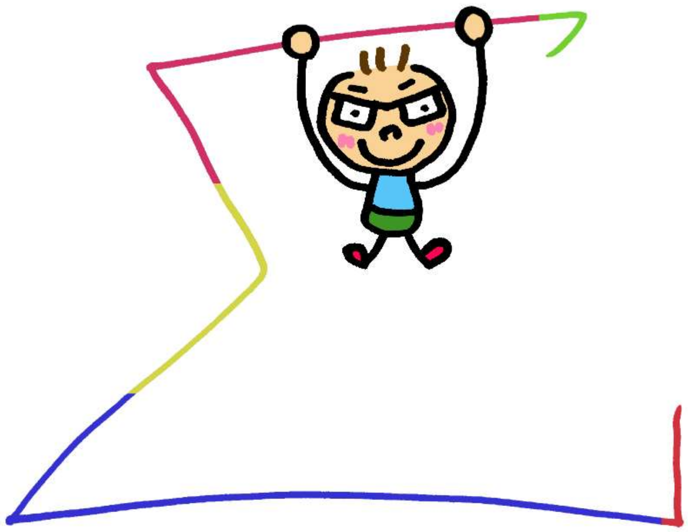
数学 B

14　数列



＜講義ノート＞

<u>数列</u>

１　等差数列

２　等比数列

３　Σ

（１）Σの公式を利用

（２）等比数列の和の公式を利用

（３）バラバラに　→（部分分数）（有理化）（等差と等比の積）　＜おまけ＞（二項定理の利用）

４　群数列

５　階差数列

６　**ａｎ**とＳ**ｎ**の関係

７　漸化式

８　数学的帰納法

0. Σの基本

例えば、 $1+2+3+4+5+6+7+8+9+10=55$

工夫すると、 $1+2+3+4+5+6+7+8+9+10$

たして11

たして11

たして11

たして11

たして11

$11\times 5=55$ //

この考え方を用いて、

$S=1+2+3+4+\cdots+n$ の値を求める。

$$
\begin{array}{rcccccccccccc}
 & S = & 1 & + & 2 & + & 3 & + & 4 & + \cdots + & (n-1) & + & n \\
+) & S = & n & + & (n-1) & + & (n-2) & + & (n-3) & + \cdots + & 2 & + & 1 \\
\hline
\end{array}
$$

$$2S=\underbrace{(n+1)+(n+1)+(n+1)+(n+1)+\cdots+(n+1)+(n+1)}_{n\text{コ}}$$

$$=n(n+1)$$

$$\therefore\ S=\frac{1}{2}n(n+1)$$

$S = 1 + 2 + 3 + \cdots + n$ とすると、

$S = \frac{1}{2}n(n+1) = \sum_{k=1}^{n} k$

S を Σ を用いて表すと、

$S = \sum_{k=1}^{n} k$ ← $k=1$ から n まで、k を足していく。

$= 1 + 2 + 3 + \cdots + n$

他にも、

$S = \sum_{k=1}^{n} k^2$

$= 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2$

$S = \sum_{k=1}^{n} (2k-1)$

$= 1 + 3 + 5 + \cdots + (2n-1)$

$S = \boxed{\sum_{k=2}^{8} (3k+1) = 3\sum_{k=2}^{8} k + \sum_{k=2}^{8} 1}$ → $\sum_{k=1}^{n} (ak+b) = a\sum_{k=1}^{n} k + b\sum_{k=1}^{n} 1$

$= 7 + 10 + 13 + 16 + 19 + 22 + 25$

$= (3 \cdot 2 + 1) + (3 \cdot 3 + 1) + (3 \cdot 4 + 1) + (3 \cdot 5 + 1) + (3 \cdot 6 + 1)$

$+ (3 \cdot 7 + 1) + (3 \cdot 8 + 1)$

$= 3(2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8) + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1$

このように分配できるので、

$$1+3+5+7+\cdots+(2n-1)=\sum_{k=1}^{n}(2k-1)$$

$$=2\sum_{k=1}^{n}k-\sum_{k=1}^{n}1$$

$$=2\times\frac{1}{2}n(n+1)-n$$

$$=n^2$$

$\boxed{\Sigma\text{の公式}}$

$$\sum_{k=1}^{n}k=\frac{1}{2}n(n+1)$$

$$\sum_{k=1}^{n}k^2=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$$

証明

$$\begin{array}{rcl}
(n+1)^3-n^3 &=& 3n^2+3n+1\\
n^3-(n-1)^3 &=& 3(n-1)^2+3(n-1)+1\\
(n-1)^3-(n-2)^3 &=& 3(n-2)^2+3(n-2)+1\\
\vdots\quad\quad\vdots && \vdots\quad\quad\vdots\quad\quad\vdots\\
3^3-2^3 &=& 3\cdot2^2+3\cdot2+1\\
+)\ 2^3-1^3 &=& 3\cdot1^2+3\cdot1+1\\
\hline
(n+1)^3-1^3 &=& 3\sum_{k=1}^{k}k^2+3\sum_{k=1}^{n}k+n
\end{array}$$

$$\therefore\ 3\sum_{k=1}^{n}k^2=n^3+3n^2+2n-\frac{3}{2}n(n+1)$$

$$=n(n+1)(n+2)-\frac{3}{2}n(n+1)$$

$$=\frac{1}{2}n(n+1)\{2(n+2)-3\}$$

$$=\frac{1}{2}n(n+1)(2n+1)$$

よって、$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}k^2=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$ ■

$$\sum_{k=1}^{n}1=n$$

$$\sum_{k=1}^{n}k^3=\left\{\frac{1}{2}n(n+1)\right\}^2$$

証明

(次のページへ)

証明

$$
\begin{array}{rcll}
(n+1)^4 & - & n^4 & = 4n^3 + 6n^2 + 4n + 1 \\
n^4 & - & (n-1)^4 & = 4(n-1)^3 + 6(n-1)^2 + 4(n-1) + 1 \\
(n-1)^4 & - & (n-2)^4 & = 4(n-2)^3 + 6(n-2)^2 + 4(n-1) + 1 \\
\vdots & & \vdots & \quad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \\
3^4 & - & 2^4 & = 4 \cdot 2^3 + 6 \cdot 2^2 + 4 \cdot 2 + 1 \\
+)\ 2^4 & - & 1^4 & = 4 \cdot 1^3 + 6 \cdot 1^2 + 4 \cdot 1 + 1 \\
\hline
(n+1)^4 & - & 1^4 & = 4\sum_{k=1}^{n} k^3 + 6\sum_{k=1}^{n} k^2 + 4\sum_{k=1}^{n} k + n
\end{array}
$$

$$\therefore\ 4\sum_{k=1}^{n} k^3 = n^4 + 4n^3 + 6n^2 + 3n - n(n+1)(2n+1) - 2n(n+1)$$

$$= n(n+1)\{(n^2+3n+3) - (2n+1) - 2\}$$

$$= n(n+1) \times n(n+1)$$

$$= n^2(n+1)^2$$

よって、$\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{1}{4} n^2 (n+1)^2$

$$= \left\{\frac{1}{2} n(n+1)\right\}^2 \quad ▨$$

例 $1\times2\times3+2\times3\times4+3\times4\times5+\cdots+n(n+1)(n+2)$

$$=\sum_{k=1}^{n}k(k+1)(k+2)$$

$$=\sum_{k=1}^{n}(k^3+3k^2+2k)$$

$$=\sum_{k=1}^{n}k^3+3\sum_{k=1}^{n}k^2+2\sum_{k=1}^{n}k$$

$$=\left\{\frac{1}{2}n(n+1)\right\}^2+3\times\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)+2\times\frac{1}{2}n(n+1)$$

$$=\frac{1}{4}n^2(n+1)^2+\frac{1}{2}n(n+1)(2n+1)+n(n+1)$$

$$=\frac{1}{4}n(n+1)\{n(n+1)+2(2n+1)+4\}$$

$$=\frac{1}{4}n(n+1)(n+2)(n+3)_{//}$$

1. 等差数列

例えば、

1、3、5、7、9、11、13、15 …

のように、数を1列に並べたものを「数列」という。

一般に、数列を

a_1 、 a_2 、 a_3 、 a_4 … 、 a_n

初項（第1項）　↑第2項　↑第3項　↑第4項　一般項（第n項）

で表す。

特に、<u>項の数が有限の数列を「有限数列」</u>といい、

例 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14

その項の数を「項数」、最後の項を「末項」という。

$$a_1,\ a_2,\ a_3,\ a_4,\ a_5,\ a_6\ \cdots\ a_{n-1},\ a_n\ \cdots$$

$$a_1 \xrightarrow{+d} a_2 \xrightarrow{+d} a_3 \xrightarrow{+d} a_4 \xrightarrow{+d} a_5 \xrightarrow{+d} a_6 \cdots a_{n-1} \xrightarrow{+d} a_n$$

