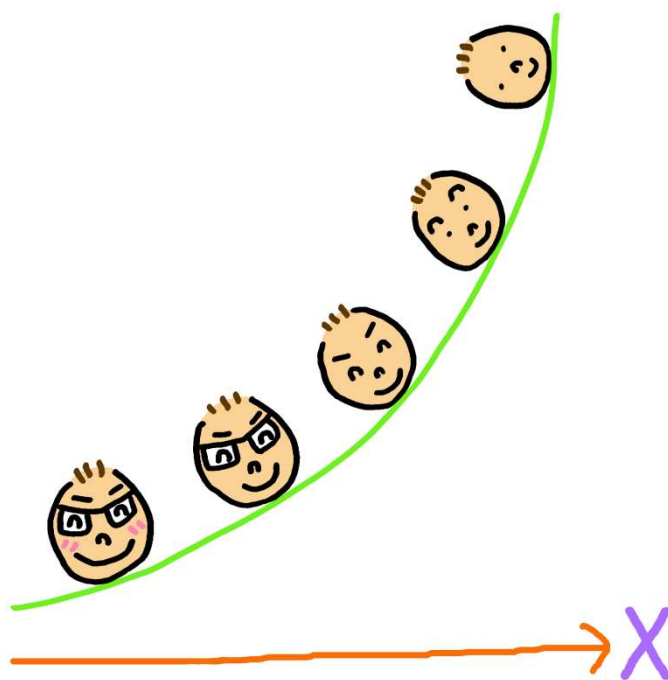


数学Ⅱ

1 2 指数対数関数



< 講義ノート >

指数・対数関数

1 指数・対数の「法則」と「性質」

2 指数・対数関数のグラフ

基本は上記2つでOK！！ 以下にも挑戦！！

3 最大最小問題（基本的なもの）

4 種々の応用問題

- (1) 対称式を利用した最大最小
- (2) 領域図示（対数不等式）
- (3) 大小比較

5 桁数問題

- (1) 桁数&小数首位の桁
- (2) 最高位の数

0. 指数対数の準備

① 例 $2^3 = 8 \Leftrightarrow \log_2 8 = 3$

② 問 $\log_3 81 = 4$ $\log_5 125 = 3$

$\log_7 343 = 3$ $\log_2 1024 = 10$

まとめ

$$a^r = M \Leftrightarrow \log_a M = r$$

a : 底 ($a > 0$ か $a \neq 1$)

M : 真数 ($M > 0$)

↖ 底条件

↖ 真数条件

1. 指数・対数の「法則」と「性質」

< 指数編 >

[指数法則] (3つ)

$$(i) a^m a^n = a^{m+n} \quad \textcircled{\text{例}} a^3 \times a^4 = (a \times a \times a) \times (a \times a \times a \times a) = a^7$$

$$(ii) (a^m)^n = a^{mn} \quad \textcircled{\text{例}} (a^4)^3 = a^4 \times a^4 \times a^4 = a^{12}$$

$$(iii) a^n b^n = (ab)^n \quad \textcircled{\text{例}} 2^4 \times 3^4 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 = 6^4$$

拡張

$$(i) \text{をもとに、} a^m \div a^n = a^{m-n} \dots \textcircled{1}$$

$$\textcircled{1} \text{で、} m=n \text{ とすると、} a^m \div a^n = a^{m-m}$$

$$\boxed{a^0 = 1}$$

$$\textcircled{1} \text{で、} m=0, n=1 \text{ とすると、} a^0 \div a^1 = a^{0-1}$$

$$\boxed{a^{-1} = \frac{1}{a}}$$

$$\sqrt[n]{a} \text{ について、} (\sqrt[n]{a})^n = a$$

$$\left(\begin{array}{l} \textcircled{\text{例}} \sqrt[4]{16} = 2 \\ \sqrt[3]{27} = 3 \\ \sqrt[5]{64} = 2 \\ \sqrt[3]{125} = 5 \end{array} \right)$$

$$\swarrow a^{xn} = 1$$

$$xn = 1$$

$$x = \frac{1}{n}$$

$$\boxed{a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}}$$

問 ① 次の式を簡単にせよ。

$$(1) 4^{\frac{3}{2}} \times 8^{\frac{1}{3}} \times 16^{-\frac{1}{2}}$$

$$(2) 4^{\frac{2}{3}} \div 24^{\frac{1}{3}} \times 18^{\frac{2}{3}}$$

$$(3) \sqrt{a \sqrt{a \sqrt{a}}}$$

$$(4) \sqrt{\sqrt{a}^4 \sqrt{\frac{a}{3a^2}}}$$

解) (1) $4^{\frac{3}{2}} \times 8^{\frac{1}{3}} \times 16^{-\frac{1}{2}}$

$$= (2^2)^{\frac{3}{2}} \times (2^3)^{\frac{1}{3}} \times (2^4)^{-\frac{1}{2}}$$

$$= 2^3 \times 2^1 \times 2^{-2}$$

$$= 2^{3+1-2}$$

$$= 2^2 = 4 //$$

$$(2) 4^{\frac{2}{3}} \div 24^{\frac{1}{3}} \times 18^{\frac{2}{3}}$$

$$= (2^2)^{\frac{2}{3}} \div (2^3 \times 3)^{\frac{1}{3}} \times (2 \times 3^2)^{\frac{2}{3}}$$

