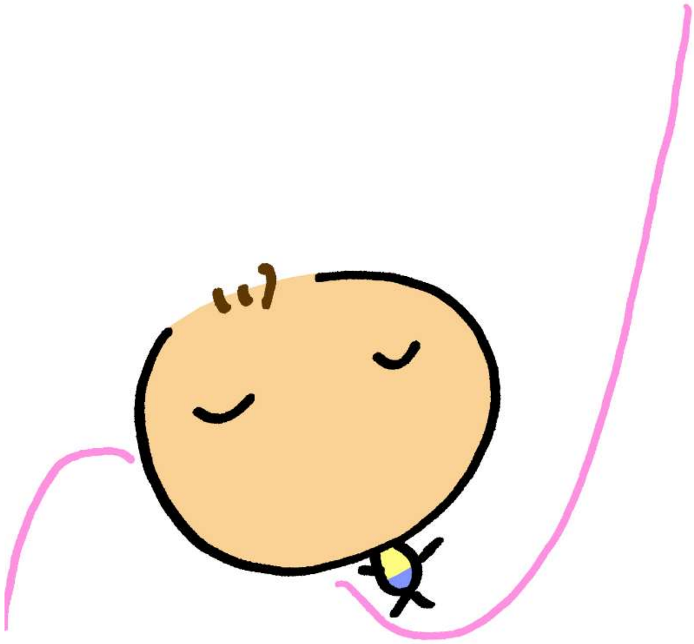
数学Ⅱ

13　数Ⅱ微積



＜講義ノート＞

数Ⅱの微積

１　微分

（１）計算
(i)　極限
(ii) 微分係数
(iii) 導関数

（２）極値・グラフ

（３）最大最小

（４）方程式・不等式への応用
(i)方程式への応用
(ii)不等式への応用

（５）接線

２　積分

（１）計算
＜不定積分＞
＜定積分＞
(i)基本
(ii)応用　（「偶奇」と「面公」含む）

（２）定積分で表された関数（関数決定）
（タイプ１）区間が定数のみ
（タイプ２）区間に変数含む

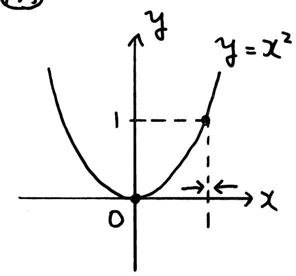
（３）面積
入試頻出５タイプ
（頻１）面積の最大最小
（頻２）外の点から２接線
（頻３）２次関数の共通接線
（頻４）３次関数に接する
（頻５）面積の等分
（（頻１）～（頻３）は２次関数と面積、（頻４）～（頻５）は３次関数と面積）

1. 微分

(1) 計算

(i) 極限

例



$\lim_{x \to 1} x^2 = 1$

$\lim_{x \to 2} x^2 = 4$

極限の基本は
「まず入れてみる」

まとめ 関数$f(x)$において、xがa以外の値をとりながら限りなくaに近づくとき、$f(x)$の値が一定の値αに限りなく近づくならば、αをxがaに限りなく近づくときの$f(x)$の「極限値」といい、

$\lim_{x \to a} f(x) = \alpha$ (もしくは$x \to a$のとき$f(x) \to \alpha$)

と表す。

例′ (1) $\lim_{x \to 2} \frac{x-3}{x^2+4} = \frac{-1}{2^2+4} = -\frac{1}{8}$〃

(2) $\lim_{x \to 2} \frac{x^2-3x+2}{x^2-2x} = \lim_{x \to 2} \frac{(x-1)(x-2)}{x(x-2)}$

$= \frac{1}{2}$〃

$\left(\frac{0.0000003}{0.0000002} = \frac{3}{2} \right)$

(3) $\lim_{x \to -2} \frac{x^3+8}{x^2-x-6} = \lim_{x \to -2} \frac{(x+2)(x^2-2x+4)}{(x+2)(x-3)}$

$= \frac{12}{-5} = -\frac{12}{5}$〃

問 $\displaystyle\lim_{x\to1}\frac{ax^2-7x+b}{x^2+x-2}=-1$ のとき、定数 a、b の値を求めよ。

解) $\displaystyle\lim_{x\to1}\frac{ax^2-7x+b}{x^2+x-2}=-1$　　　$\dfrac{2}{0.000000\cdots01}\to\infty$

(分母) $\to 0$ かつ 右辺が有限値

なので、(分子) $\to 0$

$\therefore\ \displaystyle\lim_{x\to1}(ax^2-7x+b)=0$

よって、$a-7+b=0$　　$b=-a+7\cdots①$

このとき、

$$\begin{aligned}(\text{与式})&=\lim_{x\to1}\frac{ax^2-7x-a+7}{x^2+x-2}\ (①より)\\&=\lim_{x\to1}\frac{a(x^2-1)-7(x-1)}{x^2+x-2}\\&=\lim_{x\to1}\frac{(x-1)\{a(x+1)-7\}}{(x+2)(x-1)}\\&=\frac{2a-7}{3}=-1\end{aligned}$$

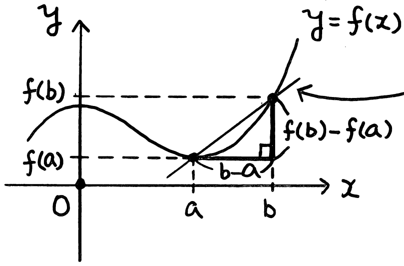
$\Leftrightarrow 2a-7=-3$

$\therefore\ a=2$ //

①より、$b=5$ //

(ii) 微分係数

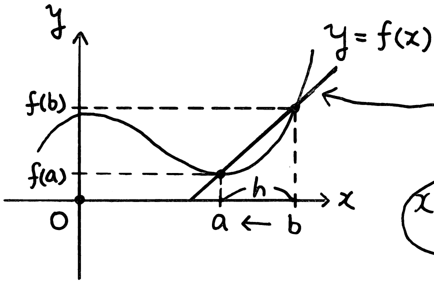
準備（平均変化率）



傾き $\boxed{\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}}$

平均変化率

$\boxed{\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}}$



傾き

x=aにおける接線の

$$\left.\begin{array}{l}\displaystyle\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\\[2ex]\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}\end{array}\right\} = f'(a)$$

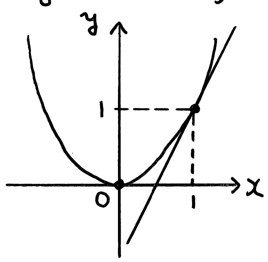
x=aにおける「微分係数」

まとめ

$$f'(a) = \left\{\begin{array}{l}\displaystyle\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\\[2ex]\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}\end{array}\right.$$

x=aにおける微分係数

例　$y=x^2\ (=f(x))$ について、



$x=1$ における微分係数 $f'(1)$ は

接線の傾き

$$f'(1) = \lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x-1} = \lim_{x\to 1}\frac{(x+1)(x-1)}{x-1} = 2$$

$$f'(1) = \lim_{h\to 0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{(1+h)^2-1^2}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{1+2h+h^2-1}{h} = \lim_{h\to 0}(2+h) = 2$$

問（応用）

次のものを a、$f(a)$、$f'(a)$を用いて表せ。

(1) $\displaystyle\lim_{x\to a}\frac{af(x)-xf(a)}{x-a}$

(2) $\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{f(a+4h)-f(a-3h)}{h}$

解) (1)は $\displaystyle\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=f'(a)$ を使う！

(1) $\displaystyle\lim_{x\to a}\frac{af(x)-xf(a)}{x-a}$

$$=\lim_{x\to a}\frac{af(x)-af(a)-xf(a)+af(a)}{x-a}$$

$$=\lim_{x\to a}\frac{a\{f(x)-f(a)\}-(x-a)f(a)}{x-a}$$

$$=\lim_{x\to a}\left\{a\times\frac{f(x)-f(a)}{x-a}-f(a)\right\}=af'(a)-f(a)_{\,/\!/}$$

(2)は $\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=f'(a)$ を使う！

(2) $\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{f(a+4h)-f(a-3h)}{h}$

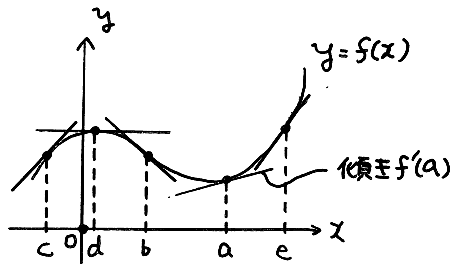
$$=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+4h)-f(a)-\{f(a-3h)-f(a)\}}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\left\{\frac{f(a+4h)-f(a)}{4h}\times 4+\frac{f(a-3h)-f(a)}{-3h}\times 3\right\}$$

$$=7f'(a)_{\,/\!/}$$

(iii) 導関数

$$\underbrace{f'(a)}_{\substack{x=a\text{における}\\\text{微分係数}\\(\text{接線の傾き})}} = \begin{cases} \displaystyle\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a} \\ \displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h} \end{cases}$$



x = x における
接線の傾きは?

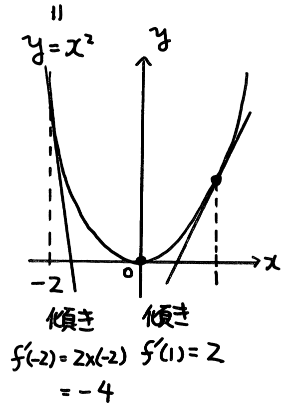
まとめ

$$f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$ ← 導関数 $f'(x)$ を求めることを「微分する」という!

