -4, 2) \parallel (-1, -2, 1)$$

$$\parallel (1, 2, -1)$$

より、$\vec{e} = \frac{1}{\sqrt{6}}(1, 2, -1)$として

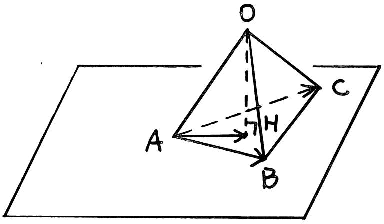
$$\overrightarrow{OH} = (\overrightarrow{OA} \cdot \vec{e})\vec{e}$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \right\} \times \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{6} \times 4 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \left(\frac{2}{3}, \frac{4}{3}, -\frac{2}{3}\right)$$

したがって、$H\left(\frac{2}{3}, \frac{4}{3}, -\frac{2}{3}\right)$ //

（解2） 内と位



$\overrightarrow{AH} = x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AC}$ （x、y：実数）とおくと、

$\overrightarrow{OH} = (1-x-y)\overrightarrow{OA} + x\overrightarrow{OB} + y\overrightarrow{OC}$

$= \begin{pmatrix} 3-2x-2y \\ 2+x \\ 3-2y \end{pmatrix}$ で $\begin{cases} \overrightarrow{OH} \perp \overrightarrow{AB} \\ \overrightarrow{OH} \perp \overrightarrow{AC} \end{cases}$ から、

$\overrightarrow{OH} \cdot \overrightarrow{AB} = 2(3-2x-2y) + 1 \cdot (2+x)$

$= 5x + 4y - 4 = 0$ …①

$\overrightarrow{OH} \cdot \overrightarrow{AC} = -2(3-2x-2y) - 2(3-2y)$

$= -12 + 4x + 8y = 0$

$\therefore\ x + 2y - 3 = 0$ …②

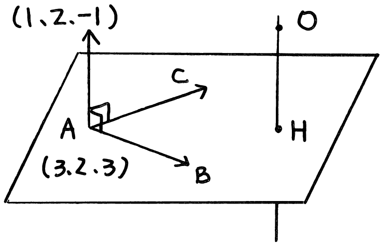
①－②×2　$3x + 2 = 0$ より $x = -\frac{2}{3}$

$y = \frac{11}{6}$

$\therefore\ \overrightarrow{OH} = \left(\frac{2}{3}, \frac{4}{3}, -\frac{2}{3}\right)$

したがって、$H\left(\frac{2}{3}, \frac{4}{3}, -\frac{2}{3}\right)$〃

（解3）平面の方程式



平面の方程式は、$1\times(x-3)+2\times(y-2)-(z-3)=0$

$\iff x+2y-z-4=0 \cdots (*)$

直線OHの方程式は $\begin{cases} x=t \\ y=2t \\ z=-t \end{cases}$ （t：パラメータ）

$(*)$に代入して、$t+4t+t-4=0 \quad \therefore t=\frac{2}{3}$

よって、$H\left(\frac{2}{3}, \frac{4}{3}, -\frac{2}{3}\right)$ //

3. 内積系と位置ベクトル系の融合

例 各辺の長さが1である正四面体OABCにおいて、
線分ABの中点をP、線分OBを2:1に内分する点をQ、
線分OCを1:3に内分する点をRとする。
また、$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$、$\overrightarrow{OB}=\vec{b}$、$\overrightarrow{OC}=\vec{c}$ とおく。

(1) 次の内積を計算すると、$\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{c}=\vec{c}\cdot\vec{a}=\boxed{}$ である。

(2) $\overrightarrow{PQ}=\boxed{}\,\vec{a}+\boxed{}\,\vec{b}$、$\overrightarrow{PR}=\boxed{}\,\vec{a}-\boxed{}\,\vec{b}+\boxed{}\,\vec{c}$
であるから、$\overrightarrow{PQ}\cdot\overrightarrow{PR}=\boxed{}$ であり、さらに $|\overrightarrow{PQ}|=\boxed{}$、
$|\overrightarrow{PR}|=\boxed{}$ を得る。したがって、$\angle QPR=\theta$ とするとき、
$\cos\theta=\boxed{}$ となる。