$$= 2^{\frac{4}{3}} \times \{(2^3 \times 3)^{\frac{1}{3}}\}^{-1} \times 2^{\frac{2}{3}} \times 3^{\frac{4}{3}}$$

$$= 2^{\frac{4}{3}} \times 2^{-1} \times 2^{\frac{2}{3}} \times 3^{-\frac{1}{3}} \times 3^{\frac{4}{3}}$$

$$= 2^{\frac{4}{3}-1+\frac{2}{3}} \times 3^{-\frac{1}{3}+\frac{4}{3}}$$

$$= 2^1 \times 3^1$$

$$= 6 //$$

$$(3) \sqrt{a \sqrt{a \sqrt{a}}}$$

$$= \{a \times (a^1 \times a^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{2}}\}^{\frac{1}{2}}$$

$$= \{a^1 \times (a^{\frac{3}{2}})^{\frac{1}{2}}\}^{\frac{1}{2}}$$

$$= (a^{1 + \frac{3}{2} \times \frac{1}{2}})^{\frac{1}{2}}$$

$$= (a^{\frac{7}{4}})^{\frac{1}{2}}$$

$$= a^{\frac{7}{8}} //$$

$$(4) \sqrt{\sqrt{a} \sqrt[4]{\frac{a}{\sqrt[3]{a^2}}}}$$

$$= \{a^{\frac{1}{2}} \times \{\frac{a^1}{(a^2)^{\frac{1}{3}}}\}^{\frac{1}{4}}\}^{\frac{1}{2}}$$

$$= \{a^{\frac{1}{2}} \times (a^{1 - \frac{2}{3}})^{\frac{1}{4}}\}^{\frac{1}{2}}$$

$$= (a^{\frac{1}{2} + \frac{1}{3} \times \frac{1}{4}})^{\frac{1}{2}}$$

$$= (a^{\frac{7}{12}})^{\frac{1}{2}} = a^{\frac{7}{24}} //$$

[指数の性質] (2つ)

$$\textcircled{1} \quad a^x + a^{-x} = t \text{ のとき, } \quad \textcircled{2} \quad x = \frac{1}{2} (a^{\frac{1}{n}} - a^{-\frac{1}{n}}) \quad (a > 0)$$

$$\begin{cases} a^{2x} + a^{-2x} = t^2 - 2 \\ a^{3x} + a^{-3x} = t^3 - 3t \end{cases} \quad \begin{matrix} \text{のとき,} \\ (x + \sqrt{1+x^2})^n = a \end{matrix}$$

証明

$$\begin{aligned} \textcircled{1} \quad a^{2x} + a^{-2x} &= (a^x)^2 + (a^{-x})^2 \\ &= (a^x + a^{-x})^2 - 2a^x a^{-x} \\ &= t^2 - 2 \\ a^{3x} + a^{-3x} &= (a^x)^3 + (a^{-x})^3 \\ &= (a^x + a^{-x})^3 - 3a^x a^{-x} (a^x + a^{-x}) \\ &= t^3 - 3t \end{aligned}$$

$$\textcircled{2} \quad x = \frac{1}{2} (a^{\frac{1}{n}} - a^{-\frac{1}{n}}) \quad (a > 0) \text{ について,}$$

$$\begin{aligned} (x + \sqrt{1+x^2})^n &= \left\{ \frac{1}{2} (a^{\frac{1}{n}} - a^{-\frac{1}{n}}) + \sqrt{1 + \left\{ \frac{1}{2} (a^{\frac{1}{n}} - a^{-\frac{1}{n}}) \right\}^2} \right\}^n \\ &= \left\{ \frac{1}{2} (a^{\frac{1}{n}} - a^{-\frac{1}{n}}) + \sqrt{1 + \frac{1}{4} (a^{\frac{2}{n}} - 2a^{\frac{1}{n}} a^{-\frac{1}{n}} + a^{-\frac{2}{n}})} \right\}^n \\ &= \left\{ \frac{1}{2} (a^{\frac{1}{n}} - a^{-\frac{1}{n}}) + \sqrt{\frac{1}{4} (4 + a^{\frac{2}{n}} - 2 + a^{-\frac{2}{n}})} \right\}^n \\ &= \left\{ \frac{1}{2} (a^{\frac{1}{n}} - a^{-\frac{1}{n}}) + \sqrt{\frac{1}{4} (a^{\frac{2}{n}} + 2 + a^{-\frac{2}{n}})} \right\}^n \\ &= \left\{ \frac{1}{2} (a^{\frac{1}{n}} - a^{-\frac{1}{n}}) + \sqrt{\left\{ \frac{1}{2} (a^{\frac{1}{n}} + a^{-\frac{1}{n}}) \right\}^2} \right\}^n \end{aligned}$$

$$= \left\{ \frac{1}{2}(a^{\frac{1}{n}} - a^{-\frac{1}{n}}) + \left| \frac{1}{2}(a^{\frac{1}{n}} + a^{-\frac{1}{n}}) \right| \right\}^n$$

$$= \left\{ \frac{1}{2}(a^{\frac{1}{n}} - a^{-\frac{1}{n}}) + \frac{1}{2}(a^{\frac{1}{n}} + a^{-\frac{1}{n}}) \right\}^n$$

$$= (a^{\frac{1}{n}})^n$$

$$= a$$

$$\sqrt{A^2} = |A|$$

「2乗のル-トは
絶対値!」

<対数編>

[対数の法則] (3つ)

$$(i) \begin{cases} \log_a M + \log_a N = \log_a MN \\ \log_a M - \log_a N = \log_a \frac{M}{N} \end{cases}$$

$$(ii) \log_a M^r = r \log_a M$$

$$(iii) \log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a} \leftarrow \text{底変換公式}$$