<u>導関数</u>
$x=x$ における接線の傾き

例 $f(x)=x^2$ について、

$$f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$
$$= \lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^2-x^2}{h}$$
$$= \lim_{h\to 0}\frac{x^2+2hx+h^2-x^2}{h}$$
$$= 2x$$



他にも、

$f(x)=x^3$ について、

$$f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$
$$= \lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^3-x^3}{h}$$
$$= \lim_{h\to 0}\frac{x^3+3x^2h+3xh^2+h^3-x^3}{h}$$

$$= 3x^2$$

$f(x)=x^n$ (nは4以上の整数)について、

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^n-x^n}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{x^n+{}_nC_1x^{n-1}h+{}_nC_2x^{n-2}h^2+\cdots+{}_nC_{n-1}xh^{n-1}+h^n-x^n}{h}$$

$$={}_nC_1x^{n-1}$$

$$=nx^{n-1}$$

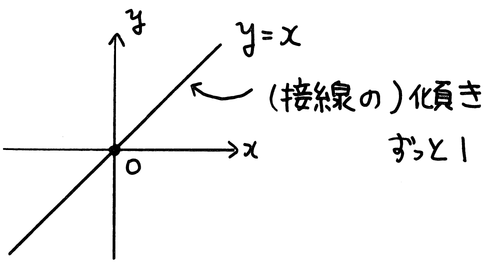
まとめ

$f(x)=x^n$ (n:0以上の整数)について、

$f'(x)=nx^{n-1}$

$n=1$のとき、

$f(x)=x^1=x$



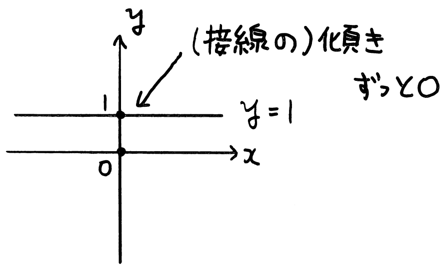
$f(x)=x^1$について、

$f'(x)=1\cdot x^{1-1}$

$=1$

$n=0$のとき、

$f(x)=x^0=1$



$f(x)=x^0$について、

$f'(x)=0\cdot x^{0-1}$

$=0$

例 $f(x)=x^7$について、

$f'(x)=7x^6$

問 $f(x) = x^3 + 4x^2 - 2x + 1$ について、

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{(x+h)^3 + 4(x+h)^2 - 2(x+h) + 1 - (x^3 + 4x^2 - 2x + 1)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{(x+h)^3 - x^3}{h} + 4 \times \lim_{h \to 0} \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} - 2 \times \lim_{h \to 0} \frac{(x+h) - x}{h}$$

$$= 3x^2 + 8x - 2$$ //

(応用) 合成関数の微分

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

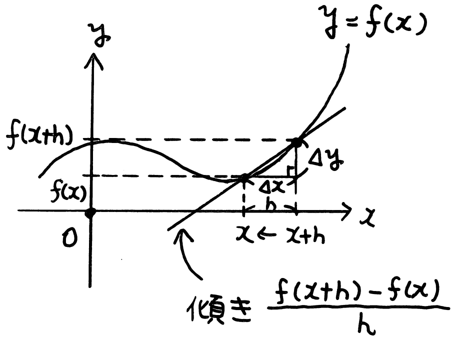
$\parallel$

y

$\parallel$

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

yをxで微分



$$\boxed{\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \times \frac{dt}{dx}}$$

例) $y = (\underbrace{3x-1}_{t})^{47}$ について、　$y = t^{47}$、$t = 3x-1$

$$y' = \frac{dy}{dx}$$

$$= \frac{dy}{dt} \times \frac{dt}{dx}$$

yをtで微分　　tをxで微分

$$= 47t^{46} \times 3$$

$$= 47(3x-1)^{46} \times 3$$

$$= 141(3x-1)^{46} \,/\!/$$

問) $y = (\underbrace{x^2+2x-3}_{t})^4$ について、$\frac{dy}{dx}$ を求めよ。

$y = t^4$、$t = x^2+2x-3$

解)

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \times \frac{dt}{dx}$$

$$= 4t^3 \times (2x+2)$$

$$= 4(x^2+2x-3)^3 \times (2x+2)$$

$$= 8(x^2+2x-3)^3(x+1) \,/\!/$$

(2) 極値・グラフ

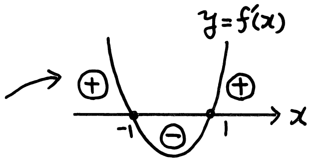
3次関数のグラフを書く!

例 $y = x^3 - 3x$ について。

$f(x) = x^3 - 3x$ とおくと、

$\boxed{\text{導関数}}$ $f'(x) = 3x^2 - 3$

$x = x$ における接線の傾き $= 3(x+1)(x-1)$

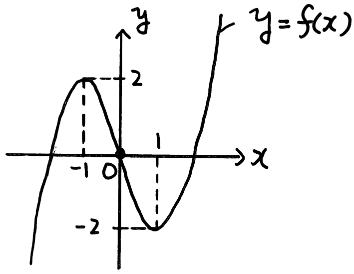


$f'(x) = 0$ のとき、$x = \pm 1$

増減表

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	2	↘	-2	↗
		極大		極小	

$f'(x)$ が ⊕から⊖へ　|　$f'(x)$ が ⊖から⊕へ



$$\begin{cases} \text{極大値 } 2 \ (x = -1) \\ \text{極小値 } -2 \ (x = 1) \end{cases}$$ $\boxed{\text{極値}}$

問 $y=f(x)$ のグラフをかけ。

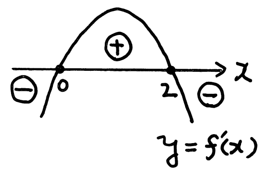
(1) $f(x)=-x^3+3x^2+4$

$f'(x)=-3x^2+6x$

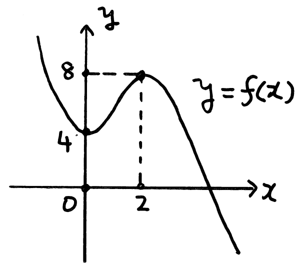
$=-3x(x-2)$

$f'(x)=0$ のとき、$x=0,2$

x	$\cdots$	0	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\searrow$	4	$\nearrow$	8	$\searrow$



$\begin{cases} 極大値 8 \ (x=2) \\ 極小値 4 \ (x=0) \end{cases}$

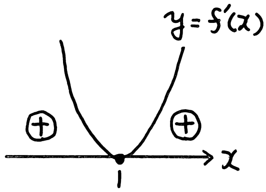


(2) $f(x)=x^3-3x^2+3x+1$

$f'(x)=3x^2-6x+3$

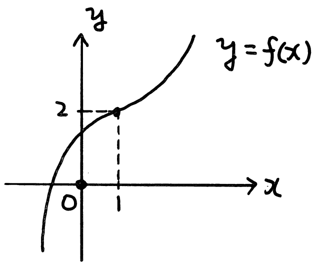
$=3(x-1)^2$

$f'(x)=0$ のとき $x=1$



x	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	2	$\nearrow$

極値なし



$\boxed{単調増加}$

$x_1<x_2$ ならば

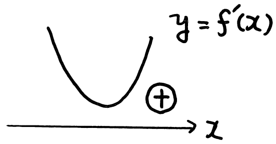
$f(x_1)<f(x_2)$

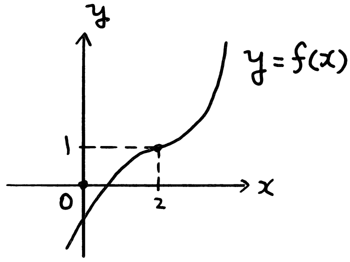
(3) $f(x)=x^3-6x^2+13x-1$

$$f'(x)=3x^2-12x+13$$

$$=3(x-2)^2+1>0$$

x	$\cdots$
$f'(x)$	$+$
$f(x)$	$\nearrow$





極値なし

$\boxed{\text{単調増加}}$

$x_1<x_2$ ならば、

$f(x_1)<f(x_2)$

まとめ　3次関数 $f(x)$ が極値をもつ条件は

2次方程式 $f'(x)=0$ の判別式を D とすると、

$D>0$ となることである。

($D\leqq 0$ のとき極値をもたない)

(2) 極値・グラフ（応用）

$\boxed{\text{3次関数が極値をもつ条件}}$

2次方程式 $f'(x)=0$ の判別式 $D>0$

例1　3次関数 $f(x)=x^3-3ax^2+3x-2$ が極値をもつような実定数 a の値の範囲を求めよ。

解）$f'(x)=3x^2-6ax+3$

$\qquad = 3(x^2-2ax+1)$

$f'(x)=0$、つまり $x^2-2ax+1=0$ の判別式を D とすると、

$\frac{D}{4}=(-a)^2-1\times 1$

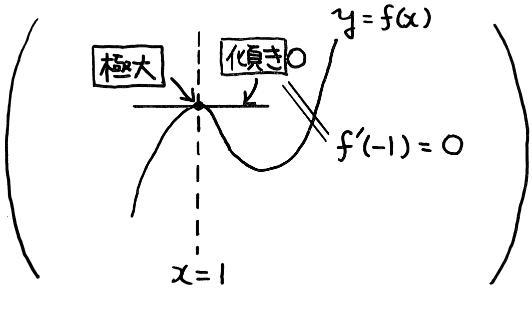
$\quad = a^2-1$

$\quad = (a+1)(a-1)>0$　　$\therefore$ $a<-1$、$1<a$ //

$$\boxed{\begin{array}{l} a x^2+\underset{\overset{\|}{2b'}}{b}x+c=0 \quad (a\neq 0) \\ D=b^2-4ac \\ (D/4=b'^2-ac) \end{array}}$$

例2　関数 $f(x)=x^3-ax^2-3ax+4a^2$（a は定数）が $x=-1$ において極大値をとるとき、a の値と極小値を求めよ。

（イメージ）



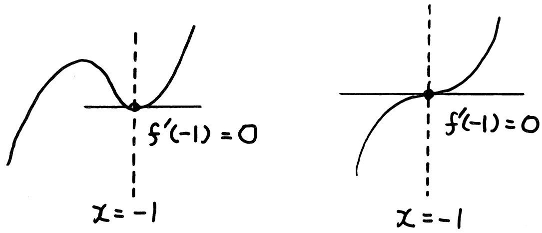
解) $f(x) = x^3 - ax^2 - 3ax + 4a^2$ について、

$f'(x) = 3x^2 - 2ax - 3a$

題意より、$f'(-1) = 0$ が必要で、

$f'(-1) = 3 + 2a - 3a = 0 \quad \therefore a = 3$

$\boxed{\text{だめパターン}}$



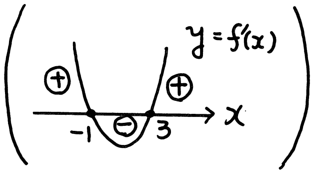
逆にこのとき、$f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 36$ なので、

$f'(x) = 3x^2 - 6x - 9$

$\quad = 3(x+1)(x-3)$

$f'(x) = 0$ のとき、$x = -1, 3$

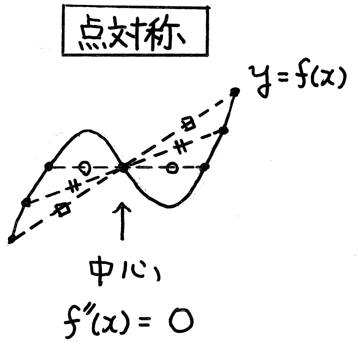
x	…	-1	…	3	…
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	極大	↘	極小	↗