まずは一般項a_nを求める。

$$\left(\begin{aligned} a_n &= a_1 + \underbrace{d+d+d\cdots+d}_{(n-1)\text{コ}} \\ &= a_1 + (n-1)d \end{aligned} \right)$$

$$\begin{aligned}
a_2 - a_1 &= d \\
a_3 - a_2 &= d \\
a_4 - a_3 &= d \\
a_5 - a_4 &= d \\
\vdots \quad & \vdots \\
+)\ a_n - a_{n-1} &= d \\
\hline
a_n - a_1 &= (n-1)d
\end{aligned}$$

$$\downarrow$$

$$a_n = a_1 + (n-1)d$$

大切なのは、

a_n（一般項）と

S_n（初項から第n項までの和）

初項a、公差dの等差数列$\{a_n\}$について、$\boxed{a_n = a + (n-1)d}$

$$\begin{aligned}
a_1 &= a_1 \\
a_2 &= a_1 + d \\
a_3 &= a_1 + 2d \\
a_4 &= a_1 + 3d \\
a_5 &= a_1 + 4d \\
\vdots \quad & \vdots \quad \vdots \\
a_{n-1} &= a_1 + (n-2)d \\
+)\ a_n &= a_1 + (n-1)d \\
\hline
S_n &= na_1 + \{1+2+3+4+\cdots+(n-1)\}d
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\rightarrow na_1 + \frac{1}{2}n(n-1)d \\
&= \frac{1}{2}n\{2a_1 + (n-1)d\} \\
&= \frac{1}{2}n\{a_1 + a_1 + (n-1)d\} \\
&= \frac{1}{2}n(a_1 + a_n)
\end{aligned}$$

初項a、公差dの等差数列$\{a_n\}$

について、$S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$とすると、

$$S_n \begin{cases} \frac{1}{2}n\{2a+(n-1)d\} \\ \frac{1}{2}n(a_1+a_n) \\ \sum_{k=1}^{n} a_k \end{cases}$$

例 初項1、公差3の等差数列$\{a_n\}$について、

$$\begin{aligned} a_n &= 1+(n-1)\times 3 \\ &= 3n-2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=1}^{n}(3k-2) \\ &= 3\sum_{k=1}^{n}k - 2\sum_{k=1}^{n}1 \\ &= 3\times\frac{1}{2}n(n+1)-2n \\ &= \frac{1}{2}n\{3(n+1)-4\} \\ &= \frac{1}{2}n(3n-1) /\!/ \end{aligned}$$

〈練習編〉

例 初項が60、第9項が36である等差数列$\{a_n\}$について

(1) 一般項a_nを求めよ。

(2) この数列の初項から第n項までの和S_nの最大値を求めよ。

解) (1) $a_n = -3(n-21)$〃

(2) 『S_nを求める。

(方法1)

$$S_n = \frac{1}{2}n\{2\times 60 + (n-1)\times(-3)\}$$
$$= \frac{1}{2}n(-3n+123)$$
$$= -\frac{3}{2}n(n-41)$$

(方法2)

$$S_n = \frac{1}{2}n\{60-3(n-21)\}$$
$$= \frac{1}{2}n(-3n+123)$$
$$= -\frac{3}{2}n(n-41)$$

(方法3)

$$S_n = \sum_{k=1}^{n}\{-3(k-21)\}$$
$$= -3\left(\sum_{k=1}^{n}k - 21\sum_{k=1}^{n}1\right)$$
$$= -3\left\{\frac{1}{2}n(n+1) - 21n\right\}$$
$$= -3\times\frac{1}{2}n\{(n+1)-42\}$$
$$= -\frac{3}{2}n(n-41)$$

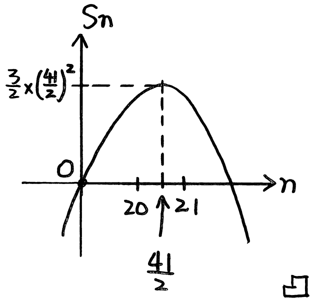
したがって、$S_n = -\frac{3}{2}(n^2 - 41n)$

$$= -\frac{3}{2}\left\{\left(n-\frac{41}{2}\right)^2 - \left(\frac{41}{2}\right)^2\right\}$$

$$= -\frac{3}{2}\left(n-\frac{41}{2}\right)^2 + \frac{3}{2}\times\left(\frac{41}{2}\right)^2$$

最大値は $S_{20} = -\frac{3}{2}\times 20\times(-21)$

$$= 630$$



(1)の結果より、数列$\{a_n\}$を並べると、

60、57、54、51、48 … 9、6、3、0、−1、−3 …

和が最大になるのは $\boxed{\text{ココまで}}$ か $\boxed{\text{ココまで}}$。

和S_nが増加するので、$a_n > 0$ の間。

$a_n = -3(n-21) \geqq 0$ より、

$n - 21 \leqq 0 \qquad \therefore n \leqq 21$

nは自然数なので、$n \leqq 20$

最大値は、$S_{20} = \frac{1}{2}\times 20(60 + a_{20})$

$$= 630$$

2. 等比数列

例 3、6、12、24、48、96、192

$$3 \xrightarrow{\times 2} 6 \xrightarrow{\times 2} 12 \xrightarrow{\times 2} 24 \xrightarrow{\times 2} 48 \xrightarrow{\times 2} 96 \xrightarrow{\times 2} 192$$

$$a_1 \xrightarrow{\times r} a_2 \xrightarrow{\times r} a_3 \xrightarrow{\times r} a_4 \xrightarrow{\times r} a_5 \xrightarrow{\times r} a_6、\cdots、a_{n-1} \xrightarrow{\times r} a_n \xrightarrow{\times r} a_{n+1} \cdots$$

r：公比

初項 a、公比 r の等比数列 $\{a_n\}$ について、

一般項 $\boxed{a_n = ar^{n-1}}$

「一般項 a_n」と「和 S_n」を求める！

上の 例 では、一般項を a_n とすると、初項3、公比2から、

$$a_n = 3 \cdot 2^{n-1}$$

次に、初項から第 n 項までの和 S_n について考える。

準備

例
$$x^2 - 1 = (x-1)(x+1)$$
$$x^3 - 1 = (x-1)(x^2+x+1)$$
$$\begin{aligned} x^4 - 1 &= (x^2-1)(x^2+1) \\ &= (x-1)(x+1)(x^2+1) \\ &= (x-1)(x^3+x^2+x+1) \end{aligned}$$
$$x^5 - 1 = (x-1)(x^4+x^3+x^2+x+1)$$

2以上の自然数 n に対し、

$$x^n - 1 = (x-1)(x^{n-1}+x^{n-2}+\cdots+x+1)$$

$x \neq 1$ のとき、

$$\frac{x^n-1}{x-1} = x^{n-1}+x^{n-2}+\cdots+x+1$$

2以上の自然数 n に対し、
$x \neq 1$ のとき、

$$1+x+x^2+\cdots+x^{n-1} = \frac{x^n-1}{x-1}$$

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + \cdots + a_n$$

$$= a_1 + a_1 r + a_1 r^2 + a_1 r^3 + a_1 r^4 + \cdots + a_1 r^{n-1}$$

$$= a_1 (1 + r + r^2 + r^3 + r^4 + \cdots + r^{n-1})$$

$$= \begin{cases} a_1 \times \dfrac{r^n - 1}{r - 1} & (r \fallingdotseq 1) \\ n a_1 & (r = 1) \end{cases}$$

初項から第n項までの和をS_nとすると、

$$S_n = \begin{cases} \boxed{\dfrac{a(r^n - 1)}{r - 1}} & (r \fallingdotseq 1) \\ na & (r = 1) \end{cases}$$

$\dfrac{a(1-r^n)}{1-r}$ でもOK

問 $a_2 = 6$、$a_5 = 162$ であるような等比数列$\{a_n\}$について、

(1) 初項a、公比rを求めよ。

(2) $S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n$ を求めよ。

解) (1) 題意より、$a_2 = ar = 6 \cdots ①$

$a_5 = ar^4 = 162 \cdots ②$

② ÷ ① $\dfrac{ar^4}{ar} = \dfrac{162}{6}$ (明らかに$a \fallingdotseq 0$、$r \fallingdotseq 0$なので)

$r^3 = 27$ から $r = 3$〃 ①に代入して、$a = 2$〃

(2) $S_n = \dfrac{2(3^n - 1)}{3 - 1}$

$= 3^n - 1$〃

（おまけ）等差中項・等比中項

a、b、c が

この順で等差数列

$$\underbrace{a,\ b}_{-d},\ \underbrace{\ \ c}_{+d}$$

$$\begin{array}{rl} & a = b - d \\ +) & c = b + d \\ \hline & a + c = 2b \end{array}$$

a と c の相加平均

$\left(b = \dfrac{a+c}{2}\right)$

a、b、c が

この順で等比数列

$$\underbrace{a,\ b}_{\div r},\ \underbrace{\ \ c}_{\times r}$$

$$a = \frac{b}{r}$$

$$c = br$$

$$ac = b^2$$

a と c の相乗平均 $\left\{ \begin{array}{l} a>0 \\ c>0 \end{array} \right.$ のときのみ

$(b = \sqrt{ac})$

例　3つの数 8、a、b がこの順で等差数列をなし、a、b、36 がこの順で等比数列をなすという。このとき a、b の値を求めよ。

解）8、a、b がこの順で等差数列をなすので、

$$2a = 8 + b \cdots ①$$

a、b、36 がこの順で等比数列をなすので、

$$b^2 = 36a \cdots ②$$

①を②に代入して、$b^2 = 18(8 + b)$

$\Leftrightarrow b^2 - 18b - 18 \times 8 = 0$

$\Leftrightarrow b^2 - 18b - 6 \times 24 = 0$

$\Leftrightarrow (b+6)(b-24) = 0$

$b = 24、-6$

①より、

$2a = 2、32$

$a = 1、16$

$(a, b) = (1, -6), (16, 24)$ //

3. Σ

Σの解き方3通り

(1) $\displaystyle\sum_{k=\blacksquare}^{\blacktriangle}$ (kの整式) ⇒「Σの公式」を利用

(2) $\displaystyle\sum_{k=\blacksquare}^{\blacktriangle}$ (r^kの整式) ⇒「等比数列の和の公式」を利用