すべて真数条件
底条件をみたす。

証明

(i) $M = a^m$ 、 $N = a^n$ とおくと、 $m = \log_a M$ 、 $n = \log_a N$ である。

ここで、 $MN = a^{m+n}$ より、 $m+n = \log_a MN$

よって、 $\log_a MN = m+n$

$$= \log_a M + \log_a N \quad \square$$

また、 $\frac{M}{N} = a^{m-n}$ より、 $m-n = \log_a \frac{M}{N}$

よって、 $\log_a \frac{M}{N} = m-n$

$$= \log_a M - \log_a N \quad \square$$

(ii) $M = a^m$ とおくと、 $m = \log_a M$ で、

$$\log_a M^r = \log_a (a^m)^r$$

$$= \log_a a^{mr}$$

$$= mr$$

$$= r \log_a M \quad \square$$

(iii) $a = C^A$, $b = C^B$ とおくと, $A = \log_c a$, $B = \log_c b$ である.

$$\text{よって, } \log_a b = \log_{C^A} C^B$$

$$= \frac{B}{A} \quad ((C^A)^{\frac{B}{A}} = C^B \text{ より})$$

$$= \frac{\log_c b}{\log_c a} \quad \square$$

⑪ $\log_{10} 4 + \log_{10} 3 = \log_{10} 12$

$$\log_3 20 - \log_3 4 = \log_3 5$$

$$\log_2 81 = \log_2 3^4 = 4 \log_2 3$$

$$\log_3 7 = \frac{\log_{10} 7}{\log_{10} 3}$$

問 ⑥ 次の式を簡単にせよ。

$$(1) 2 \log_{10} \frac{5}{3} - \log_{10} \frac{5}{4} + 2 \log_{10} 3 + \frac{1}{2} \log_{10} 25$$

$$(2) \log_3 8 \times \log_4 3$$

$$(3) (\log_4 3 + \log_8 3)(\log_3 2 + \log_9 2)$$

解) (1) $2 \log_{10} \frac{5}{3} - \log_{10} \frac{5}{4} + 2 \log_{10} 3 + \frac{1}{2} \log_{10} 25$

$$= \log_{10} \left(\frac{5}{3}\right)^2 - \log_{10} \frac{5}{4} + \log_{10} 3^2 + \log_{10} 25^{\frac{1}{2}}$$

$$= \log_{10} \frac{\left(\frac{5}{3}\right)^2 \times 3^2 \times 25^{\frac{1}{2}}}{\frac{5}{4}}$$

$$= \log_{10} \left(\frac{25}{9} \times 9 \times 5 \times \frac{4}{5}\right)$$

$$= \log_{10} 100 = 2 //$$

$$(2) \log_3 8 \times \log_4 3 = \frac{\log_2 8}{\log_2 3} \times \frac{\log_2 3}{\log_2 4}$$

$$= \frac{3}{2} //$$

$$(3) (\log_4 3 + \log_8 3)(\log_3 2 + \log_9 2)$$

$$= \left(\frac{\log_2 3}{\log_2 4} + \frac{\log_2 3}{\log_2 8}\right) \left(\log_3 2 + \frac{\log_3 2}{\log_3 9}\right)$$

$$= \left(\frac{1}{2} \log_2 3 + \frac{1}{3} \log_2 3\right) \left(\log_3 2 + \frac{1}{2} \log_3 2\right)$$

$$= \frac{5}{6} \log_2 3 \times \frac{3}{2} \log_3 2$$

$$= \frac{5}{6} \times \frac{3}{2} \log_2 3 \times \log_3 2$$

$$= \frac{5}{4} \times \frac{\log_{10} 3}{\log_{10} 2} \times \frac{\log_{10} 2}{\log_{10} 3} = \frac{5}{4} //$$

[対数の性質] ②

$$\textcircled{1} \log_a b \times \log_b a = 1$$

$$\textcircled{2} a^{\log_a b} = b$$

証明

$$\begin{aligned} \textcircled{1} \log_a b \times \log_b a &= \log_a b \times \frac{\log_a a}{\log_a b} \\ &= 1 \quad \square \end{aligned}$$

$$\textcircled{2} \log_a a^{\log_a b} = \log_a b \times \log_a a$$

$$\therefore \log_a a^{\log_a b} = \log_a b$$

$$\text{よって、} a^{\log_a b} = b \quad \square$$

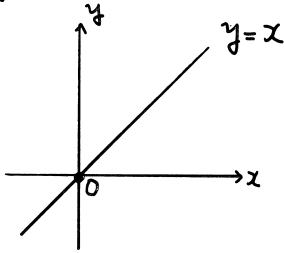
$$\textcircled{\text{例}} \quad \bullet \log_{10} 3 \times \log_3 10 = 1 //$$

$$\begin{aligned} \bullet 3^{\log_9 49} &= 3^{\frac{\log_3 49}{\log_3 9}} \\ &= 3^{\frac{1}{2} \log_3 49} \\ &= 49^{\frac{1}{2}} = \sqrt{49} = 7 // \end{aligned}$$