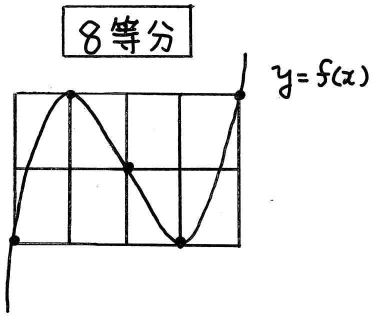


題意を十分みたすので、$a = 3$

よって極小値は $f(3) = 9$

（おまけ） 3次関数のグラフの性質





(3) 最大最小 〈3次関数〉

例1 関数 $f(x)=(x+1)^2(x-2)\ (-1 \leqq x \leqq 4)$ について、最大値・最小値とそのときの x の値を求めよ。

解) $f(x)=(x+1)^2(x-2)$

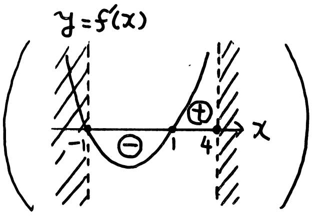
$=(x^2+2x+1)(x-2)$

$=x^2-3x-2$ について。

$f'(x)=3x^2-3$

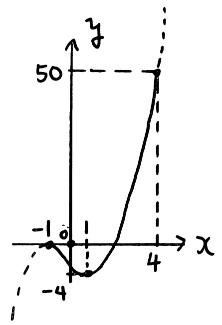
$=3(x+1)(x-1)$

$f'(x)=0$ のとき、$x=\pm 1$



x	-1	$\cdots$	1	$\cdots$	4
$f'(x)$	0	$-$	0	$+$	$+$
$f(x)$	0	↘	-4	↗	50

$$\begin{cases} \text{最大値}\ 50\ (x=4) \\ \text{最小値}\ -4\ (x=1) \end{cases}$$



例2 関数 $f(x)=x^3-3ax+a\ (0 \leqq x \leqq 1)$

の最大値 $M(a)$ を求めよ。

解) $f(x)=x^3-3ax+a$ について。

$$f'(x)=3x^2-3a$$
$$=3(x^2-a)$$
$$=3(x+\sqrt{a})(x-\sqrt{a})$$ X

(i) $a \leqq 0$ のとき、

$$f'(x)=3(x^2-a) \geqq 0$$

よって $f(x)$ は単調増加。

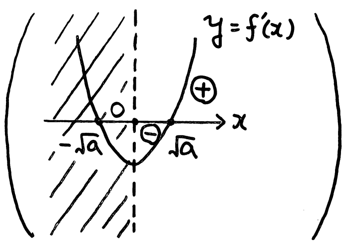
最大値 $M(a)=f(1)=1-2a$

(ii) $a>0$ のとき、

$$f'(x)=3(x+\sqrt{a})(x-\sqrt{a})$$

$f'(x)=0$ のとき、$x=(-\sqrt{a}、)\ a$

x	0	(イ) … | …	$\sqrt{a}$	(ア) … | …
$f'(x)$		$-$	0	$+$
$f(x)$		↘		↗



(ア) $0<\sqrt{a}<1 \Longleftrightarrow 0<a<1$ のとき、

$f(0)=a$、$f(1)=1-2a$ で

$$(1-2a)-a=1-3a$$

$$M(a)=\begin{cases} 1-2a & (0<a<\frac{1}{3}) \\ a & (\frac{1}{3} \leqq a<1) \end{cases}$$

(イ) $1 \leqq \sqrt{a} \iff a \geqq 1$ のとき、

$f(x)$ は単調減少。

$M(a) = f(0) = a$

(i)、(ii)より、

$$M(a) = \begin{cases} 1-2a & \left(a < \frac{1}{3}\right) \\ a & \left(a \geqq \frac{1}{3}\right) \end{cases}$$ //

(4) 方程式・不等式への応用

(i) 方程式への応用

3次方程式の実数解の個数を調べる。

「定数分離」と「極値の積」

〈定数分離〉

定数を分離する。

(例1) 方程式 $x^3-6x^2+9x+k=0$ の異なる実数解の個数が実数kによってどのように変わるかを調べよ。

解) $x^3-6x^2+9x+k=0$

$\iff x^3-6x^2+9x=-k$

$\iff -x^3+6x^2-9x=k$ …①

$f(x)=-x^3+6x^2-9x$ とおくと、

①は $y=f(x)$ と $y=x$ を代入したもの。

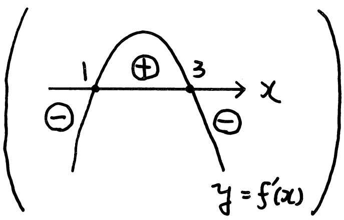
よってこれらの異なる共有点の個数を調べればよい。

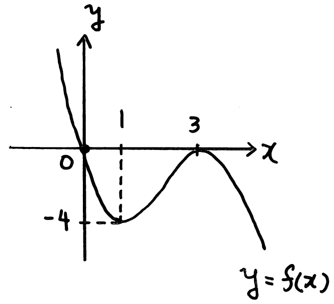
$f'(x)=-3x^2+12x-9$

$\quad=-3(x-1)(x-3)$

$f'(x)=0$ のとき、$x=1, 3$

x	…	1	…	3	…
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	↘	-4	↗	0	↘





$$\begin{cases} -4 < k < 0 & \text{のとき 3コ} \\ k = -4,\ 0 & \text{のとき 2コ} \\ k < -4,\ 0 < k & \text{のとき 1コ} \end{cases}$$ //

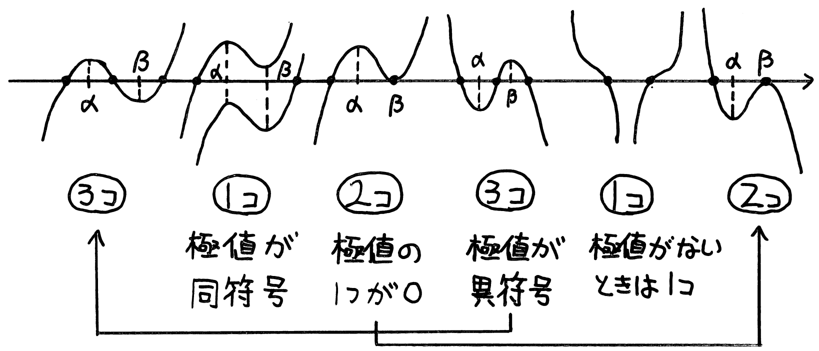
〈極値の積〉

例2 $a > 0$ とし、$x^3 - 3ax^2 + 4a = 0$ の異なる実数解の個数を a の値によって場合分けして調べよ。

解) $x^3 - 3ax^2 + 4a = 0$

準備

3次方程式 $f(x) = 0$ の異なる実数解の個数について。



まとめ 3次方程式 $f(x) = 0$ の異なる実数解の個数について。

2次方程式 $f'(x) = 0$ の判別式を D とし、

$D > 0$ のときの $f'(x) = 0$ の2つの解を α、β とすると、

$D \leqq 0$ ――――――――――――→ のとき 1コ

$$D > 0 \text{ かつ } \begin{cases} f(\alpha) \times f(\beta) > 0 & \text{のとき 1コ} \\ f(\alpha) \times f(\beta) = 0 & \text{のとき 2コ} \\ f(\alpha) \times f(\beta) < 0 & \text{のとき 3コ} \end{cases}$$

解) $x^3-3ax^2+4a=0$

$f(x)=x^3-3ax^2+4a$ とおくと、

$$f'(x)=3x^2-6ax$$
$$=3x(x-2a)$$

$f'(x)=0$ のとき、$x=0$、$2a$ ($a>0$ より、$0\neq 2a$)

$x=0$、$2a$ で極値をもち、

$$f(0)\times f(2a)=4a\times(-4a^3+4a)$$
$$=-16a^2(a^2-1)$$
$$=-16a^2(a+1)(a-1)$$

$$\left(\begin{array}{l} -(a-1)>0 \iff (0<)a<1 \text{ で1コ。} \\ -(a-1)=0 \iff a=1 \text{ で2コ。} \\ -(a-1)<0 \iff a>1 \text{ で3コ。} \end{array}\right.$$

まとめ直すと、

$$\begin{cases} 0<a<1 & \text{のとき 1コ} \\ a=1 & \text{のとき 2コ} \\ a>1 & \text{のとき 3コ} \end{cases}$$ //

(ii) 不等式への応用

最大最小の考え方で。

例1 $x>0$ のとき、不等式 $x^3-12x+a>0$ が常に成り立つように、定数 a の値の範囲を定めよ。

解) $x>0$ でつねに

$x^3-12x+a>0$

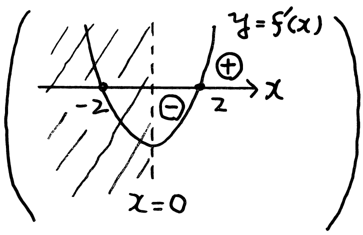
$f(x)=x^3-12x+a$ とおくと、

$f'(x)=3x^2-12$

$=3(x+2)(x-2)$

$f'(x)=0$ のとき、$x=(-2,)\ 2$

x	0	…	2	…
$f'(x)$	/	−	0	+
$f(x)$	/	↘	極小かつ最小	↗



$f(2)=8-24+a>0$ より、

$a>16$〃

例2 不等式 $x^3-2 \geqq 3k(x^2-2)$ が $x \geqq 0$ であるすべての x に対して成り立つような k の値の範囲を求めよ。

解) $f(x) = x^3-2-3k(x^2-2)$

$= x^3-3kx^2+6k-2$ とおくと、

$f'(x) = 3x^2-6kx$

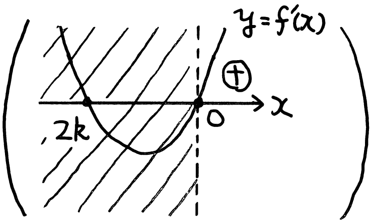
$= 3x(x-2k)$

$f'(x) = 0$ のとき、$x = 0, 2k$

(i) $k \leqq 0$ のとき、

$x \geqq 0$ では $f'(x) \geqq 0$

より $f(x)$ は単調増加。

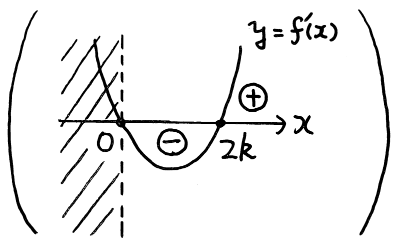


$\therefore f(0) = 6k-2 \geqq 0$

よって、$k \geqq \frac{1}{3}$ 不適。

(ii) $k > 0$ のとき、

x	0	$\cdots$	$2k$	$\cdots$
$f'(x)$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$		↘	最小	↗