(3) $\displaystyle\sum_{k=\blacksquare}^{\blacktriangle}$ (その他) ⇒ Σをはずしてバラバラに！　(おまけ)つき。

（1）

Σの公式

$$\boxed{\sum_{k=1}^{n} k = \frac{1}{2}n(n+1)} \qquad \boxed{\sum_{k=1}^{n} 1 = n}$$

$$\boxed{\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)} \qquad \boxed{\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left\{\frac{1}{2}n(n+1)\right\}^2}$$

例 次の値を求めよ

(1) $\sum_{k=1}^{n} k(k+1)$

(2) $\sum_{k=1}^{10} (3k^2-6k+3)$

(3) $\sum_{k=1}^{n} (4k^3-6k^2+4k-1)$

解) (1) (与式) $= \sum_{k=1}^{n} (k^2+k)$

$$= \sum_{k=1}^{n} k^2 + \sum_{k=1}^{n} k$$

$$= \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1) + \frac{1}{2}n(n+1)$$

$$= \frac{1}{6}n(n+1)\{(2n+1)+3\}$$

$$= \frac{1}{3}n(n+1)(n+2) /\!/$$

(2) (与式) $= 3\sum_{k=1}^{10} k^2 - 6\sum_{k=1}^{10} k + 3\sum_{k=1}^{10} 1$

$$= 3 \times \frac{1}{6} \times 10 \times 11 \times 21 - 6 \times \frac{1}{2} \times 10 \times 11 + 3 \times 10$$

$$= 55 \times 21 - 330 + 30$$

$$= 1150 - 300 = 855 /\!/$$

((2)の別解)

$$(与式) = 3\sum_{k=1}^{10}(k-1)^2$$

$$= 3\sum_{k=0}^{9}k^2$$

$$= 3\sum_{k=1}^{9}k^2$$

$$= 3 \times \frac{1}{6} \times 9 \times 10 \times 19$$

$$= 45 \times 19 = 855 /\!/$$

(3) $$(与式) = 4\sum_{k=1}^{n}k^3 - 6\sum_{k=1}^{n}k^2 + 4\sum_{k=1}^{n}k - \sum_{k=1}^{n}1$$

$$= 4 \times \frac{1}{4}n^2(n+1)^2 - 6 \times \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1) + 4 \times \frac{1}{2}n(n+1) - n$$

$$= n\{n(n+1)^2 - (n+1)(2n+1) + 2(n+1) - 1\}$$

$$= n\{n^3 + 2n^2 + n - (2n^2 + 3n + 1) + 2n + 2 - 1\}$$

$$= n^4 /\!/$$

((3)の別解)

$$(与式) = \sum_{k=1}^{n}\{k^4 - (k-1)^4\}$$

$$= -\sum_{k=1}^{n}\{(k-1)^4 - k^4\}$$

$$= -[(0^4 - 1^4) + (1^4 - 2^4) + (2^4 - 3^4) + \cdots + \{(n-1)^4 - n^4\}]$$

$$= n^4 /\!/$$

(2)

初項 a 、公比 r の等比数列 $\{a_n\}$ について、

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \cdots + a_n$$

$$= \begin{cases} \dfrac{a(r^n-1)}{r-1} = \dfrac{a(1-r^n)}{1-r} & (r \neq 1) \\ na & (r = 1) \end{cases}$$

また、$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$

$$= \boxed{\sum_{k=1}^{n} ar^{k-1}}$$

$r \neq 1$

$$\boxed{\begin{array}{l} r \neq 1 \text{ のとき、} \\ \displaystyle\sum_{k=1}^{n} ar^{k-1} = \frac{a(r^n-1)}{r-1} \end{array}}$$

例 次の和を計算せよ。

(1) $\sum_{k=1}^{n} 4 \times (-3)^{k-1}$

(2) $\sum_{k=1}^{n} 3^k$

(3) $\sum_{k=1}^{n-1} 2 \cdot 3^{k-1}$

解) (1) (与式) $= \dfrac{4\{1-(-3)^n\}}{1-(-3)}$

$= 1-(-3)^n$ //

(2) $\sum_{k=1}^{n} 3^k = \sum_{k=1}^{n} 3^1 \times 3^{k-1}$

$= \dfrac{3(3^n-1)}{3-1}$

$= \dfrac{3}{2}(3^n-1)$ //

(3) $\sum_{k=1}^{n-1} 2 \times 3^{k-1}$

$= \dfrac{2(3^{n-1}-1)}{3-1}$

$= 3^{n-1}-1$ //

(3)

3つの代表タイプ

① 部分分数　　$\boxed{\text{差分をとる}}$

② 有理化

③ ずらしくひく(等差と等比の積)

① 部分分数

例 次の和を求めよ。

(1) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)}$

(2) $\displaystyle\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k^2-1}$

(3) $\displaystyle\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k^3-k}$

解) (1) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)}$ について、$\displaystyle\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}=\frac{(k+1)-k}{k(k+1)}$

$$=\frac{1}{k(k+1)}$$

$$\therefore \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)}=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)$$

$$=\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\cdots$$

$$+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)$$

$$=1-\frac{1}{n+1}$$

$$=\frac{n+1-1}{n+1}=\frac{n}{n+1}\text{〃}$$

(2) $\displaystyle\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k^2-1}$ について、$\dfrac{1}{k^2-1}=\dfrac{1}{(k-1)(k+1)}$

ここで、$\dfrac{1}{k-1}-\dfrac{1}{k+1}=\dfrac{k+1-(k-1)}{(k-1)(k+1)}$

$$=\frac{2}{(k-1)(k+1)}$$

$\therefore\ \dfrac{1}{(k-1)(k+1)}=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{k-1}-\dfrac{1}{k+1}\right)$

よって、

$$\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k^2-1}=\frac{1}{2}\sum_{k=2}^{n}\left(\frac{1}{k-1}-\frac{1}{k+1}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left\{\left(1-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{6}\right)+\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{7}\right)\right.$$

$$\left.+\cdots+\left(\frac{1}{n-2}-\frac{1}{n}\right)+\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n+1}\right)\right\}$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}-\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\times\frac{3n(n+1)-2(n+1)-2n}{2n(n+1)}$$

$$=\frac{3n^2-n-2}{4n(n+1)}$$

$$=\frac{(n-1)(3n+2)}{4n(n+1)}\ //$$

(3) $\displaystyle\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^3-k}$ について、$\displaystyle\frac{1}{k^3-k} = \frac{1}{k(k+1)(k-1)}$

ここで、

$$\frac{1}{(k-1)k} - \frac{1}{k(k+1)} = \frac{k+1-(k-1)}{(k-1)k(k+1)}$$

$$= \frac{2}{(k-1)k(k+1)}$$

$$\therefore \frac{1}{(k-1)k(k+1)} = \frac{1}{2}\left\{\frac{1}{(k-1)k} - \frac{1}{k(k+1)}\right\}$$

よって、

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^3-k} = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\left\{\frac{1}{(k-1)k} - \frac{1}{k(k+1)}\right\}$$

$$= \frac{1}{2}\Big[\left(\frac{1}{1\cdot 2} - \frac{1}{2\cdot 3}\right) + \left(\frac{1}{2\cdot 3} - \frac{1}{3\cdot 4}\right) + \cdots$$

$$+ \left\{\frac{1}{(n-1)n} - \frac{1}{n(n+1)}\right\}$$

$$= \frac{1}{2}\left\{\frac{1}{2} - \frac{1}{n(n+1)}\right\}$$

$$= \frac{1}{2} \times \frac{n(n+1)-2}{2n(n+1)}$$

$$= \frac{(n+2)(n-1)}{4n(n+1)} \,{}_{//}$$

② 有理化

㊎ 次の和を求めよ。

(1) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k+1}+\sqrt{k+2}}$

(2) $\displaystyle\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{\sqrt{k-1}-\sqrt{k+1}}$