2. 指数・対数関数の グラフ

方程式・不等式

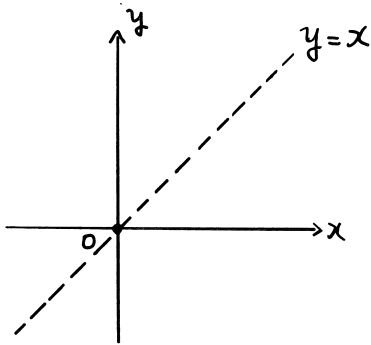
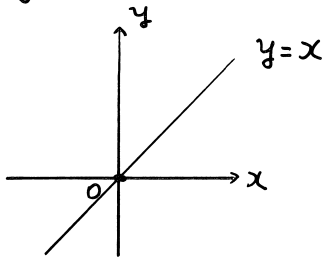
例1 $y = 2^x \xrightarrow{x \text{ と } y \text{ を入れかえ}} x = 2^y \Leftrightarrow y = \log_2 x$



逆関数なので、

「 $y = x$ に関して対称」

例2 $y = (\frac{1}{2})^x \longrightarrow x = (\frac{1}{2})^y \Leftrightarrow y = \log_{\frac{1}{2}} x$



$$y = a^x (a > 1)$$

$$y = a^x (0 < a < 1)$$

$$y = \log_a x (a > 1)$$

$$y = \log_a x (0 < a < 1)$$

まとめ

① $\begin{cases} y = a^x \text{ は 値域 } y > 0 \\ y = \log_a x \text{ は 定義域 } x > 0 \end{cases}$

② $\begin{cases} a > 1 \text{ なら 増加関数 (単調増加)} \\ 0 < a < 1 \text{ なら 減少関数} \end{cases}$

<指数方程式編>

⑪ 次の方程式を解け。

$$(1) 4 \times 2^{x^2} = 8^x$$

$$(2) 9^x - 3^{x+1} - 54 = 0$$

$$(3) 2^{3-\frac{x}{4}} + 31 \cdot 2^{-\frac{x}{8}} - 4 = 0$$

解) (1) $4 \cdot 2^{x^2} = 8^x$

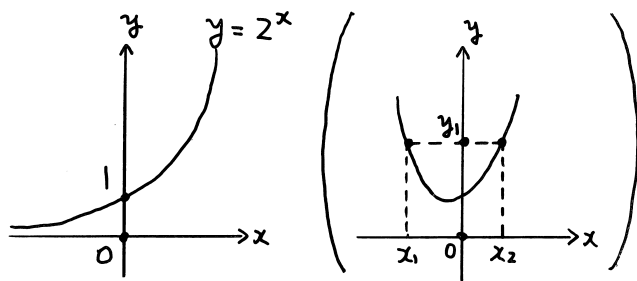
$$\Leftrightarrow 2^2 \cdot 2^{x^2} = 8^x$$

$$\Leftrightarrow 2^{2+x^2} = 2^{3x}$$

$$\Leftrightarrow 2+x^2 = 3x$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 3x + 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-1)(x-2) = 0 \quad \therefore x = 1, 2 //$$



$$(2) 9^x - 3^{x+1} - 54 = 0$$

$$\Leftrightarrow (3^2)^x - 3^x \times 3^1 - 54 = 0$$

$$\Leftrightarrow 3^{2x} - 3 \times 3^x - 54 = 0$$

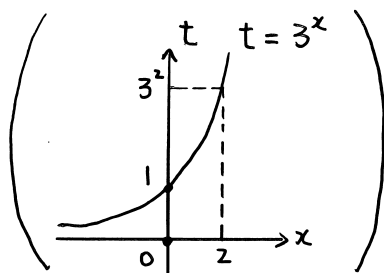
$$3^x = t \text{ とおく、}(t > 0)$$

$$t^2 - 3t - 54 = 0$$

$$\Leftrightarrow (t+6)(t-9) = 0$$

$$t > 0 \text{ なので、} t = 9$$

$$\therefore 3^x = 3^2 \quad x = 2 //$$



$$(3) 2^{3-\frac{x}{4}} + 31 \cdot 2^{-\frac{x}{8}} - 4 = 0$$

$$\Leftrightarrow 2^3 \times 2^{-\frac{x}{4}} + 31 \cdot 2^{-\frac{x}{8}} - 4 = 0$$