$\therefore f(2k) \geqq 0$ より、

$8k^3-12k^3+6k-2 \geqq 0$

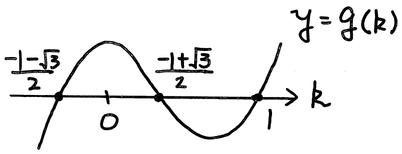
$$\Longleftrightarrow -4k^3+6k-2 \geqq 0$$

$$\Longleftrightarrow 2k^3-3k+1 \leqq 0$$

$$\left(\begin{array}{r|rrrr} 1 & 2 & 0 & -3 & 1 \\ \hline & & & & \\ & & & & \end{array}\right)$$

組立除法

$$g(k) = (k-1)(2k^2+2k-1) \leqq 0$$

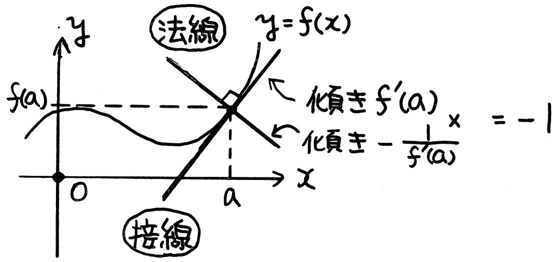


$$\frac{-1+\sqrt{3}}{2} \leqq k \leqq 1$$

(i)、(ii)より、$\dfrac{-1+\sqrt{3}}{2} \leqq k \leqq 1$ //

(5) 接線

(i) 基本



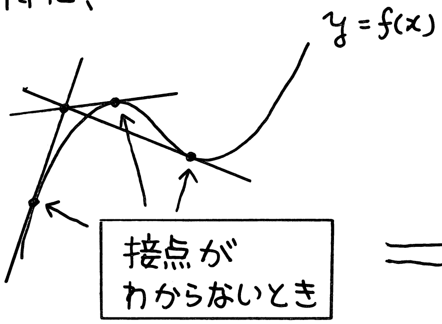
まとめ

曲線 $y=f(x)$ 上の点 $(a, f(a))$ における接線の方程式は、

$$\boxed{y = \underline{f'(a)}(x-a)+f(a)}$$

法線の場合 $-\frac{1}{f'(a)}$

特に、

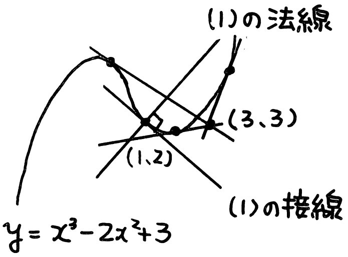


⟹「接点設定」

例 (1) 曲線 $y=x^3-2x^2+3$ 上の点 $(1,2)$ における接線および法線の方程式を求めよ。

(2) (1)の曲線の接線で、点 $(3,3)$ を通るものの方程式を求めよ。

解)



(1) $f(x)=x^3-2x^2+3$ とおくと、

$f'(x)=3x^2-4x$

$(1,2)$ における接線は

$y=f'(1)(x-1)+2$ (左下へ)

$=-(x-1)+2$

$=-x+3$

$(1,2)$ における法線は、

$y=1\times(x-1)+2$

$=x+1$

(2) 接点を $(t, f(t))$ とすると、

接線の方程式は

$y=f'(t)(x-t)+f(t)$

$=(3t^2-4t)(x-t)+t^3-2t^2+3$

$=(3t^2-4t)x-2t^3+2t^2+3$ …①

①が(3、3)を通るので、

$$3 = 3(3t^2 - 4t) - 2t^3 + 2t^2 + 3$$

$$\Leftrightarrow 2t^3 - 11t^2 + 12t = 0$$

$$\Leftrightarrow t(2t-3)(t-4) = 0$$

$$\therefore t = 0、\frac{3}{2}、4$$

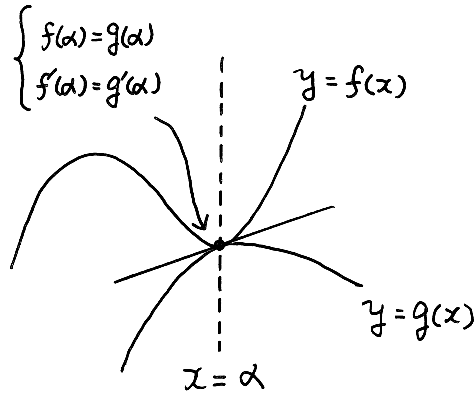
①に代入して、

$$\begin{cases} t=0 \text{ のとき } y = 3 /\!/ \\ t=\frac{3}{2} \text{ のとき } y = \frac{3}{4}x + \frac{3}{4} /\!/ \\ t=4 \text{ のとき } y = 32x - 93 /\!/ \end{cases}$$

(ii) 応用〈2つ〉

〈その1〉 2曲線が接する

2曲線 $\begin{cases} y=f(x) \\ y=g(x) \end{cases}$ が



ある点で接するとき
共通の接線をもつ

接点の x 座標を α とすると、

$$\begin{cases} f(\alpha)=g(\alpha) \\ \quad\text{かつ} \\ f'(\alpha)=g'(\alpha) \end{cases}$$

が成り立つ。

例1 2曲線 $y=x^3-2x+1$、$y=x^2+2ax+1$ が1点を共有し、かつ、この共有点において接線を共有するとき、a の値を求めよ。

解) $\begin{cases} f(x)=x^3-2x+1 \\ g(x)=x^2+2ax+1 \end{cases}$ とおく。 $f'(x)=3x^2-2$
$g'(x)=2x+2a$

共有点の x 座標を α とすると、

$f(\alpha)=g(\alpha)$ …① かつ $f'(\alpha)=g'(\alpha)$ …②

①より、$\alpha^3-2\alpha+1=\alpha^2+2a\alpha+1$

$\Longleftrightarrow \alpha(\alpha^2-\alpha-2-2a)=0$ … ①′

②より、$3\alpha^2-2=2\alpha+2a$

$\Longleftrightarrow 2a=3\alpha^2-2\alpha-2$ … ②′

②′を①′に代入

$\alpha(\alpha^2-\alpha-2-3\alpha^2+2\alpha+2)=0$

$\Longleftrightarrow \alpha^2(-2\alpha+1)=0$

$\therefore \alpha=0、\frac{1}{2}$

$\alpha=0$のとき、②′より、

$2a=-2 \qquad \therefore a=-1$

$\alpha=\frac{1}{2}$のとき、②′より、

$2a=\frac{3}{4}-1-2$

$\quad=-\frac{9}{4}$

$\therefore a=-\frac{9}{8}$

よって、$a=-1、-\frac{9}{8}$ //

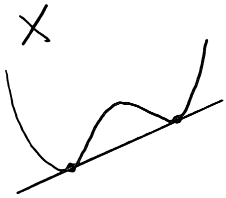
〈その2〉接線の本数

例2 曲線 C：$y = x^3 + 3x^2 + x$ と点 $A(1, a)$ がある。
A を通って、C に3本の接線がひけるとき、
a の値の範囲を求めよ。

解）$f(x) = x^3 + 3x^2 + x$ とおくと、

$f'(x) = 3x^2 + 6x + 1$

接点 $(t, f(t))$ とおくと、接線の方程式は



$$y = f'(t)(x - t) + f(t)$$
$$= (3t^2 + 6t + 1)(x - t) + t^3 + 3t^2 + t$$
$$= (3t^2 + 6t + 1)x - 2t^3 - 3t^2 \cdots ①$$

① が $A(1, a)$ を通るので、

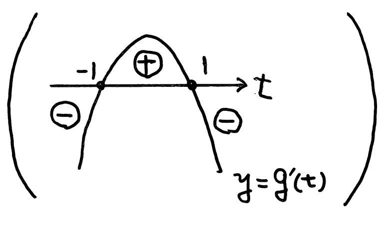
$$a = 3t^2 + 6t + 1 - 2t^3 - 3t^2$$
$$= -2t^3 + 6t + 1$$

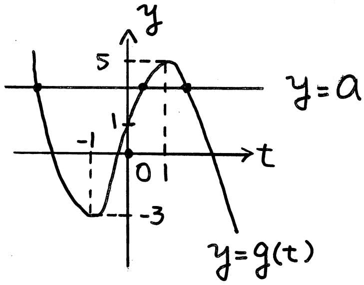
$g(t) = -2t^3 + 6t + 1$ とおくと、

$$g'(t) = -6t^2 + 6$$
$$= -6(t + 1)(t - 1)$$

$g'(t) = 0$ のとき、$t = \pm 1$

t	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$
$g'(t)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$g(t)$	↘	-3	↗	5	↘