解) (1) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k+1}+\sqrt{k+2}}$

$$= \sum_{k=1}^{n} \frac{\sqrt{k+1}-\sqrt{k+2}}{(\sqrt{k+1}+\sqrt{k+2})(\sqrt{k+1}-\sqrt{k+2})}$$

$$= -\sum_{k=1}^{n} (\sqrt{k+1}-\sqrt{k+2})$$

$$= -\{(\sqrt{2}-\sqrt{3})+(\sqrt{3}-\sqrt{4})+(\sqrt{4}-\sqrt{5})+\cdots+(\sqrt{n+1}-\sqrt{n+2})\}$$

$$= -(\sqrt{2}-\sqrt{n+2})$$

$$= \sqrt{n+2}-\sqrt{2}_{\,/\!/}$$

$$\sum_{k=1}^{n}\{f(k)-f(k+1)\} = f(1)-f(n+1)$$

$$= \{f(1)-f(2)\}+\{f(2)-f(3)\}+\cdots$$

$$+\{f(n)-f(n+1)\}$$

$$= f(1)-f(n+1)$$

(2) $\displaystyle\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{\sqrt{k-1}+\sqrt{k+1}}$

$$= \sum_{k=2}^{n} \frac{\sqrt{k-1}-\sqrt{k+1}}{(\sqrt{k-1}+\sqrt{k+1})(\sqrt{k-1}-\sqrt{k+1})}$$

$$= -\frac{1}{2}\sum_{k=2}^{n}(\sqrt{k-1}-\sqrt{k+1})$$

$$= -\frac{1}{2}\{(1-\sqrt{3})+(\sqrt{2}-\sqrt{4})+(\sqrt{3}-\sqrt{5})+(\sqrt{4}-\sqrt{6})+\cdots$$

$$+(\sqrt{n-2}-\sqrt{n})+(\sqrt{n-1}-\sqrt{n})$$

$$= -\frac{1}{2}\left(1+\sqrt{2}-\sqrt{n}-\sqrt{n+1}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\sqrt{n}+\sqrt{n+1}-1-\sqrt{2}\right) \,_{//}$$

$$\sum_{k=1}^{n}\{f(k)-f(k+2)\} = f(1)+f(2)-f(n+1)-f(n+2)$$

$$= \{f(1)-f(3)\}+\{f(2)-f(4)\}+\{f(3)-f(5)\}+$$

$$+\{f(4)-f(6)\}+\{f(5)-f(7)\}+\cdots$$

$$+\{f(n-1)-f(n+1)\}+\{f(n)-f(n+2)\}$$

$$= f(1)+f(2)-f(n+1)-f(n+2)$$

③ ずらしてひく（等差と等比の積）

例 次の和を求めよ。

$$\sum_{k=1}^{n}(2k-1)\cdot 2^k$$

解）$S_n = \sum_{k=1}^{n}(2k-1)\cdot 2^k$ とおく。

$$\begin{array}{rrl}
 & S_n = & 1\cdot 2^1 + 3\cdot 2^2 + 5\cdot 2^3 + 7\cdot 2^4 + \cdots + (2n-1)\cdot 2^n \\
-) & 2S_n = & \qquad\quad 1\cdot 2^2 + 3\cdot 2^3 + 5\cdot 2^4 + \cdots + (2n-3)\cdot 2^n + (2n-1)\cdot 2^{n+1} \\
\hline
 & -S_n = & 2 + 2\cdot 2^2 + 2\cdot 2^3 + 2\cdot 2^4 + \cdots + 2\cdot 2^n - (2n-1)\cdot 2^{n+1}
\end{array}$$

$$= 2 + 2\times\frac{4(2^{n-1}-1)}{2-1} - (2n-1)\times 2^{n+1}$$

$$= 2 + 8(2^{n-1}-1) - (2n-1)\times 2^{n+1}$$

$$= 2 + 2^3\times 2^{n-1} - 8 - (2n-1)\times 2^{n+1}$$

$$\therefore S_n = 6 - 2\times 2^{n+1} + (2n-1)\times 2^{n+1}$$

$$= (2n-3)\times 2^{n+1} + 6_{\text{〃}}$$

(おまけ) 2項定理の利用

$$\boxed{(a+b)^n} = {}_nC_0\, a^n + {}_nC_1\, a^{n-1} b + {}_nC_2\, a^{n-2} b + \cdots + {}_nC_{n-1}\, a b^{n-1} + {}_nC_n\, b^n$$

$$= \sum_{r=0}^{n} {}_nC_r\, a^{n-r} + b^r$$

$$= \boxed{\sum_{r=0}^{n} {}_nC_k\, a^{r-k} + b^k}$$

${}_nC_r\, a^{n-r} b^r$

展開一般項

まとめ

$$\boxed{\sum_{k=0}^{r} {}_nC_k\, a^{n-k} b^k = (a+b)^n}$$

例 次の和を求めよ。

(1) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} {}_nC_k \times 2^k$

(2) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} {}_nC_k$

解) (1) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} {}_nC_k \times 2^k$

$$= \sum_{k=0}^{n} {}_nC_k \times 1^{n-k} \times 2^k$$

$$= (1+2)^n = 3^n \text{〃}$$

(2) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} {}_nC_k$

$$= \sum_{k=1}^{n} {}_nC_k \cdot 1^{n-k} \cdot 1^k$$

$$= \sum_{k=0}^{n} {}_nC_k \cdot 1^{n-k} \cdot b^k - {}_nC_0$$

$$= 2^n - 1 \text{〃}$$

4. 群数列

(例) 数列

1, 1, 2, 1, 2, 3, 1, 2, 3, 4, 1, 2, 3, 4, 5 …

がある。

この数列の第100項は $\boxed{}$ であり、初項から第100項までの和は $\boxed{}$ である。

[群数列問題]

最初に調べる3つのこと

(i) 第k群の要素の個数

(ii) 第1～k群の要素の個数

(iii) 第k群の1つめは第何項か?

解) 与えられた数列を下のように、第1群、第2群 … と群に分ける。

1群	2群	3群	4群	5群	6群
1、	1、2、	1、2、3、	1、2、3、4、	1、2、3、4、5、	1、2、…

よって、(i) 第k群にはkコ。

(ii) 第1～k群には $1+2+3+\cdots+k=\frac{1}{2}k(k+1)$ コ。

(iii) 第k群の1つめは 第$\left\{\frac{1}{2}k(k-1)+1\right\}$項。

第100項が第n群にあるとすると、

$$\frac{1}{2}n(n-1)+1 \leqq 100 \leqq \frac{1}{2}n(n+1) \iff n(n-1)+2 \leqq 200 \leqq n(n+1)$$

これをみたすnは14。よって第14群にある。

第14群の1つめは(iii)より、第$\left(\frac{1}{2}\times 14\times 13+1\right)=92$項

よって第100項は、第14群の$100-92+1=9$項め。

第100項は9〃

次に、初項から第100項までの和について、

(第1〜13群までのすべての和)+(第14群の最初の9コの和)

第k群の和は、

$$1+2+3+\cdots+k=\frac{1}{2}k(k+1)$$

求める和は、

$$\sum_{k=1}^{13}\frac{1}{2}k(k+1)+(1+2+3+\cdots+9)$$

$$=\frac{1}{2}\left(\sum_{k=1}^{13}k^2+\sum_{k=1}^{13}k\right)+45$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{6}\times 13\times 14\times 27+\frac{1}{2}\times 13\times 14\right)+45$$

$$=\frac{1}{2}\times 13\times 7\,(9+1)+45$$

$$=5(91+9)$$

$$=500〃$$

5. 階差数列

階差数列を利用して、一般項を求める。

例 1、4、9、16、25、36、49、64 … n^2(?)

$+3$　$+5$　$+7$　$+9$　$+11$　$+13$　$+15$　←「階差数列」

a_1、a_2、a_3、a_4、a_5、a_6 …、a_{n-1}、$\boxed{a_n、a_{n+1}}$

$+b_1$　$+b_2$　$+b_3$　$+b_4$　$+b_5$　$+b_{n-1}$　$\boxed{+b_n}$

$\{b_n\}$：階差数列

$\boxed{a_{n+1}-a_n=b_n}$

数列$\{a_n\}$に対して、$a_{n+1}-a_n$を第n項とする数列

$$\boxed{a_n}=\underline{a_1+b_1+b_2+b_3+\cdots+b_{n-1}}$$

$\hookrightarrow \sum_{k=1}^{n-1} b_k$

$$\boxed{=a_1+\sum_{k=1}^{n-1} b_k \quad (n \geqq 2)}$$

まとめ

数列$\{a_n\}$の階差数列を$\{b_n\}$とすると、

- $\boxed{a_n = a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} b_k \quad (n \geqq 2)}$
- $a_{n+1} = a_n + b_n$

㊖ 1、4、9、16、25、36、49、64、…

この数列を $\{a_n\}$、階差数列を $\{b_n\}$ とすると、
$\{b_n\}$ は初項3、公差2の等差数列なので、

$$b_n = 3 + (n-1) \times 2$$
$$= 2n - 1$$

$n \geqq 2$ のとき、

$$a_n = a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} b_k$$
$$= 1 + \sum_{k=1}^{n-1} (2k+1)$$
$$= 1 + 2\sum_{k=1}^{n-1} k + \sum_{k=1}^{n-1} 1$$
$$= 1 + 2 \times \frac{1}{2} n(n-1) + (n-1)$$
$$= n^2 \ (n=1 \text{ でも成立})$$