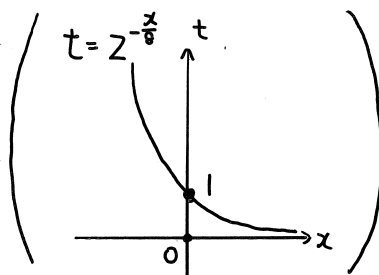
$$2^{-\frac{x}{8}} = t \text{ とおく、}(t > 0)$$

$$8t^2 + 31t - 4 = 0$$

$$\Leftrightarrow t > 0 \text{ なので、} t = \frac{1}{8}$$

$$\therefore 2^{-\frac{x}{8}} = 2^{-3}$$

$$-\frac{x}{8} = -3 \quad x = 24 //$$



<指数不等式編>

⑨ 次の不等式を解け。

$$(1) 9^x - 4 \times 3^{x+1} + 27 < 0$$

$$(2) 2^x + 2^{1-x} > 3$$

$$(3) a^{2x+1} - a^{x+2} - a^x + a < 0 \quad (a > 1)$$

解) (1) $9^x - 4 \times 3^{x+1} + 27 < 0$

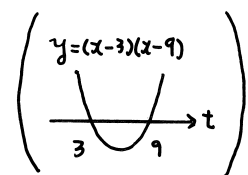
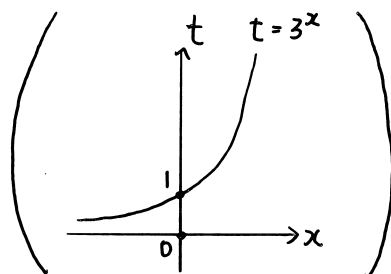
$$\Leftrightarrow 3^{2x} - 4 \times 3 \times 3^x + 27 < 0$$

$$\Leftrightarrow (3^x)^2 - 12 \times 3^x + 27 < 0$$

$$3^x = t \text{ とおくと, } (t > 0)$$

$$t^2 - 12t + 27 < 0$$

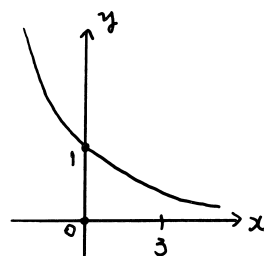
$$\Leftrightarrow (t-3)(t-9) < 0$$



$$\Leftrightarrow 3 < t < 9$$

$$\Leftrightarrow 3^1 < 3^x < 3^2 \quad \therefore 1 < x < 2$$

⑩ $(\frac{1}{2})^x < (\frac{1}{2})^3$



$$x > 3$$

$$(2) 2^x + 2^{1-x} > 3$$

$$\Leftrightarrow 2^x + 2^1 \cdot 2^{-x} > 3$$

$$\Leftrightarrow 2^x + \frac{2}{2^x} > 3$$

$$\Leftrightarrow (2^x)^2 + 2 > 3 \cdot 2^x$$

$$2^x = t \text{ とおくと, } (t > 0)$$

$$t^2 + 2 > 3t$$

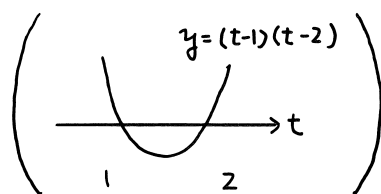
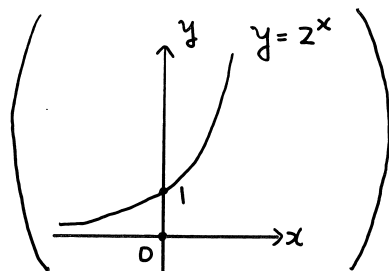
$$\Leftrightarrow t^2 - 3t + 2 > 0$$

$$\Leftrightarrow (t-1)(t-2) > 0$$

$$\Leftrightarrow t < 1, 2 < t$$

$$2^x < 2^0, 2^1 < 2^x$$

$$\therefore x < 0, 1 < x //$$



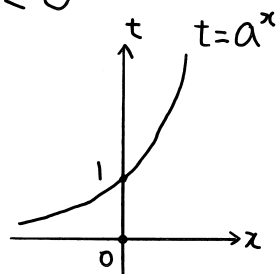
$$(3) a^{2x+1} - a^{x+2} - a^x + a < 0$$

$$\Leftrightarrow (a^x)^2 \times a - a^x \times a^2 - a^x + a < 0$$

$$\Leftrightarrow a \times (a^x)^2 - (a^2+1)a^x + a < 0$$

$$a^x = t \text{ とおくと,}$$

$$at^2 - (a^2+1)t + a < 0$$



$$\Leftrightarrow (t-a)(at-1) < 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{a} < t < a$$

$$\Leftrightarrow a^{-1} < a^x < a^1$$

$$a > 1 \text{ なのだから } -1 < x < 1 //$$

<対数方程式編>

⑨ 次の方程式を解け。

$$(1) \log_2(x-1) + \log_2(x+3) = \log_2 5$$

$$(2) (\log_2 x)^2 - \log_2 x^2 - 8 = 0$$

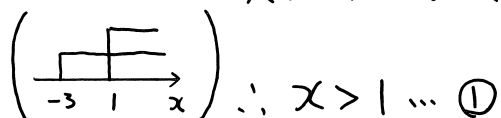
$$(3) \log_2 x^2 - \log_x 2 - 1 = 0$$

対数問題では、

- (① まず「真数条件」「底条件」
② 対数は対数で勝負!