3本ひけるような

aの範囲は $-3 < a < 5$ //

2. 積分

(1) 計算

〈不定積分〉

微分の逆演算

例

$(x^4)' = 4x^3$

$(x^4+7)' = 4x^3$

$(x^4-381)' = 4x^3$

$4x^3$ の不定積分
（原始関数）

$\int 4x^3 dx = x^4 + C$

$f(x)$ の不定積分の1つを $F(x)$ とすると、

$$\int f(x)\,dx = F(x) + \underline{C}$$

積分定数

$\int 3x^2 dx = x^3 + C$

$\int x^4 dx = \frac{1}{5}x^5 + C$

n を0以上の整数として

$(x^{n+1})' = (n+1)x^n$

$\therefore \left(\frac{1}{n+1}x^{n+1}\right)' = x^n$

> n を0以上の整数として
> $$\int x^n dx = \frac{1}{n+1}x^{n+1} + C$$

また、

$$\int kf(x)\,dx = k\int f(x)\,dx$$

複号同順

$$\int \{f(x) \pm g(x)\}\,dx = \int f(x)\,dx \pm \int g(x)\,dx$$

例 $\int (x^2+3x)\,dx = \frac{1}{3}x^3 + 3\times\frac{1}{2}x^2 + C$

$= \frac{1}{3}x^2 + \frac{3}{2}x^2 + C$

問1 次の不定積分を求めよ。（Cは積分定数）

(1) $\int (-x^3+5x+7)\,dx$

(2) $\int (2t-1)(3t-1)\,dt$

(3) $\int (4x+3)^7\,dx$

解) (1) $\int (-x^3+5x+7)\,dx$

$= -\frac{1}{4}x^4 + 5\times\frac{1}{2}x^2 + 7x^1 + C$

$= -\frac{1}{4}x^4 + \frac{5}{2}x^2 + 7x + C$ //

(2) $\int (2t-1)(3t-1)\,dt$

$= \int (6t^2-5t+1)\,dt$

$= 6\times\frac{1}{3}t^3 - 5\times\frac{1}{2}t^2 + t + C$

$= 2t^3 - \frac{5}{2}t^2 + t + C$ //

(3) $\int (4x+3)^7\,dx$

$= \frac{1}{4\times 8}(4x+3)^8 + C$

$= \frac{1}{32}(4x+3)^8 + C$ //

(復習)

n：0以上の整数

$y = (ax+b)^{n+1}$ について

$y = t^{n+1}$、$t = ax+b$

$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}\times\frac{dt}{dx}$

$= (n+1)t^n \times a$

$= a(n+1)(ax+b)^n$

$$\boxed{\int (ax+b)^n dx = \frac{1}{a(n+1)}(ax+b)^{n+1} + C}$$

問2 曲線 $y=f(x)$ 上の任意の点 (x, y) における接線の傾きが $6x^2+2x+3$ であるとし、かつ、この曲線が $(-2, 3)$ を通るとすれば、

$f(x)=\square x^3+\square x^2+\square x+\square$ である。

解) $f'(x)=6x^2+2x+3$

$$f(x)=\int(6x^2+2x+3)dx$$
$$=2x^3+x^2+3x+C$$

$f(-2)=3$ により、

$f(-2)=-16+4-6+C=3$

$C=21$

$f(x)=2x^3+x^2+3x+21$ //

〈定積分〉

(i) 基本

$f(x)$ の不定積分の1つを $F(x)$ とするとき、

$$\int_a^b f(x)\,dx = \Big[F(x)\Big]_a^b$$
$$= F(b) - F(a)$$

例1 $\displaystyle\int_1^2 (3x^2+2x-4)\,dx = \Big[x^3+x^2-4x+C\Big]_1^2$

$$= (8+4-8+C)-(1+1-4+C)$$
$$= 4-(-2)$$
$$= 6$$

例2 次の定積分の値を求めよ。

(1) $\displaystyle\int_{-1}^2 (x^3-6x^2+2x+4)\,dx$

(2) $\displaystyle\int_{-2}^1 (t+2)(t^2+1)\,dt$

- - - - - - - - - - - -

解) (1) $\displaystyle\int_{-1}^2 (x^3-6x^2+2x+4)\,dx$

$$= \Big[\frac{1}{4}x^4-2x^3+x^2+4x\Big]_{-1}^2$$
$$= (4-16+4+8)-\left(\frac{1}{4}+2+1-4\right)$$
$$= \frac{3}{4}$$

$$= \frac{1}{4}\{2^4-(-1)^4\}-2\{2^3-(-1)^3\}+\{2^2-(-1)^2\}+4\{2-(-1)\}$$
$$= \frac{15}{4}-18+3+12$$
$$= \frac{3}{4}$$

(2) $\int_{-2}^{1}(t+1)(t^2+1)dt$

$= \int_{-2}^{1}(t^3+2t^2+t+2)dt$

$= \left[\frac{1}{4}t^4+\frac{2}{3}t^3+\frac{1}{2}t^2+2t\right]_{-2}^{1}$

$= \frac{1}{4}\{1^4-(-2)^4\}+\frac{2}{3}\{1^3-(-2)^3\}+\frac{1}{2}\{1^2-(-2)^2\}+$

$2\{1-(-2)\}$

$= -\frac{15}{4}+\frac{2}{3}\times 9-\frac{3}{2}+6$

$= \frac{-15+24-6+24}{4}$

$= \frac{27}{4}$ //

[定積分の性質]〈3〉

① $\int_a^a f(x)\,dx = 0$

② $\int_b^a f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx$

③ $\int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx$

例3 $\int_{-3}^{2} (x^3+1)\,dx - \int_{-3}^{0} (x^3+1)\,dx$

$= -\int_{-3}^{0} (x^3+1)\,dx + \int_{-3}^{2} (x^3+1)\,dx$

$= \int_{0}^{-3} (x^3+1)\,dx + \int_{-3}^{2} (x^3+1)\,dx$

$= \int_{0}^{2} (x^3+1)\,dx$

$= \left[\frac{1}{4}x^4 + x\right]_0^2$

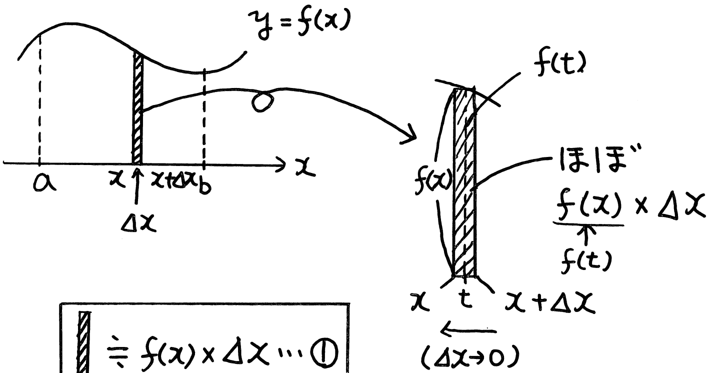
$= \frac{1}{4}\times 16 + 2$

$= 6$ //

(ii) 応用 〈4つ〉

[面積を表す?]

まずは、



$$\boxed{\ \fallingdotseq f(x) \times \Delta x \cdots ①}$$

一方、$F'(x) = f(x)$ とすると、

$$\frac{dF(x)}{dx} = f(x)$$

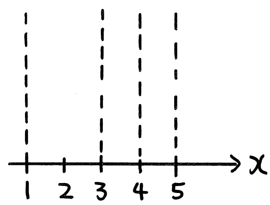
$$\therefore \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta F(x)}{\Delta x} = f(x)$$

$\dfrac{\Delta F(x)}{\Delta x} \fallingdotseq f(x)$　よって、$\boxed{\Delta F(x) \fallingdotseq f(x) \times \Delta x \cdots ②}$

①、②より、 $\fallingdotseq \Delta F(x)$

$$S = \boxed{\sum_{a \leqq x \leqq b}}$$

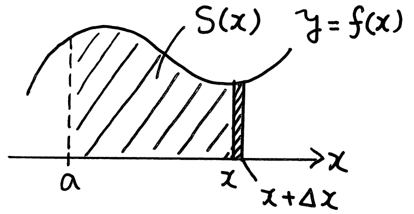
aからbまで
右のものを足す



$$\fallingdotseq \sum_{a \leqq x \leqq b} \Delta F(x)$$

$$= F(b) - F(a) = \int_a^b f(x)\,dx$$

次に、



$$\fallingdotseq S(x+\Delta x) - S(x) \fallingdotseq f(x) \times \Delta x$$

$$\frac{S(x+\Delta x) - S(x)}{\Delta x} \fallingdotseq f(x)$$

$$\lim_{h \to 0} \frac{S(x+h) - S(x)}{h} = f(x)$$

$S(x)$は$f(x)$の不定積分。

$S(x)$を、$f(x)$の任意の不定積分$F(x)$を用いて表すと、

$S(x) = F(x) + C$　（C：定数）

$x = a$を代入すると、

$S(a) = F(a) + C$　　$\therefore\ C = -F(a)$

よって、
$$\begin{aligned} S &= S(b) \\ &= F(b) + C \\ &= F(b) - F(a) \\ &= \int_a^b f(x)\,dx \end{aligned}$$

［絶対値つき］

㊀例 次の定積分を求めよ。

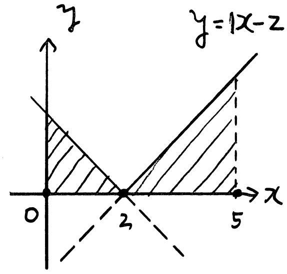
(1) $\int_0^5 |x-2|\,dx$

(2) $\int_0^2 |x^2+x-2|\,dx$

(3) $a \geqq 0$ のとき、$f(a) = \int_0^1 |x(x-a)|\,dx$

$$|A| = \begin{cases} A & (A \geqq 0) \\ -A & (A < 0) \end{cases}$$

解）(1) $\int_0^5 |x-2|\,dx$



$= \int_0^2 |x-2|\,dx + \int_2^5 |x-2|\,dx$

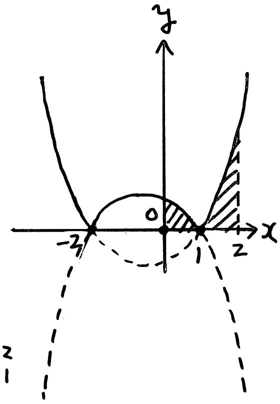
$= -\int_0^2 (x-2)\,dx + \int_2^5 (x-2)\,dx$

$= \int_2^0 (x-2)\,dx + \int_2^5 (x-2)\,dx$

$= \left[\frac{1}{2}x^2 - 2x\right]_2^0 + \left[\frac{1}{2}x^2 - 2x\right]_2^5$

$= 0 + \left(\frac{25}{2} - 10\right) - 2(2-4) = \frac{13}{2}$ //

(2) $\int_0^2 |x^2+x-2|\,dx$



$= \int_0^1 |x^2+x-2|\,dx + \int_1^2 |x^2+x-2|\,dx$

$= -\int_0^1 (x^2+x-2)\,dx + \int_1^2 (x^2+x-2)\,dx$

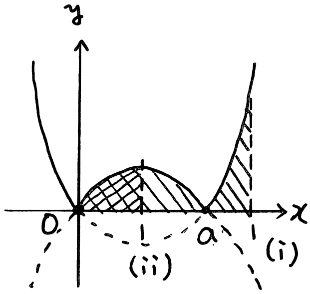
$= \int_1^0 (x^2+x-2)\,dx + \int_1^2 (x^2+x-2)\,dx$

$= \left[\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 2x\right]_1^0 + \left[\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 2x\right]_1^2$

$= 0 + \left(\frac{8}{3} + 2 - 4\right) - 2\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{2} - 2\right)$