よって、$n \geqq 1$ で $a_n = n^2$〃

㊫ 次の数列の一般項 a_n を求めよ。

2、3、6、15、42、123 …

解) 2、3、6、15、42、123 …

+1　+3　+9　+27　+81　←階差数列

階差数列 $\{b_n\}$ とすると、初項1、公比3の等比数列なので、

$$b_n = 1 \times 3^{n-1}$$

$n \geqq 2$のとき、

$$a_n = a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} b_k$$

$$= 2 + \sum_{k=1}^{n-1} 1 \times 3^{k-1}$$

$$= 2 + \frac{1 \times (3^{n-1} - 1)}{3 - 1}$$

$$= 2 + \frac{1}{2}(3^{n-1} - 1)$$

$$= \frac{1}{2}(4 + 3^{n-1} - 1)$$

$$= \frac{1}{2}(3^{n-1} + 3)$$

$n = 1$を代入 $a_1 = \frac{1}{2}(1 + 3)$

$$= 2$$

$n \geqq 1$で、$a_n = \frac{1}{2}(3^{n-1} + 3)$ //

(応用) 第2階差

㊎ 次の数列の一般項を求めよ。

$6,\ 24,\ 60,\ 120,\ 210,\ 336,\ 504 \cdots$ ← 元の数列 $\{a_n\}$

$+18,\ +36,\ +60,\ +90,\ +126,\ +168$ ← (第1)階差数列 $\{b_n\}$

$+18,\ +24,\ +30,\ +36,\ +42$ ← (第2)階差数列 $\{c_n\}$

解) 与えられた数列を $\{a_n\}$ とし、

その階差数列を $\{b_n\}$

第2階差数列を $\{c_n\}$ とする。

$$\begin{aligned} c_n &= 18 + (n-1) \times 6 \\ &= 6n + 12 \end{aligned}$$

$n \geqq 2$ のとき、

$$\begin{aligned} b_n &= b_1 + \sum_{k=1}^{n-1} c_k \\ &= 18 + \sum_{k=1}^{n-1} (6k+12) \\ &= 18 + 6\sum_{k=1}^{n-1} k + 12\sum_{k=1}^{n-1} 1 \\ &= 18 + 6 \times \frac{1}{2} n(n-1) + 12 \times (n-1) \\ &= 3\{6 + n(n-1) + 4(n-1)\} \\ &= 3(n^2 + 3n + 2) \end{aligned}$$

$n=1$ とすると、$b_1 = 3(1^2+3\times1+2)$

$= 18$

よって、$n \geqq 1$ で、$b_n = 3(n^2+3n+2)$

$n \geqq 2$ のとき、

$$a_n = a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} b_k$$
$$= 6 + \sum_{k=1}^{n-1} 3(k^2+3k+2) \quad \cdots (*)$$
$$= 6 + 3\left(\sum_{k=1}^{n-1} k^2 + 3\sum_{k=1}^{n-1} k + 2\sum_{k=1}^{n-1} 1\right)$$
$$= 6 + 3\left\{\frac{1}{6}n(n-1)(2n-1) + 3\times\frac{1}{2}n(n-1) + 2\times(n-1)\right\}$$
$$= \frac{1}{2}\{12 + n(n-1)(2n-1) + 9n(n-1) + 12n - 12\}$$
$$= \frac{1}{2}n\{(n-1)(2n-1) + 9(n-1) + 12\}$$
$$= \frac{1}{2}n(2n^2+6n+4)$$
$$= n(n^2+3n+2)$$
$$= n(n+1)(n+2)$$

$n=1$ を代入すると、$a_1 = 1\cdot2\cdot3 = 6$

よって、$n \geqq 1$ で、$a_n = n(n+1)(n+2)$〃

(別解)(＊)のつづき

$$a_n = 6 + 3\sum_{k=1}^{n-1}(k+1)(k+2)$$
$$= 6 + 3\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{3}\{(k+1)(k+2)(k+3) - k(k+1)(k+2)\}$$
$$= 6 - \sum_{k=1}^{n-1}\{k(k+1)(k+2) - (k+1)(k+2)(k+3)\}$$
$$= 6 - [(1\cdot2\cdot3 - 2\cdot3\cdot4) + (2\cdot3\cdot4 - 3\cdot4\cdot5) + (3\cdot4\cdot5 - 4\cdot5\cdot6) +$$
$$\cdots + \{(n-1)\cdot n\cdot(n+1) - n(n+1)(n+2)\}]$$

6. a_n と S_n の関係

一般項 $\xrightarrow[\Sigma で。]{}$ 和（a_1〜a_nの）

$$
\begin{array}{lrl}
 & S_n = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \cdots + a_{n-1} + a_n & (n \geqq 1) \\
-) & S_{n-1} = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \cdots + a_{n-1} & (n \geqq 2) \\
\hline
 & S_n - S_{n-1} = \qquad\qquad\qquad\qquad a_n & (n \geqq 2)
\end{array}
$$

$n \geqq 2$ のとき、$a_n = S_n - S_{n-1}$

$n = 1$ のとき、$a_1 = S_1$

まとめ

数列$\{a_n\}$の初項から第n項までの和をS_nとすると、

$$
\begin{cases}
a_n = S_n - S_{n-1} & (n \geqq 2) \\
a_1 = S_1
\end{cases}
$$

例 初項から第n項までの和S_nが次の式で与えられる数列$\{a_n\}$の一般項を求めよ。

(1) $S_n = n^2 - 3n$ (2) $S_n = n^2 - 3n + 1$ (3) $S_n = 3^n - 1$

解) (1) $n \geqq 2$のとき、

$$a_n = S_n - S_{n-1}$$
$$= n^2 - 3n - \{(n-1)^2 - 3(n-1)\}$$
$$= n^2 - 3n - (n^2 - 5n + 4)$$
$$= 2n - 4$$

$\left.\begin{array}{l} n = 1 \text{ とすると、} a_1 = -2 \\ \text{実際の } a_1 \text{ は } a_1 = S_1 = -2 \end{array}\right\}$ 一致。

よって、$n \geqq 1$で$a_n = 2n - 4$ //

(2) $n \geqq 2$のとき、

$$a_n = S_n - S_{n-1}$$
$$= n^2 - 3n + 1 - \{(n-1)^2 - 3(n-1) + 1\}$$
$$= 2n - 4$$

$\left.\begin{array}{l} n = 1 \text{ とすると、} a_1 = -2 \\ \text{実際の } a_1 \text{ は、} a_1 = S_1 = -1 \end{array}\right\}$ 一致しない。

よって、$\begin{cases} n \geqq 2 \text{ のとき、} a_n = 2n - 4 \\ a_1 = -1 \end{cases}$

(3) $n \geqq 2$のとき、

$$a_n = S_n - S_{n-1}$$
$$= 3^n - 1 - (3^{n-1} - 1)$$
$$= 3^1 \cdot 3^{n-1} - 3^{n-1}$$
$$= (3-1) \cdot 3^{n-1}$$
$$= 2 \cdot 3^{n-1}$$

$n = 1$とすると、

$a_1 = 2 \cdot 3^0 = 2$

実際のa_1は、$a_1 = 3^1 - 1 = 2$

一致するので、$n \geqq 1$で $a_n = 2 \cdot 3^{n-1}$ //

応用

例 数列$\{a_n\}$において、

$$\sum_{k=1}^{n} k(k+1)(\sqrt{k+1}+\sqrt{k})a_k = n(n+1)(n+2) \quad (n \geqq 1)$$

が成り立つとき、

(1) a_nを求めよ。

(2) $\sum_{k=1}^{n} a_k$を求めよ。

解) $\begin{cases} b_n = n(n+1)(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})a_n \\ T_n = n(n+1)(n+2) \end{cases}$ とおくと、

$T_n = \sum_{k=1}^{n} b_k$ $\leftarrow \begin{cases} b_n = T_n - T_{n-1} \ (n \geqq 2) \\ b_1 = T_1 \end{cases}$ が成り立つ (b_nとT_nの関係)

(1) $n \geqq 2$のとき、

$$\begin{aligned} b_n &= T_n - T_{n-1} \\ &= n(n+1)(n+2) - (n-1)n(n+1) \\ &= n(n+1)\{(n+2)-(n-1)\} \\ &= 3n(n+1) \end{aligned}$$

$n=1$を代入すると、$b_1 = 6$
実際のb_1は$b_1 = T_1 = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$
一致する。

$\therefore$ $n \geqq 1$で$b_n = 3n(n+1)$

①に代入して、

$3n(n+1) = n(n+1)(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})a_n$

$\therefore$ $a_n = \dfrac{3}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} \quad (n \geqq 1)$ //

(2)
$$\sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{n} \frac{3}{\sqrt{k+1}+\sqrt{k}}$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \frac{3(\sqrt{k+1}-\sqrt{k})}{(\sqrt{k+1}+\sqrt{k})(\sqrt{k+1}-\sqrt{k})}$$

$$= 3\sum_{k=1}^{n} (\sqrt{k+1}-\sqrt{k})$$

$$= 3\{(\sqrt{2}-1)+(\sqrt{3}-\sqrt{2})+(\sqrt{4}-\sqrt{3})+\cdots+(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})\}$$

$$= 3(\sqrt{n+1}-1)$$

7. 漸化式

基本説明

漸化式

数列の項の値を順次定めていく等式

以下のような関係式が成り立つとき、a_nを求められる?