解) (1) $\log_2(x-1) + \log_2(x+3) = \log_2 5$

真数条件より、 $x-1 > 0$ かつ $x+3 > 0$



①のもとで、

$$\log_2(x-1)(x+3) = \log_2 5$$

$$\Leftrightarrow (x-1)(x+3) = 5$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 2x - 3 = 5$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 2x - 8 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x+4)(x-2) = 0$$

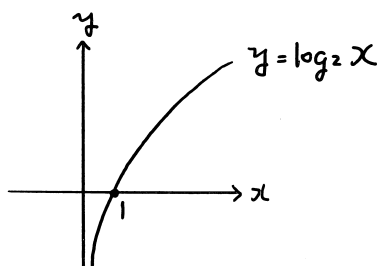
①のもとでは

$$x = 2,,$$

$$\log_a M \text{ について、}$$

$$M > 0$$

$$a > 0 \text{ かつ } a \neq 1$$



$$(2) (\log_2 x)^2 - \log_2 x^2 - 8 = 0$$

真数条件により、 $x > 0$ 、かつ $x^2 > 0$

$$\therefore x > 0 \dots \textcircled{1}$$

①のもとで、

$(\log_2 x)^2 - 2 \log_2 x - 8 = 0$
 $\log_2 x = t$ とおくと、(t はすべての実数)
 $t^2 - 2t - 8 = 0$

$\log_2 x = t$ とおくと、(t はすべての実数)

$$t^2 - 2t - 8 = 0$$

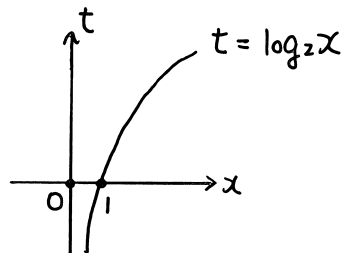
$$\Leftrightarrow (t+2)(t-4) = 0$$

$$\Leftrightarrow t = -2, 4$$

$$\therefore \log_2 X = \log_2 2^{-2} \cdot \log_2 2^4$$

$$x = 2^{-2} \cdot 2^4$$

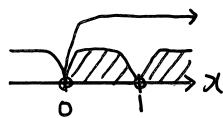
$$= \frac{1}{4} \cdot 16, \quad (\textcircled{1} \text{ をみたす})$$



$$(3) \log_2 x^2 - \log_x 2 - 1 = 0$$

真数条件、底条件により、

$$x^2 > 0, \quad \text{「} x > 0 \text{ かつ } x \neq 1 \text{」}$$



$$\therefore 0 < x < 1, 1 < x, \dots \textcircled{1}$$

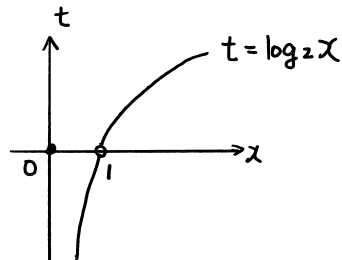
①のとき、

$$2 \log_2 x - \frac{1}{\log_2 x} - 1 = 0$$

$$\log_2 x = t \text{ とおくと, } (t \neq 0)$$

$$2t - \frac{1}{t} - 1 = 0$$

$$2t^2 - t - 1 = 0$$



$$\Leftrightarrow (2t+1)(t-1) = 0$$

$$\Leftrightarrow t = -\frac{1}{2}, 1 \quad (t \neq 0 \text{ をみたす})$$

$$\therefore \log_2 x = \log_2 2^{-\frac{1}{2}}, \log_2 2^{-1}$$

$$x = 2^{-\frac{1}{2}}, 2^{-1}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{2} \quad (\textcircled{1} \text{ をみたす}) //$$

< 対数不等式編 >

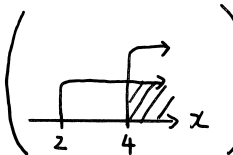
⑦ 次の不等式を解け。

$$(1) \log_2(x-2) + \log_2(x-4) \leq 3$$

$$(2) \log_{\frac{1}{2}}(7-2x) < 2\log_{\frac{1}{2}}(x-2)$$

$$(3) \log_2 x > \log_x 2 \quad (\text{ただし、} 0 < x < 1)$$

解) (1) $\log_2(x-2) + \log_2(x-4) \leq 3$


 真数条件により、 $x > 2$ かつ $x > 4$
 $\therefore x > 4 \dots \textcircled{1}$

①のもとで、

$$\log_2(x-2)(x-4) \leq \log_2 2^3$$

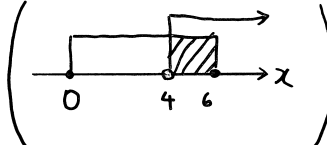
$$(x-2)(x-4) \leq 2^3$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 6x \leq 0$$