$= \frac{2}{3} + \frac{7}{3} = 3$ //

(3) $a \geqq 0$ のとき、$f(a) = \int_0^1 |x(x-a)|\,dx$



(i) $0 \leqq a \leqq 1$ のとき、

$$\begin{aligned} f(a) &= -\int_0^a x(x-a)\,dx + \int_a^1 x(x-a)\,dx \\ &= \int_a^0 (x^2 - ax)\,dx + \int_a^1 (x^2 - ax)\,dx \\ &= \left[\frac{1}{3}x^3 - \frac{a}{2}x^2\right]_a^0 + \left[\frac{1}{3}x^3 - \frac{a}{2}x^2\right]_a^1 \\ &= 0 + \left(\frac{1}{3} - \frac{a}{2}\right) - 2\left(\frac{1}{3}a^3 - \frac{1}{2}a^3\right) \\ &= \frac{1}{3}a^3 - \frac{1}{2}a + \frac{1}{3} \end{aligned}$$

(ii) $a \geqq 1$ のとき、

$$\begin{aligned} f(a) &= -\int_0^1 x(x-a)\,dx \\ &= \left[\frac{1}{3}x^3 - \frac{a}{2}x^2\right]_1^0 \\ &= 0 - \left(\frac{1}{3} - \frac{a}{2}\right) \\ &= \frac{1}{2}a - \frac{1}{3} \end{aligned}$$

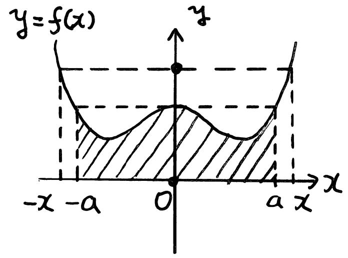
(i)、(ii)より、

$$f(a) = \begin{cases} \frac{1}{3}a^3 - \frac{1}{2}a + \frac{1}{3} & (0 \leqq a < 1) \\ \frac{1}{2}a - \frac{1}{3} & (a \geqq 1) \end{cases}$$ //

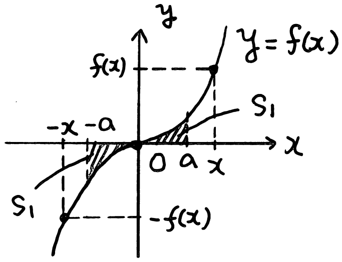
[偶関数と奇関数]

$f(-x)=f(x)$ $\quad$ $f(-x)=-f(x)$

$y=f(x)$のグラフは「y軸対称」



$y=f(x)$のグラフは「原点対称」



$a>0$として

$\int_{-a}^{a}f(x)\,dx$を

求める。

$$\int_{-a}^{a}f(x)\,dx$$

$$=2\int_{0}^{a}f(x)\,dx$$

$$\int_{-a}^{a}f(x)\,dx$$

$$=\int_{-a}^{0}f(x)\,dx+\int_{0}^{a}f(x)\,dx$$

$$=0$$

$f(x)$が

$$\begin{cases} \text{偶関数}:\int_{-a}^{a}f(x)\,dx=2\int_{0}^{a}f(x)\,dx \\ \text{奇関数}:\int_{-a}^{a}f(x)\,dx=0 \end{cases}$$

ここで、$f(x)=x^n$（n：0以上の整数）について、

例 $n=8$のとき、$f(x)=x^8$より、$f(-x)=(-x)^8$

$$=x^8=f(x)$$

$n=5$のとき、$f(x)=x^5$より、$f(-x)=(-x)^5$

$$=-x^5=-f(x)$$

$$\boxed{\int_{-a}^{a}x^n\,dx=\begin{cases} 2\int_{0}^{a}x^n\,dx & (n:\text{偶数}) \\ 0 & (n:\text{奇数}) \end{cases}}$$

(例) $\int_{-3}^{3}(7x^7+4x^5-31x^3+x^2-18x)\,dx$

$= 2\int_0^3 x^2\,dx$

$= 2\left[\frac{1}{3}x^3\right]_0^3$

$= 2\times 9$

$= 18$ //

［面積公式］

$$\begin{cases} \int_\alpha^\beta (x-\alpha)(x-\beta)\,dx = -\frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3 \\ \int_\alpha^\beta (x-\alpha)^2(x-\beta)\,dx = -\frac{1}{12}(\beta-\alpha)^4 \\ \int_\alpha^\beta (x-\alpha)(x-\beta)^2\,dx = \frac{1}{12}(\beta-\alpha)^4 \end{cases}$$

<u>証明</u>

（1つめ）$\int_\alpha^\beta (x-\alpha)(x-\beta)\,dx$

$$= \int_\alpha^\beta (x-\alpha)\{(x-\alpha)-(\beta-\alpha)\}\,dx$$

$$= \int_\alpha^\beta \{(x-\alpha)^2-(\beta-\alpha)(x-\alpha)\}\,dx$$

$$= \left[\frac{1}{3}(x-\alpha)^3 - \frac{\beta-\alpha}{2}(\beta-\alpha)^2\right]_\alpha^\beta$$

$$= \frac{1}{3}(\beta-\alpha)^3 - \frac{1}{2}(\beta-\alpha)^3$$

$$= -\frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3 \quad ■$$

（2つめ）$\int_\alpha^\beta (x-\alpha)^2(x-\beta)\,dx$

$$= \int_\alpha^\beta (x-\alpha)^2\{(x-\alpha)-(\beta-\alpha)\}\,dx$$

$$= \int_\alpha^\beta \{(x-\alpha)^3-(\beta-\alpha)(x-\alpha)^2\}\,dx$$

$$= \left[\frac{1}{4}(\beta-\alpha)^4 - \frac{\beta-\alpha}{3}(x-\alpha)^3\right]_\alpha^\beta$$

$$= \frac{1}{4}(\beta-\alpha)^4 - \frac{1}{3}(\beta-\alpha)^4$$

$$= -\frac{1}{12}(\beta-\alpha)^4 \quad ■$$

（3つめ）略。

㊓ 次の定積分の値を求めよ。

(1) $\int_{-\frac{1}{2}}^{3}(2x+1)(x-3)\,dx$

(2) $\int_{2-\sqrt{3}}^{2+\sqrt{3}}(x^2-4x+1)\,dx$

(3) $\int_{-2}^{1}(x+2)(x-1)^2\,dx$

解) (1) $\int_{-\frac{1}{2}}^{3}(2x+1)(x-3)\,dx$

$= 2\int_{-\frac{1}{2}}^{3}(x+\frac{1}{2})(x-3)\,dx$

$= 2\int_{-\frac{1}{2}}^{3}\{x-(-\frac{1}{2})\}(x-3)\,dx$

$= 2\times\left[-\frac{1}{6}\{3-(-\frac{1}{2})\}^3\right]$

$= -\frac{1}{3}\times(\frac{7}{2})^3$

$= -\frac{343}{24}$ //

(2) $\int_{2-\sqrt{3}}^{2+\sqrt{3}}(x^2-4x+1)\,dx$

$= \int_{2-\sqrt{3}}^{2+\sqrt{3}}\{x-(2-\sqrt{3})\}\{x-(2+\sqrt{3})\}\,dx$

$= -\frac{1}{6}\{(2+\sqrt{3})-(2-\sqrt{3})\}^3$

$= -\frac{1}{6}\times(2\sqrt{3})^3$

$= -\frac{1}{6}\times 8\times 3\sqrt{3}$

$= -4\sqrt{3}$ //

(3) $\int_{-2}^{1} (x+2)(x-1)^2 dx$

$= \int_{-2}^{1} \{x-(-2)\}(x-1)^2 dx$

$= \frac{1}{12}\{1-(-2)\}^4$

$= \frac{1}{12} \times 81$

$= \frac{27}{4}$ //

(2) 定積分で表された関数

関数決定 2タイプ

(タイプ1) 区間が定数のみ $\Rightarrow \int_a^b f(t)\,dt = A$ (定数) とおく。

(タイプ2) 区間に変数含む $\Rightarrow$ $\begin{cases} \circ\ \text{初期条件} \\ \circ\ \boxed{\dfrac{d}{dx}\displaystyle\int_a^x f(t)\,dt = f(x)} \end{cases}$ を利用

xで微分　微積分学の基本定理

証明

$F'(x) = f(x)$ とすると、

$$\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)\,dt = \frac{d}{dx}\Big[F(t)\Big]_{t=a}^{t=x}$$

$$= \frac{d}{dx}\{F(x) - F(a)\} = f(x) \quad \blacksquare$$

例 (1) $f(x) = 2x^2 + x\int_0^3 f(t)\,dt - 5$ をみたす $f(x)$ を求めよ。

(2) $\int_a^x f(t)\,dt = x^2 - 2x - 3$ をみたす $f(x)$ と a を求めよ。$(a>0)$

解) (1) (タイプ1)

$f(x) = 2x^2 + x\int_0^3 f(t)\,dt - 5$ について、

$A = \int_0^3 f(t)\,dt$ とおくと、

$f(x) = 2x^2 + Ax - 5$

このとき、$A = \int_0^3 (2t^2 + At - 5)\,dt$

$$= \left[\frac{2}{3}t^3 + \frac{A}{2}t^2 - 5t\right]_0^3$$

$$= 18 + \frac{9}{2}A - 15$$

$\therefore -\frac{7}{2}A = 3$　よって、$A = -\frac{6}{7}$

したがって、$f(x) = 2x^2 - \frac{6}{7}x - 5$ //

(2)(タイプ2)

$$\int_a^x f(t)dt = x^2 - 2x - 3 \cdots ①$$

①に $x=a$ を代入。

$$\int_a^a f(t)dt = a^2 - 2a - 3$$

$\Longleftrightarrow 0 = (a+1)(a-3)$

ただし、$a>0$ より、$a=3$ //

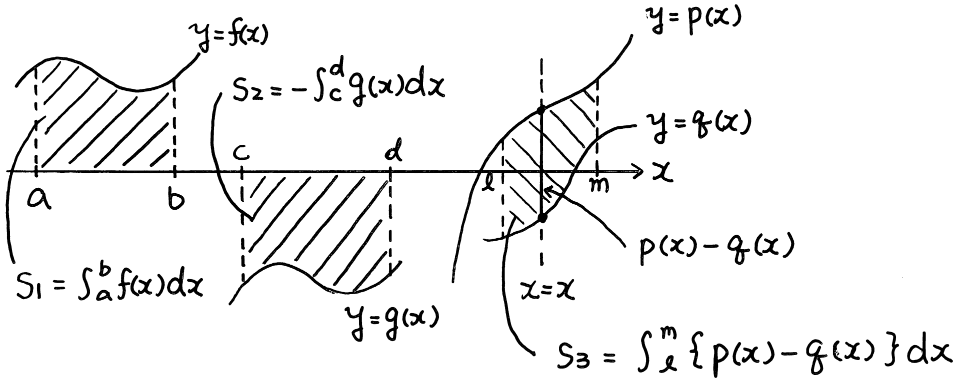
①の両辺を x で微分

$$\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)dt = 2x - 2$$

$\therefore f(x) = 2x - 2$ //

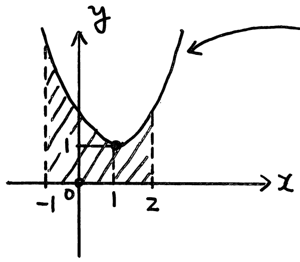
(3) 面積

まずは基本



例1 次の曲線、直線とx軸とで囲まれる部分の面積Sを求めよ。

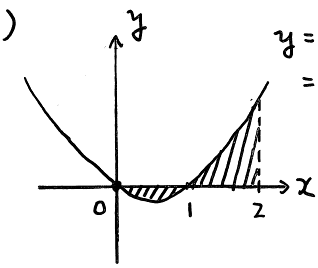
解) (1)