例1 $a_1=1$、$\boxed{a_{n+1}=a_n+2}$ …①

①に$n=1$を代入 $a_2=a_1+2=3$

①に$n=2$を代入 $a_3=a_2+2=5$

①に$n=3$を代入 $a_4=a_3+2=7$

⋮

数列$\{a_n\}$は

初項1、公差2の等差数列。

したがって、$a_n=1+(n-1)\times 2$

$=2n-1$ //

数列$\{a_n\}$の帰納的定義

例2 $a_1=3$、$\boxed{a_{n+1}=2a_n}$ …②

②に$n=1$を代入 $a_2=2a_1=6$

②に$n=2$を代入 $a_3=2a_2=12$

②に$n=3$を代入 $a_4=2a_3=24$

⋮

数列$\{a_n\}$は

初項3、公比2の等比数列。

したがって、$a_n=3\times 2^{n-1}$ //

自然数nの命題$A(n)$に対して、次の2つが与えられると、$A(n)$が定まるときがある。このような定義の仕方を「帰納的定義」という。

① $A(1)$　　② $A(n)$から$A(n+1)$を定める規則

漸化式 7パターン！

まずはパターン1〜4の形を。

$$\boxed{a_{n+1} = \underbrace{p}_{\text{定数}}\, a_n + \underbrace{f(n)}_{n\text{を用いた式}}}$$ 形

（パターン1）　$p=1$　（かつ $f(n)$：n の形）　例 $a_1=1$、$a_{n+1}=a_n+3^n$

（パターン2）　$p \neq 1$　かつ $f(n)$：定数　例 $a_1=1$、$a_{n+1}=2a_n+1$

（パターン3）　$p \neq 1$　かつ $f(n)$：n の一次式　例 $a_1=1$. $a_{n+1}=3a_n+2n+1$

（パターン4）　$p \neq 1$　かつ $f(n)$：r^n の形　例 $a_1=1$、$a_{n+1}=2a_n+3^n$

さらに、

（パターン5）　分数形　$a_{n+1}=\dfrac{ra_n}{pa_n+q}$　例 $a_1=1$、$a_{n+1}=\dfrac{a_n}{2a_n+1}$

（パターン6）　3項間　$a_{n+2}+pa_{n+1}+qa_n=0$

例 $\begin{cases} a_1=1 \\ a_2=3 \end{cases}$、$a_{n+2}-3a_{n+1}+2a_n=0$

（パターン7）　くっつき形　$a_{n+1}=pa_n^{\,q}$　例 $a_1=1$、$a_{n+1}=2a_n^{\,3}$

（パターン1）　$p=1$（かつ　$f(n)$：nの式）

漸化式から
一般項a_nを求めることを
「漸化式を解く」という。

「階差数列」を利用

例　$a_1=1$、$a_{n+1}=a_n+3^n$のとき、a_nを求める。$(n\geqq 1)$

解）$b_n=3^n$とおくと、

$n\geqq 2$のとき、

$$
\begin{aligned}
a_n &= a_1+\sum_{k=1}^{n-1} b_k \\
&= 1+\sum_{k=1}^{n-1} 3^k \\
&= 1+\sum_{k=1}^{n-1} 3\times 3^{k-1} \\
&= 1+\frac{3(3^{n-1}-1)}{3-1} \\
&= 1+\frac{3^n-3}{2} \\
&= \frac{2+3^n-3}{2} \\
&= \frac{1}{2}(3^n-1)
\end{aligned}
$$

$n=1$を代入。

$a_n=\frac{1}{2}(3^1-1)=1$　成立。

よって、$n\geqq 1$で

$a_n=\frac{1}{2}(3^n-1)$ //

(パターン2) $p \ne 1$ かつ $f(n)$：定数

「特性方程式」を利用

$a_{n+1} = pa_n + q$ について、$a_{n+1} = a_n = \alpha$ とおいて α を求め、

$a_{n+1} - \alpha = p(a_n - \alpha)$ と変形する。

例 $a_1 = 1$、$a_{n+1} = 2a_n + 1$ について、a_n を求める。$(n \geqq 1)$

解) $a_{n+1} = 2a_n + 1$ は、

$a_{n+1} - (-1) = 2(a_n - (-1))$、つまり $a_{n+1} + 1 = 2(a_n + 1)$

と変形できる。

数列 $\{a_n + 1\}$ は、初項 $a_1 + 1 = 2$、公比 2 の等比数列。

$\therefore\ a_n + 1 = 2^1 \times 2^{n-1}$

$= 2^n \qquad a_n = 2^n - 1$ //

(パターン2) の $a_{n+1} = \underset{\ne 1}{p} a_n + \underset{\text{定数}}{q}$ について、

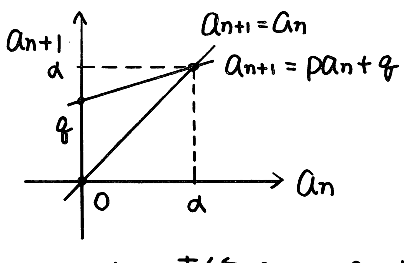
$a_{n+1} = a_n = \alpha$ とおいて α を求め、

$a_{n+1} - \alpha = p(a_n - \alpha)$

と変形できるのは何故？

点 (x_0, y_0) を通り、傾き m の直線の方程式は

$y - y_0 = m(x - x_0)$



(α, α) は直線 $a_{n+1} = a_n$ 上

2直線 $\begin{cases} a_{n+1} = pa_n + q \\ a_{n+1} = a_n \end{cases}$ を代入。

$a_n = pa_n + q$

この a_n を α とすると、

$\alpha = p\alpha + q$ 、この α を求めれば

$a_{n+1} = pa_n + q \iff a_{n+1} - \alpha = p(a_n - \alpha)$

（パターン3）　$p \neq 1$ かつ $f(n)$：n の一次式

「等比形」へ！　（別のやり方）

例　$a_1 = 1$、$a_{n+1} = 3a_n + 2n + 1$ について、a_n を求める。（$n \geqq 1$）

解）$a_{n+1} = 3a_n + 2n + 1 \cdots$ ①が、

$a_{n+1} + \alpha(n+1) + \beta = 3(a_n + \alpha n + \beta) \cdots$ ②　（α、β：定数）

と変形できるとする。

②は $a_{n+1} = 3a_n + 2\alpha n + 2\beta - \alpha$

①と一致するので、$2\alpha = 2$、かつ $2\beta - \alpha = 1$

したがって、$\alpha = 1$、$\beta = 1$

よって②から、$a_{n+1} + (n+1) + 1 = 3(a_n + n + 1)$

数列 $\{a_n + n + 1\}$ は、初項 $a_1 + 1 + 1 = 3$、公比3の等比数列。

$\therefore$、$a_n + n + 1 = 3^1 \times 3^{n-1}$

$= 3^n$

$a_n = 3^n - n - 1$〃

別解）

$$\begin{array}{rl} a_{n+2} = 3a_{n+1} + 2(n+1) + 1 & (n \geqq 0) \\ -)\ a_{n+1} = 3a_n + 2n + 1 & (n \geqq 1) \cdots ① \\ \hline a_{n+2} - a_{n+1} = 3(a_{n+1} - a_n) + 2 & (n \geqq 1) \end{array}$$

ここで、①において$n=1$とすれば、$a_2 = 3a_1 + 2 \times 1 + 1$

$= 6$

$a_{n+1} - a_n = b_n$とおくと、$(b_1 = a_2 - a_1 = 5)$

$b_{n+1} = 3b_n + 2$

$b_{n+1} + 1 = 3(b_n + 1)$

数列$\{b_n + 1\}$は初項$b_1 + 1 = 6$、公比3の

等比数列。

$\therefore b_n + 1 = 6 \times 3^{n-1}$

$b_n = 6 \times 3^{n-1} - 1$

したがって、$a_{n+1} - a_n = 6 \times 3^{n-1} - 1$

$a_{n+1} = a_n + 6 \times 3^{n-1} - 1$

$n \geqq 2$のとき、

$$a_n = a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} b_k$$

$$= 1 + \sum_{k=1}^{n-1} (6 \times 3^{n-1} - 1)$$

$$= 1 + \frac{6(3^{n-1}-1)}{3-1} - (n-1)$$

$$= 1 + 3(3^{n-1}-1) - n + 1$$

$$= 3^n - n - 1$$

$n = 1$を代入 $a_1 = 3^1 - 1 - 1$

$= 1$

成立するので、$n \geqq 1$で、$a_n = 3^n - n - 1$〃

（パターン4）　$p \neq 1$ かつ $f(n)$ に r^n 形

両辺を $\square^{n+1}$ でわる。

2通り

例　$a_1 = 1$、$a_{n+1} = 2a_n + 3^n$ …① について、a_n を求める。$(n \geqq 1)$

（解1）①の両辺を 2^{n+1} でわる。

$$\frac{a_{n+1}}{2^{n+1}} = \frac{2a_n}{2^{n+1}} + \frac{3^n}{2^{n+1}}$$

$$= \frac{2a_n}{2 \times 2^n} + \frac{3 \times 3^{n-1}}{2^2 \times 2^{n-1}}$$

$$= \frac{a_n}{2^n} + \frac{3}{4} \times \left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}$$

$\frac{a_n}{2^n} = b_n$ とおくと、$\left(b_1 = \frac{a_1}{2} = \frac{1}{2}\right)$

$$b_{n+1} = b_n + \frac{3}{4} \times \left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}$$