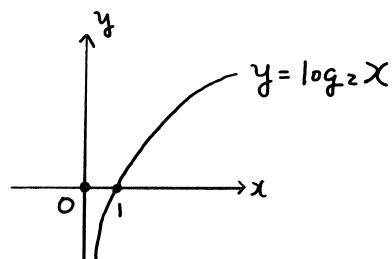
$$\Leftrightarrow x(x-6) \leq 0$$

$$\Leftrightarrow 0 \leq x \leq 6$$

①のもとでは、



$$4 < x \leq 6 //$$

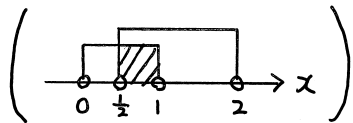


$$\Leftrightarrow \log_2 2^{-1} < \log_2 x < \log_2 2^1$$

$$\Leftrightarrow 2^{-1} < x < 2^1$$

$$\therefore \frac{1}{2} < x < 2$$

$0 < x < 1$ のもとでは、



$$\frac{1}{2} < x < 1 //$$

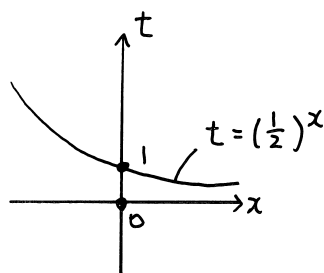
3. 最大最小 (基本的なもの)

< 指数編 >

① 置き換え

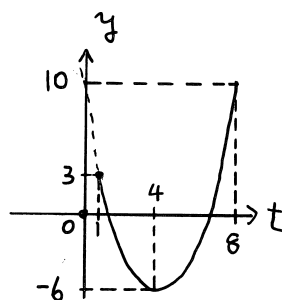
⑩ 関数 $y = (\frac{1}{4})^x - (\frac{1}{2})^{x-3} + 10$ ($-3 \leq x \leq 0$) の
最大値・最小値を求めよ。

解) $y = (\frac{1}{4})^x - (\frac{1}{2})^{x-3} + 10$
 $= \{(\frac{1}{2})^2\}^x - (\frac{1}{2})^x (\frac{1}{2})^{-3} + 10$
 $= (\frac{1}{2})^{2x} - 8 \times (\frac{1}{2})^x + 10$
 $= \{(\frac{1}{2})^x\}^2 - 8 \times (\frac{1}{2})^x + 10$



$(\frac{1}{2})^x = t$ とおくと、($1 \leq t \leq 8$)

$$y = t^2 - 8t + 10$$
$$= (t-4)^2 - 6$$



$$\begin{cases} \text{最大値 } 10 \text{ (} t=8 \text{ より, } x=-3 \text{)} \\ \text{最小値 } -6 \text{ (} t=4 \text{ より, } x=-2 \text{)} \end{cases}$$

② 文字消去

⑮ 実数 x, y が $25^x + 4^y = 4$ をみたすとき、

$z = 5^{x+1} + 2^{2y+1}$ のとりうる値の範囲を求めよ。

解) $25^x + 4^y = 4$ より、 $(5^x)^2 + (2^y)^2 = 4$

$5^x = X, 2^y = Y$ とおくと、 $(X > 0, Y > 0)$

$$X^2 + Y^2 = 4 \quad \cdots \textcircled{1}$$

このとき、

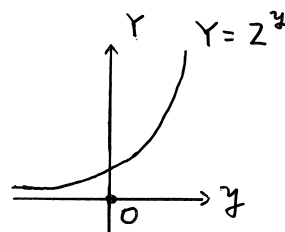
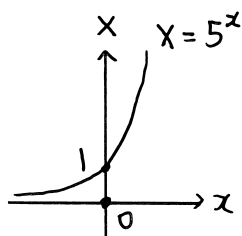
$$z = 5^{x+1} + 2^{2y+1}$$

$$= 5 \times 5^x + 2 \times (2^y)^2$$

$$= 5X + 2(4 - X^2) \quad (\textcircled{1} \text{より})$$

$$= -2X^2 + 5X + 8$$

$$= -2\left(X - \frac{5}{4}\right)^2 + \frac{89}{8}$$

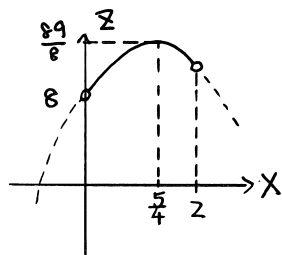


ここで、 $\textcircled{1}$ より $Y^2 = 4 - X^2 > 0$

$\therefore -2 < X < 2$ かつ $X > 0$ より

$0 < X < 2$ のもと、

$z = -2\left(X - \frac{5}{4}\right)^2 + \frac{89}{8}$ について、



$$8 < z \leq \frac{89}{8} //$$

< 対数編 >

① 置き換え

例) 関数 $y = (\log_3 x)^2 + \log_3 x^2 + 2$ ($\frac{1}{3} \leq x \leq 3$)
の最大値と最小値を求めよ。

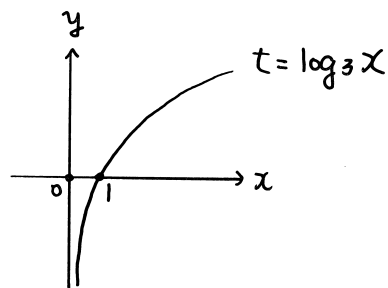
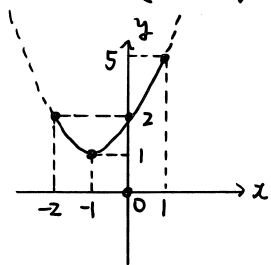
解) $y = (\log_3 x)^2 + \log_3 x^2 + 2$

$$= (\log_3 x)^2 + 2 \log_3 x + 2$$

$\log_3 x = t$ とおくと、 $(-2 \leq t \leq 1)$

$$y = t^2 + 2t + 2$$

$$= (t+1)^2 + 1$$



$\left\{ \begin{array}{l} \text{最大値 } 5 \text{ (そのとき, } t=1 \text{ より, } x=3) \\ \text{最小値 } 1 \text{ (そのとき, } t=-1 \text{ より, } x=\frac{1}{3}) \text{ , ,} \end{array} \right.$