$y=x^2-2x+1$
$=(x-1)^2+1$

$$S=\int_{-1}^{2}(x^2-2x+2)dx$$
$$=\left[\frac{1}{3}x^3-x^2+2x\right]_{-1}^{2}$$
$$=\frac{1}{3}\{2^3-(-1)^3\}-\{2^2-(-1)^2\}+2\{2-(-1)\}$$
$$=3-3+6$$
$$=6$$ //

(2)



$y=x^2-x$
$=x(x-1)$

$$S=-\int_0^1(x^2-x)dx+\int_1^2(x^2-x)dx$$
$$=\left[\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2\right]_1^0+\left[\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^3\right]_1^2$$
$$=0+\left(\frac{8}{3}-2\right)-2\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{2}\right)$$
$$=\frac{2}{3}+\frac{1}{3}$$
$$=1$$ //

例2 次の部分の面積Sを求めよ。

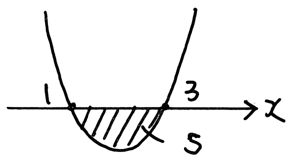
(1) 曲線 $y=x^2-4x+3$ と x 軸とで囲まれた部分。

(2) 曲線 $y=2x^2-5x-3$ と直線 $y=x-3$ とで囲まれた部分。

(3) 2つの放物線 $y=2x^2-5x$ と $y=-x^2+x+12$ とで囲まれた部分。

解) (1) $y=x^2-4x+3$

$=(x-1)(x-3)$



$S=-\int_1^3(x-1)(x-3)dx$

$=-\left\{-\frac{1}{6}(3-1)^3\right\}$

$=-\frac{1}{6}\times 2^3$

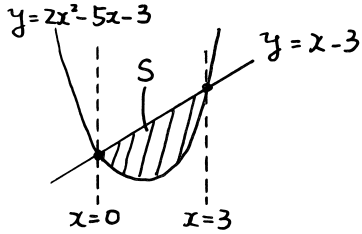
$=\frac{4}{3}$ //

(2) 代入 $2x^2-5x-3=x-3$

$\Longleftrightarrow 2x^2-6x=0$

$\Longleftrightarrow 2x(x-3)=0$

$x=0,3$



$S=\int_0^3\{x-3-(2x^2-5x-3)\}dx$

$=\int_0^3\{-2x(x-3)\}dx$

$=-2\int_0^3(x-0)(x-3)dx$

$=(-2)\left\{-\frac{1}{6}(3-0)^2\right\}$

$=\frac{1}{3}\times 3^3$

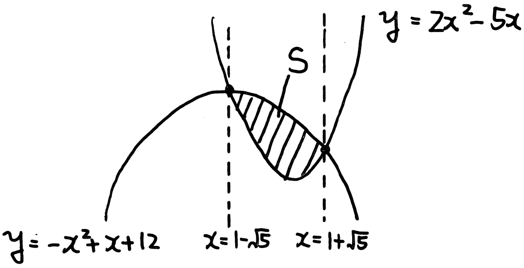
$=9$ //

(3) 代入 $2x^2-5x=-x^2+x+12$

$\Longleftrightarrow 3x^2-6x-12=0$

$\Longleftrightarrow x^2-2x-4=0$

$x=1\pm\sqrt{5}$



$$S=\int_{1-\sqrt{5}}^{1+\sqrt{5}}\{-x^2+x+12-(2x^3-5x)\}\,dx$$

$$=-\int_{1-\sqrt{5}}^{1+\sqrt{5}}(3x^2-6x-12)\,dx$$

$$=-3\int_{1-\sqrt{5}}^{1+\sqrt{5}}(x^2-2x-4)\,dx$$

$$=-3\int_{1-\sqrt{5}}^{1+\sqrt{5}}\{x-(1-\sqrt{5})\}\{x-(1+\sqrt{5})\}\,dx$$

$$=-3\left[-\frac{1}{6}\{1+\sqrt{5}-(1-\sqrt{5})\}^3\right]$$

$$=\frac{1}{2}\times(2\sqrt{5})^3$$

$$=20\sqrt{5}\ /\!/$$

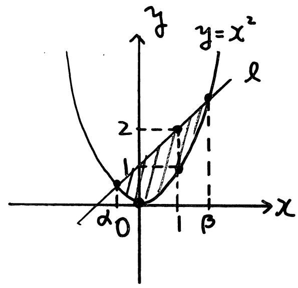
入試５頻出

(頻1) 面積の最大最小

例 点$(1, 2)$を通る直線lと放物線$y=x^2$とで囲まれた部分の面積の最小値を求めよ。

解) 直線lの方程式を

$y=m(x-1)+2$とおく。



$y=x^2$と代入

$x^2=m(x-1)+2$

$\Leftrightarrow x^2-mx+m-2=0 \cdots ①$

①の2つの解をα、βとおくと、$(\alpha<\beta)$

解と係数の関係より、

$$\begin{cases} \alpha+\beta=m \\ \alpha\beta=m-2 \end{cases} \cdots ②$$

面積を$S(m)$とおくと、

$$S(m)=\int_\alpha^\beta \{m(x-1)+2-x^2\}dx$$

$$=-\int_\alpha^\beta (x-\alpha)(x-\beta)dx$$

$$=\frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3$$

$$=\frac{1}{6}\{(\beta-\alpha)^2\}^{\frac{3}{2}}$$

$$=\frac{1}{6}\{(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta\}^{\frac{3}{2}}$$

$$=\frac{1}{6}\{m^2-4(m-2)\}^{\frac{3}{2}} \quad (②より)$$

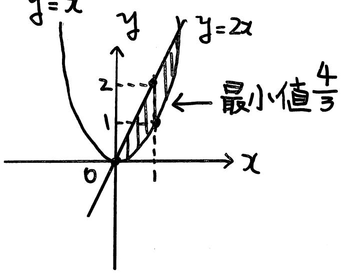
$$=\frac{1}{6}(m^2-4m+8)^{\frac{3}{2}}$$

$$= \frac{1}{6}\left\{(m-2)^2+4\right\}^{\frac{3}{2}}$$

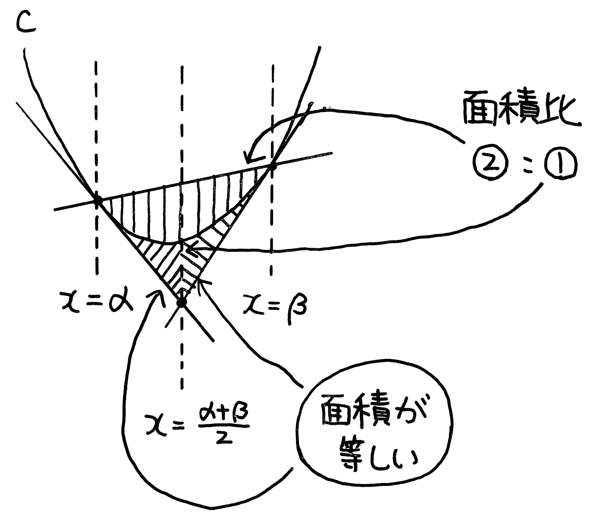
$m=2$ のとき、

最小値 $S(2) = \frac{1}{6} \times 4^{\frac{3}{2}}$

$$= \frac{4}{3}$$ //



（類2）外の点から2接線



例

（1） 点P(1、−3)から放物線 $y=x^2$ へひいた接線の方程式を求めよ。

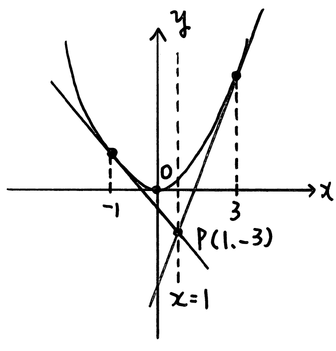
（2） この2つの接線と放物線とで囲まれる図形の面積を求めよ。

解） $f(x)=x^2$ とおくと、$f'(x)=2x$

（1） 接点を $(t, f(t))$ とおくと、接線の方程式は

$y=f'(t)(x-t)+f(t)$

$=2tx-t^2$ …①



①が P(1、−3) を通るので、

$-3=2t-t^2$

$\Longleftrightarrow t^2-2t-3=0$

$\Longleftrightarrow (t+1)(t-3)=0$

$\therefore t=-1, 3$

①により、

$$\begin{cases} t=-1 \text{ のとき、} y=-2x-1 \\ t=3 \text{ のとき、} y=6x-9 \end{cases}$$

(2) 求める面積をSとすると、

$$S=\int_{-1}^{1}\{x^2-(-2x-1)\}dx+\int_{1}^{3}\{x^2-(6x-9)\}dx$$

$$=\int_{-1}^{1}(x+1)^2dx+\int_{1}^{3}(x-3)^2dx$$

$$=\left[\frac{1}{3}(x+1)^3\right]_{-1}^{1}+\left[\frac{1}{3}(x-3)^3\right]_{1}^{3}$$

$$=\frac{1}{3}\times 2^3-0+0-\frac{1}{3}\times(-2)^3=\frac{16}{3}$$

(おまけ)