解) (1) $\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos 60^\circ=\frac{1}{2}$

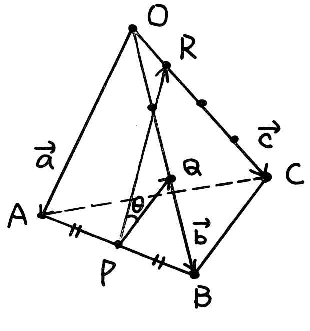
$$\left.\begin{array}{l}\text{同様に考えて、}\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{c}=\vec{c}\cdot\vec{a}=\frac{1}{2}\,/\!/\\ \text{また題意より、}\quad |\vec{a}|=|\vec{b}|=|\vec{c}|=1\end{array}\right\}①$$

(2) $\overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{OQ}-\overrightarrow{OP}$

$$=\frac{2}{3}\vec{b}-\frac{\vec{a}+\vec{b}}{2}=-\frac{1}{2}\vec{a}+\frac{1}{6}\vec{b}\,/\!/$$

$\overrightarrow{PR}=\overrightarrow{OR}-\overrightarrow{OP}$

$$=\frac{1}{4}\vec{c}-\frac{\vec{a}+\vec{b}}{2}=-\frac{1}{2}\vec{a}-\frac{1}{2}\vec{b}+\frac{1}{4}\vec{c}\,/\!/$$



$\circ\ \overrightarrow{PQ}\cdot\overrightarrow{PR} = \left(-\frac{1}{2}\vec{a}+\frac{1}{6}\vec{b}\right)\cdot\left(-\frac{1}{2}\vec{a}-\frac{1}{2}\vec{b}+\frac{1}{4}\vec{c}\right)$

$= -\frac{1}{6}(3\vec{a}-\vec{b})\cdot\left(-\frac{1}{4}\right)(2\vec{a}+2\vec{b}-\vec{c})$

$= \frac{1}{24}(3\vec{a}-\vec{b})\cdot(2\vec{a}+2\vec{b}-\vec{c})$

$= \frac{1}{24}(6|\vec{a}|^2-2|\vec{b}|^2+4\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}\cdot\vec{c}-3\vec{c}\cdot\vec{a})$

$= \frac{1}{24}\left(6-2+2+\frac{1}{2}-\frac{3}{2}\right)$ (①より)

$= \frac{5}{24}$ //

$\circ\ |\overrightarrow{PQ}|^2 = \left|-\frac{1}{2}\vec{a}+\frac{1}{6}\vec{b}\right|^2$

$= \left(\frac{1}{6}\right)^2|-3\vec{a}+\vec{b}|^2$

$= \left(\frac{1}{6}\right)^2(9|\vec{a}|^2-6\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2)$

$= \left(\frac{1}{6}\right)^2(9-3+1)$ (①より)

$= \frac{7}{36}$

$\therefore\ |\overrightarrow{PQ}| = \frac{\sqrt{7}}{6}$ //

$\circ\ |\overrightarrow{PR}|^2 = \left|-\frac{1}{2}\vec{a}-\frac{1}{2}\vec{b}+\frac{1}{4}\vec{c}\right|^2$

$= \left(-\frac{1}{4}\right)^2|2\vec{a}+2\vec{b}-\vec{c}|^2$

$= \frac{1}{16}(4|\vec{a}|^2+4|\vec{b}|^2+|\vec{c}|^2+8\vec{a}\cdot\vec{b}-4\vec{b}\cdot\vec{c}$

$-4\vec{c}\cdot\vec{a})$

$= \frac{1}{16}(4+4+1+4-2-2)$

$= \frac{9}{16}$ $\quad\therefore\ |\overrightarrow{PR}| = \frac{3}{4}$ //

- $\cos\theta = \dfrac{\overrightarrow{PQ} \cdot \overrightarrow{PR}}{|\overrightarrow{PQ}||\overrightarrow{PR}|}$

$$= \frac{\frac{5}{24}}{\frac{\sqrt{7}}{6} \times \frac{3}{4}}$$

$$= \frac{5\sqrt{7}}{21} \,//$$