$n \geqq 2$ のとき、

$$b_n = b_1 + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{3}{4} \times \left(\frac{3}{2}\right)^{k-1}$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{\frac{3}{4}\left\{\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1} - 1\right\}}{\frac{3}{2} - 1}$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{3}{2}\left\{\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1} - 1\right\}$$

$$= \frac{1}{2} + \left(\frac{3}{2}\right)^n - \frac{3}{2}$$

$$= \left(\frac{3}{2}\right)^n - 1$$

$n=1$ を代入すると、

$b_1 = \frac{3}{2} - 1 = \frac{1}{2}$ で成立。

$n \geqq 1$ で、$b_n = \left(\frac{3}{2}\right)^n - 1$

$\therefore \frac{a_n}{2^n} = \left(\frac{3}{2}\right)^n - 1$

よって、$a_n = 3^n - 2^n$ //

（解2）①の両辺を 3^{n+1} でわる。

$$\frac{a_{n+1}}{3^{n+1}} = \frac{2a_n}{3^{n+1}} + \frac{3^n}{3^{n+1}}$$

$$= \frac{2a_n}{3 \times 3^n} + \frac{3^n}{3 \times 3^n}$$

$$= \frac{2}{3} \times \frac{a_n}{3^n} + \frac{1}{3}$$

$\frac{a_n}{3^n} = c_n$ とおくと、$\left(c_1 = \frac{a_1}{3^1} = \frac{1}{3}\right)$

$c_{n+1} = \frac{2}{3}c_n + \frac{1}{3}$

$c_{n+1} - 1 = \frac{2}{3}(c_n - 1)$

数列 $\{c_n - 1\}$ は、初項 $c_1 - 1 = -\frac{2}{3}$、公比 $\frac{2}{3}$ の等比数列。

$c_n - 1 = -\frac{2}{3} \times \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$

よって、$c_n = 1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n$

$\therefore \frac{a_n}{3^n} = 1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n$

$a_n = 3^n\left\{1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n\right\} = 3^n - 2^n$ //

(パターン5)　分数形　$a_n = \frac{ra_n}{pa_n+q}$

$\boxed{\text{両辺逆数をとる}}$

例　$a_1 = 1$、$a_{n+1} = \frac{a_n}{2a_n+1}$ について、a_n を求める。($n \geqq 1$)

解) 明らかに、数列 $\{a_n\}$ の各項は正なので、両辺逆数をとって、

$$\frac{1}{a_{n+1}} = \frac{2a_n+1}{a_n}$$

$$= \frac{2a_n}{a_n} + \frac{1}{a_n}$$

$$= \frac{1}{a_n} + 2$$

$\frac{1}{a_n} = b_n$ とおくと、($b_1 = \frac{1}{a_1} = 1$)

$$b_{n+1} = b_n + 2$$

数列 $\{b_n\}$ は、初項1、公差2の等差数列。

$$b_n = 1 + (n-1) \times 2$$

$$= 2n - 1$$

よって、$\frac{1}{a_n} = 2n - 1$

$\therefore$ $a_n = \frac{1}{2n-1}$ //

(パターン6)　3項間　$a_{n+2}+pa_{n+1}+qa_n=0$

$\boxed{\text{特性方程式を利用}}$

↳ $a_{n+2}=x^2$、$a_{n+1}=x$、$a_n=1$ として作られる

2次方程式の2つの解をα、βとすると、与えられた

漸化式は

$$\begin{cases} a_{n+2}-\alpha a_{n+1}=\beta(a_{n+1}-\alpha a_n) \\ a_{n+2}-\beta a_{n+1}=\alpha(a_{n+1}-\beta a_n) \end{cases}$$

と変形できる。

例 $a_1=1$、$a_2=3$、$a_{n+2}-3a_{n+1}+2a_n=0$ のとき、

a_nを求める。($n\geqq1$)

解)

$x^2-3x+2=0$

↳ $(x-1)(x-2)=0$ より、$x=1$、2

$a_{n+2}-3a_{n+1}+2a_n=0$ …① は、

$$\begin{cases} a_{n+2}-1\cdot a_{n+1}=2(a_{n+1}-1\cdot a_n) \cdots ② \\ a_{n+2}-2a_{n+1}=1\cdot(a_{n+1}-2a_n) \cdots ③ \end{cases}$$ と変形できる。

②から、数列$\{a_{n+1}-a_n\}$は、初項$a_2-a_1=2$、公比2

の等比数列。

$\therefore$ $a_{n+1}-a_n=2\times2^{n-1} \rightsquigarrow a_{n+1}=a_n+2^n$ …②'

③から、数列$\{a_{n+1}-2a_n\}$は、初項$a_2-2a_1=1$、公比1

の等比数列。

$\therefore$ $a_{n+1}-2a_n=1\times1^{n-1} \rightsquigarrow a_{n+1}=2a_n+1$ …③'

③' − ②'　$0 = a_n + 1 - 2^n$　　$\therefore a_n = 2^n - 1$ //

α と β を解にもつ2次方程式は
$(x-\alpha)(x-\beta) = 0$
$\iff x^2 - (\alpha+\beta)x + \alpha\beta = 0$

特性方程式が重解のときは

変形した1通りで解く!

(パターン7) くっつき形 $a_{n+1} = pa_n^{q}$

$\boxed{\text{両辺対数をとる。}}$

→底の $\begin{cases} \text{第1候補：係数} \\ \text{第2候補：初項} \end{cases}$

例 $a_1 = 1$、$a_{n+1} = 2a_n^3$ について、a_n を求める。$(n \geqq 1)$

解) 明らかに $\{a_n\}$ の各項は正なので、両辺 2を底とした対数をとって、

$$\log_2 a_{n+1} = \log_2 2a_n^3$$
$$= \log_2 2 + \log_2 a_n^3$$
$$= 1 + 3\log_2 a_n$$

$\log_2 a_n = b_n$ とおくと、$(b_1 = \log_2 a_1 = \log_2 1 = 0)$

$$b_{n+1} = 3b_n + 1$$
$$b_{n+1} + \frac{1}{2} = 3\left(b_n + \frac{1}{2}\right)$$

数列 $\left\{b_n + \frac{1}{2}\right\}$ は、初項 $b_1 + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$、公比3の等比数列。

したがって、$b_n + \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \times 3^{n-1}$

$$b_n = \frac{1}{2}(3^{n-1} - 1)$$

よって、$\log_2 a_n = \frac{1}{2}(3^{n-1} - 1)$ から、

$$a_n = 2^{\frac{1}{2}(3^{n-1} - 1)}$$

//

例' $a_1 = 3$、$a_{n+1} = a_n{}^2 \ (n \geqq 1)$

$$\log_3 a_{n+1} = \log_3 a_n{}^2$$
$$= 2\log_3 a_n$$

$\log_3 a_n = c_n$ とおくと、($c_1 = \log_3 a_1 = \log_3 3 = 1$)

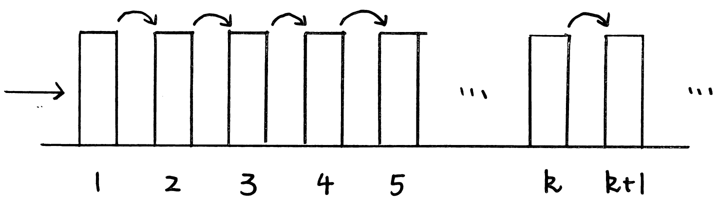
$c_{n+1} = 2c_n$

$c_n = 1 \times 2^{n-1}$

$\log_3 a_n = 2^{n-1} \rightsquigarrow a_n = 3^{2^{n-1}}$ //

8. 数学的帰納法

ドミノ



すべてのドミノが倒れるには

(i) 1つめのドミノを倒す。

かつ

(ii) kつめのドミノが倒れるならば、(k+1)つめのドミノも倒れる。

① 1つめのドミノを倒す。

② 1つめのドミノが倒れれば、2つめのドミノも倒れる。

③ 2つめのドミノが倒れれば、3つめのドミノも倒れる。

④ 3つめのドミノが倒れれば、4つめのドミノも倒れる。

⑤ 4つめのドミノが倒れれば、5つめのドミノも倒れる。

kつめのドミノが倒れれば、(k+1)つめのドミノも倒れる。$(k \geqq 1)$

自然数nに関する事柄Pが、すべての自然数nについて成り立つことを証明する。

$\boxed{\text{数学的帰納法}}$

(i) $n=1$のとき、Pが成り立つ。

(ii) $n=k$のとき、Pが成り立つと仮定すると、

$n=k+1$のときにもPが成り立つ。

㊞例 nが自然数のとき、次の等式が成り立つことを、数学的帰納法を用いて証明せよ。

$$1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$$

証明

(i) $n=1$のとき、

$$\left.\begin{array}{l}(\text{左辺})=1^2=1\\(\text{右辺})=\frac{1}{6}\times1\times2\times3=1\end{array}\right\}\text{成立。}$$

(ii) $n=k$のとき、

$$1^2+2^2+3^2+\cdots+k^2=\frac{1}{6}k(k+1)(2k+1)\quad\cdots①$$

が成立すると仮定。

(目標：$1^2+2^2+3^2+\cdots+k^2+(k+1)^2=\frac{1}{6}(k+1)(k+2)(2k+3)$ を示す)

①の両辺に$(k+1)^2$をたして、

$$\begin{aligned}1^2+2^2+3^2+\cdots+k^2+(k+1)^2&=\frac{1}{6}k(k+1)(2k+1)+(k+1)^2\\&=\frac{1}{6}(k+1)\{k(2k+1)+6(k+1)\}\\&=\frac{1}{6}(k+1)(2k^2+7k+6)\\&=\frac{1}{6}(k+1)(k+2)(2k+3)\end{aligned}$$