2接点 $(-1,1)$ と $(3,9)$ を通る直線の方程式は

$$y=\frac{9-1}{3-(-1)}(x-3)+9$$

$$=2(x-3)+9$$

$$=2x+3$$

これと放物線 $y=x^2$ とで囲む部分の面積を S_1 とすると

$$S_1=\int_{-1}^{3}(2x+3-x^2)dx$$

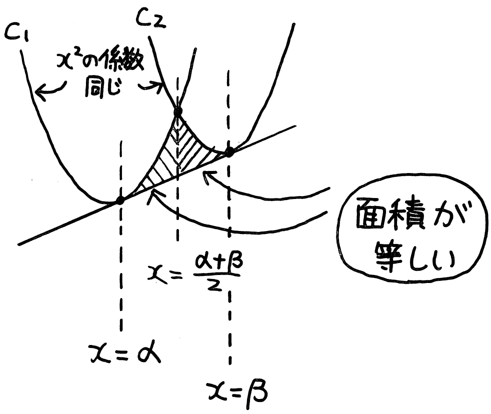
$$=-\int_{-1}^{3}(x^2-2x-3)dx$$

$$=-\int_{-1}^{3}(x+1)(x-3)dx$$

$$=-\left[-\frac{1}{6}\{3-(-1)\}^3\right]$$

$$=\frac{1}{6}\times 4^3=\frac{32}{3}$$

（頻3） 2次関数の共通接線



例 放物線 $y=x^2+2x$ と $y=x^2-4x+15$ の共通接線を l とする。

(1) l の方程式を求めよ

(2) l と2つの放物線とで囲まれる部分の面積を求めよ。

解) (1) (解1)

$f(x)=x^2+2x$ とおくと、

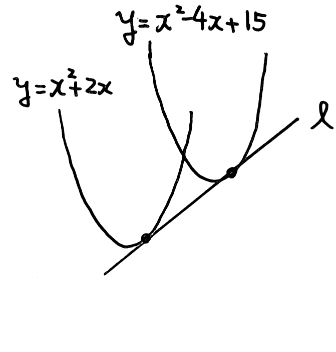
$f'(x)=2x+2$

$y=f(x)$ 上の $(t, f(t))$ における接線の方程式は

$y=f'(t)(x-t)+f(t)$

$=(2t+2)(x-t)+t^2+2t$

$=(2t+2)x-t^2$ …①



①と$y=x^2-4x+15$を代入

$x^2-4x+15=(2t+2)x-t^2$

$\Longleftrightarrow x^2-2(t+3)x+t^2+15=0$ …②

判別式をDとすると、

$\frac{D}{4}=(t+3)^2-(t^2+15)$

$=6t-6=0$

$\therefore t=1$

①に代入して、$y=4x-1$

(解2)

直線$y=mx+n$が両方の放物線に接するとする。

$y=x^2+2x$と代入

$x^2+2x=mx+n$

$\Longleftrightarrow x^2-(m-2)x-n=0$

判別式をD_1とすると、

$D_1=(m-2)^2+4n=0$ …Ⓐ

$y=x^2-4x+15$と代入

$x^2-4x+15=mx+n$

$\Longleftrightarrow x^2-(m+4)x-n+15=0$

判別式をD_2とすると、

$D_2=(m+4)^2-4(-n+15)$

$=(m+4)^2+4n-60=0$ …Ⓑ

Ⓑ − Ⓐ　$(m+4)^2-(m-2)^2-60=0$

$\Longleftrightarrow 12m-48=0$

$\Longleftrightarrow m=4$ 、Ⓐより $n=-1$

$y=4x-1$ //

(2) ②で $t=1$ として、

$x^2-8x+16=0$

$\Longleftrightarrow (x-4)^2=0$

$x=4$

また、$x^2+2x=x^2-4x+15$

のとき、$6x=15$

$x=\frac{5}{2}$

求める面積を S とすると、

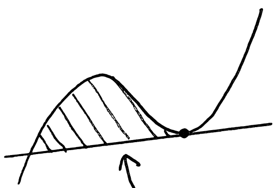
$$S=\int_1^{\frac{5}{2}}\{x^2+2x-(4x-1)\}dx+\int_{\frac{5}{2}}^4\{x^2-4x+15-(4x-1)\}dx$$

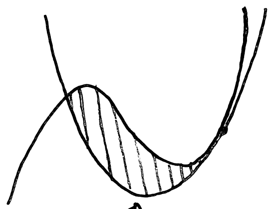
$$=\int_1^{\frac{5}{2}}(x-1)^2dx+\int_{\frac{5}{2}}^4(x-4)^2dx$$

$$=\left[\frac{1}{3}(x-1)^3\right]_1^{\frac{5}{2}}+\left[\frac{1}{3}(x-4)^3\right]_{\frac{5}{2}}^4$$

$$=\frac{1}{3}\times\left(\frac{3}{2}\right)^3-0+0-\frac{1}{3}\left(-\frac{3}{2}\right)^3=\frac{9}{4}$$ //

（類4）3次関数に接する





$$\boxed{\frac{1}{12}(\beta-\alpha)^4 \text{の公式利用}}$$

$$\begin{cases} \int_\alpha^\beta (x-\alpha)^2(x-\beta)\,dx = -\frac{1}{12}(\beta-\alpha)^4 \\ \int_\alpha^\beta (x-\alpha)(x-\beta)^2\,dx = \frac{1}{12}(\beta-\alpha)^4 \end{cases}$$

例　曲線C：$y=x^3$上の点A$(1,1)$における接線をlとする。Cとlとで囲まれる部分の面積Sを求めよ。

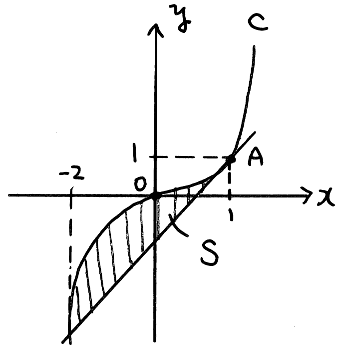
解）$f(x)=x^3$とおくと、$f'(x)=3x^2$

lの方程式は

$y=f'(1)(x-1)+f(1)$

$=3(x-1)+1$

$=3x-2$



Cとlの式を代入

$x^3=3x-2$

$\Longleftrightarrow x^3-3x+2=0$

$\Longleftrightarrow (x-1)^2(x+2)=0$

$x=1,\ -2$

B$(-2,-8)$とする。

$$S = \int_{-2}^{1} \{x^3 - (3x-2)\} dx$$

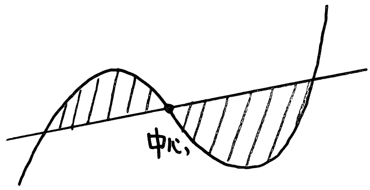
$$= \int_{-2}^{1} (x+2)(x-1)^2 dx$$

$$= \frac{1}{12}\{1-(-2)\}^4$$

$$= \frac{1}{12} \times 81$$

$$= \frac{27}{4}$$ //

(類5) 面積の等分



㊀ 曲線 $C : y=-x^3+5x^2$ と直線 $l : y=ax\ (a>0)$

が原点を含めて3点で交わるとする。

C と l で囲まれた2つの部分の面積が等しいとき、

a の値を求めよ。

解) C と l の式を代入

$-x^3+5x^2=ax$

$\Longleftrightarrow x(x^2-5x+a)=0$

$x^2-5x+a=0$ について、

判別式を D とすると、

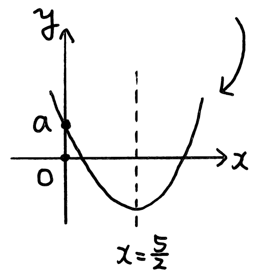
$D=(-5)^2-4a>0$

かつ $a>0$ により、

$0<a<\frac{25}{4}$ …①

$y=x^2-5x+a$

$=\left(x-\frac{5}{2}\right)^2-\frac{25}{4}+a$

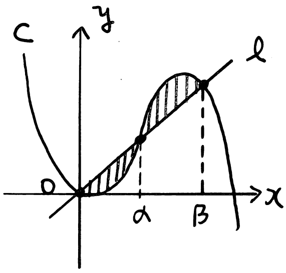


また、$y=x^2-5x+a$

$=\left(x-\frac{5}{2}\right)^2-\frac{25}{4}+a$

の軸 $x=\frac{5}{2}>0$ かつ y 切片 $a>0$ より、

$x^2-5x+a=0$ は異なる2つの正の解をもつ。



$x^2-5x+a=0$ の2つの正の解を α, β とする。$(\alpha<\beta)$

題意より、

$$\int_0^{a}\{ax-(-x^3+5x^2)\}dx$$

$$=\int_\alpha^\beta\{(-x^3+5x^2)-ax\}dx$$

$$\Longleftrightarrow \int_0^\alpha\{ax-(-x^3+5x^2)\}dx-\int_\alpha^\beta\{(-x^3+5x^2)-ax\}dx=0$$

$$\boxed{0<a<\frac{25}{4}\cdots①}$$

$$\Longleftrightarrow \int_0^\alpha\{ax-(-x^3+5x^2)\}dx+\int_\alpha^\beta\{ax-(-x^3+5x^2)\}dx=0$$

$$\Longleftrightarrow \int_0^\beta\{ax-(-x^3+5x^2)\}=0$$

$$\Longleftrightarrow \int_0^\beta(x^3-5x^2+ax)dx=0$$

$$\Longleftrightarrow \left[\frac{1}{4}x^4-\frac{5}{3}x^3+\frac{a}{2}x^2\right]_0^\beta=0$$

$$\Longleftrightarrow \frac{1}{4}\beta^4-\frac{5}{3}\beta^3+\frac{a}{2}\beta^2=0$$

$\beta>0$ なので、$\frac{1}{2}\beta^2-\frac{10}{3}\beta+a=0\cdots②$

また、β は $x^2-5x+a=0$ の解だから、

$\beta^2-5\beta+a=0\cdots③$

③ − ②

$$\begin{array}{rl} \beta^2 - 5\beta + a &= 0 \\ -)\ -\frac{1}{2}\beta^2 - \frac{10}{3}\beta + a &= 0 \\ \hline \frac{1}{2}\beta^2 - \frac{5}{3}\beta \qquad &= 0 \end{array}$$

$\beta > 0$ なので、$\frac{1}{2}\beta - \frac{5}{3} = 0$

$\therefore$、$\frac{1}{2}\beta = \frac{5}{3}$

$\beta = \frac{10}{3}$

③より、$a = 5\beta - \beta^2$

$= 5 \times \frac{10}{3} - \left(\frac{10}{3}\right)^2$

$= \frac{50}{9}$〃 （①をみたす）