よって、$n=k+1$のときも成立。

(i)、(ii)より、すべての自然数について、

$$1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$$

が成り立つ。

(証明終)

〈基本編〉 不等式

例 nが自然数のとき、次の不等式が成立することを数学的帰納法を用いて証明せよ。

$$\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{n^2}\leqq 2-\frac{1}{n}$$

証明

(i) $n=1$のとき、

$$\left.\begin{array}{l}(\text{左辺})=\frac{1}{1^2}=1\\(\text{右辺})=2-\frac{1}{1}=1\end{array}\right\}\text{成立。}$$

(ii) $n=k$のとき、

$\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{k^2}\leqq 2-\frac{1}{k}$ …① が成立すると仮定。

(目標：$\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{k^2}+\frac{1}{(k+1)^2}\leqq 2-\frac{1}{k+1}$ を示す)

①の両辺に $\frac{1}{(k+1)^2}$ をたすと、

$$\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{k^2}+\frac{1}{(k+1)^2}\leqq 2-\frac{1}{k}+\frac{1}{(k+1)^2}\quad\cdots①'$$

ここで、

$$\begin{aligned}2-\frac{1}{k+1}-\left\{2-\frac{1}{k}+\frac{1}{(k+1)^2}\right\}&=\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}-\frac{1}{(k+1)^2}\\&=\frac{(k+1)^2-k(k+1)-k}{k(k+1)^2}\\&=\frac{k^2+2k+1-k^2-k-k}{k(k+1)^2}\\&=\frac{1}{k(k+1)^2}\underset{(=)}{>}0\end{aligned}$$

よって、$2-\frac{1}{k}+\frac{1}{(k+1)^2} \leqq 2-\frac{1}{k+1}$ …②

①′かつ②より、$\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{(k+1)^2} \leqq 2-\frac{1}{k+1}$

よって、$n=k+1$ のときも成立。

(i)、(ii)より、すべての自然数 n について、

$\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{n^2} \leqq 2-\frac{1}{n}$ が成立 ▨

〈基本編〉 倍数証明

例 すべての自然数nに対して、$3^{n+2}+4^{2n+1}$が13の倍数であることを、数学的帰納法で証明せよ。

証明

(i) $n=1$のとき、

$3^{n+2}+4^{2n+1}=3^3+4^3=91$　よって、13の倍数となる。

(ii) $n=k$のとき、

$3^{k+2}+4^{2k+1}=13l$ (l：整数) …① と仮定。

(目標：$3^{(k+1)+2}+4^{2(k+1)+1}$が13の倍数であることを示す。)

このとき、

$$
\begin{aligned}
3^{(k+1)+2}+4^{2(k+1)+1} &= 3^{k+3}+4^{2k+3} \\
&= 3^1\times 3^{k+2}+4^{2k+3} \\
&= 3(13l-4^{2k+1})+4^{2k+3} \quad (①より) \\
&= 3\times 13l-3\times 4^{2k+1}+4^2\times 4^{2k+1} \\
&= 3\times 13l+(4^2-3)\times 4^{2k+1} \\
&= 13(3l+4^{2k+1})
\end{aligned}
$$

$3l+4^{2k+1}$は整数なので、$3^{(k+1)+2}+4^{2(k+1)+1}$は13の倍数。

よって、$n=k+1$のときも成立。

(i)、(ii)により、すべての自然数nについて、

$3^{n+2}+4^{2n+1}$は13の倍数 (Q.E.D)

〈基本編〉推定 → 帰納法

例 $a_1=1$、$a_{n+1}=\dfrac{4-a_n}{3-a_n}$ $(n \geqq 1)$ で表される数列 $\{a_n\}$ について。

(1) a_2、a_3、a_4

(2) 一般項 a_n を推定せよ。

(3) (2)の推定が正しいことを、数学的帰納法により示せ。

---

(1) $a_1=1$、$a_{n+1}=\dfrac{4-a_n}{3-a_n}$ …① $(n \geqq 1)$ について、

①に $n=1$ を代入して、$a_2=\dfrac{4-a_1}{3-a_1}=\dfrac{3}{2}$ //

①に $n=2$ を代入して、$a_3=\dfrac{4-a_2}{3-a_2}=\dfrac{\frac{5}{2}}{\frac{3}{2}}=\dfrac{5}{3}$ //

①に $n=3$ を代入して、$a_4=\dfrac{4-a_3}{3-a_3}=\dfrac{\frac{7}{3}}{\frac{4}{3}}=\dfrac{7}{4}$ //

(2)
$$\left.\begin{aligned} a_1 &= \frac{1}{1} \\ a_2 &= \frac{3}{2} \\ a_3 &= \frac{5}{3} \\ a_4 &= \frac{7}{4} \end{aligned}\right\}$$
より、$a_n=\dfrac{2n-1}{n}$ と推定できる。//

(3) $a_n=\dfrac{2n-1}{n}$ が成り立つことを示す。

(i) $n=1$ のとき、

$\dfrac{2\times1-1}{1}=1=a_1$ 成立。

(ii) $n=k$ のとき、$a_k = \dfrac{2k-1}{k}$ … ① が成立すると

仮定すると、(目標：$a_{k+1} = \dfrac{2(k+1)-1}{k+1}$ を示す)

$$a_{k+1} = \frac{4-a_k}{3-a_k}$$

$$= \frac{4-\frac{2k-1}{k}}{3-\frac{2k-1}{k}}$$

$$= \frac{4k-(2k-1)}{3k-(2k-1)}$$

$$= \frac{2k+1}{k+1}$$

$$= \frac{2(k+1)-1}{k+1}$$

よって $n=k+1$ のときも成立。

(i)、(ii) より、すべての自然数 n について、

$a_n = \dfrac{2n-1}{n}$ (証明終)

〈応用編〉 3項間

例 nは自然数とする。
2数x、yの和、積がともに整数ならば、
x^n+y^nは整数であることを証明せよ。

証明　数学的帰納法で示す。

$x+y=p$、$xy=q$とする。（pとqは整数）

(i) $n=1$のとき、

$x^n+y^n=x^1+y^1=p$（整数）成立。

$n=2$のとき、

$$
\begin{aligned}
x^n+y^n &= x^2+y^2 \\
&= (x+y)^2-2xy \\
&= p^2-2q \quad \text{成立。}
\end{aligned}
$$

(i) $n=1$、2のときを示す。 (ii) $n=k$、$k+1$のときの成立を仮定→$n=k+2$のときを示す。

(ii) $n=k$、$k+1$のとき、

x^k+y^k、$x^{k+1}+y^{k+1}$が整数…①であると仮定。

（目標：$x^{k+2}+y^{k+2}$が整数となることを示す）

$n=k+2$のとき、

$$
\begin{aligned}
x^n+y^n &= x^{k+2}+y^{k+2} \\
&= (x+y)(x^{k+1}+y^{k+1})-xy(x^k+y^k)
\end{aligned}
$$

p、qが整数及び①から、これは整数。

よって$n=k+2$のときも成立。

(i)、(ii)によって、すべての自然数nについて、

x^n+y^n は整数である。(証明終)

〈応用編〉 和の利用

㊒ 関係式 $a_1 = 1$、$a_{n+1} = \sum_{k=1}^{n} a_k$（$n$は整数）で定義される数列$\{a_n\}$について、次の問いに答えよ。

(1) a_2、a_3、a_4 を求め、a_nを推定せよ。

(2) (1)の推定が正しいことを、数学的帰納法により示せ。

解）(1) $a_1 = 1$、$a_{n+1} = \sum_{k=1}^{n} a_k$ …①

①に$n=1$を代入　$a_2 = a_1 = 1$〃

①に$n=2$を代入　$a_3 = a_1 + a_2 = 2$〃

①に$n=3$を代入　$a_4 = a_1 + a_2 + a_3 = 4$〃

$n \geqq 2$のとき、$a_n = 2^{n-2}$（$n=1$のとき$a_1=1$）と推定できる。〃

（①に$n=4$を代入　$a_5 = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = 8$）

(2) $a_n = 2^{n-2}$（$n \geqq 2$）を示す。

(i) $n=2$のとき、

$a_2 = 2^{2-2} = 2^0 = 1$　は成立。

(ii) $n = 2, 3, 4, \cdots, k$のときに　…②

$a_2 = 2^0$、$a_3 = 2^1$、$a_4 = 2^2$、…、$a_k = 2^{k-2}$が成立すると仮定。（目標：$a_{k+1} = 2^{(k+1)-2} = 2^{k-1}$を示す）

$$a_{k+1} = \sum_{l=1}^{k} a_l$$

$$= a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_k$$

$$= 1 + 2^0 + 2^1 + 2^2 + \cdots + 2^{k-2} \quad (②より)$$

$$= 1 + \frac{1\cdot(2^k - 1)}{2-1}$$

$$= 2^{k-1}$$

よって$n = k+1$のときも成立。

(i)、(ii)より、2以上の自然数nについて、$a_n=2^{n-2}$

よって、$\begin{cases} a_1=1 \\ a_n=2^{n-2}\ (n \geqq 2) \end{cases}$ //