② 真数の最大最小

例1 $f(x) = \log_{10}(x-5) + \log_{10}(25-x)$ の最大値を求めよ。

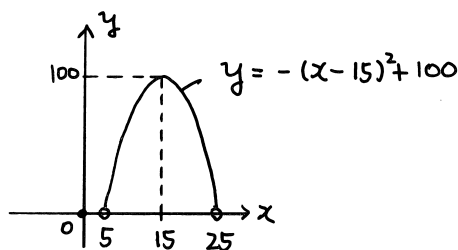
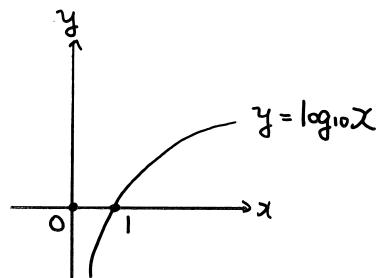
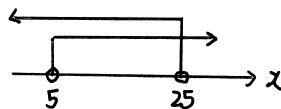
解) 真数条件より、 $x > 5$ かつ $25 > x$

$$\therefore 5 < x < 25 \dots \textcircled{1}$$

①のもとで、

$$\begin{aligned} f(x) &= \log_{10}(x-5)(25-x) \\ &= \log_{10}(-x^2 + 30x - 125) \\ &= \log_{10}\{- (x-15)^2 + 100\} \end{aligned}$$

$x = 15$ のとき、最大値 $\log_{10} 100 = 2$ //

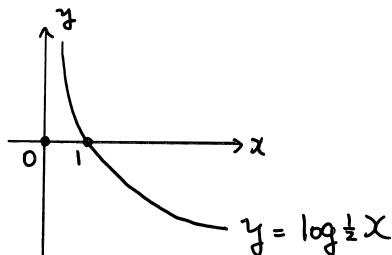
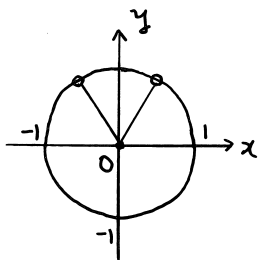


例2 $\frac{\pi}{6} < x < \frac{\pi}{3}$ のとき、

$f(x) = \log_{\frac{1}{2}}(\sin x) + \log_{\frac{1}{2}}(\cos x)$ の最小値を求めよ。

解) $f(x) = \log_{\frac{1}{2}}(\sin x \cos x)$

$$= \log_{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{2} \log 2x\right)$$



$f(x)$ の最小値は $\log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{2} = 1$ // ($x = \frac{\pi}{4}$)

③ そのまま相加相乗

⑮ $x > 1$ のとき、

$f(x) = \log_9 x + \log_x 81$ の最小値を求めよ。

解) $f(x) = \frac{\log_3 x}{\log_3 9} + \frac{\log_3 81}{\log_3 x}$

$$= \frac{\log_3 x}{2} + \frac{4}{\log_3 x}$$

$$\geq 2 \sqrt{\frac{\log_3 x}{2} \times \frac{4}{\log_3 x}} \quad (\text{相加、相乗平均の関係より})$$

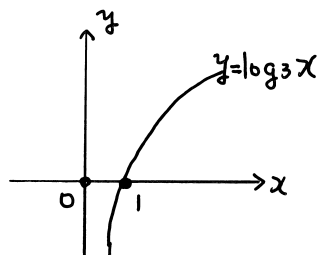
$$= 2\sqrt{2}$$

等号は $\frac{\log_3 x}{2} = \frac{4}{\log_3 x}$ 、つまり $(\log_3 x)^2 = 8$

$$\log_3 x = 2\sqrt{2}$$

$$x = 3^{2\sqrt{2}}$$

最小値 $2\sqrt{2}$ 、



4. 種々の応用題

(1) 対称式を利用した最大最小

変域チェックは「相加相乗」

④ $f(x) = 4^x + 4^{-x} - a(2^x + 2^{-x})$ について。

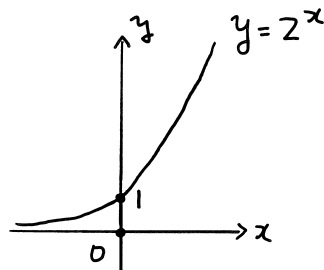
(1) $a=3$ のとき、 $f(x)$ の最小値および、そのときの x の値を求めよ。

(2) $a=5$ のとき、 $f(x)$ の最小値および、そのときの x の値を求めよ。

解) $2^x + 2^{-x} = t$ とおくと、

$$\begin{aligned} 4^x + 4^{-x} &= (2^x)^2 + (2^{-x})^2 \\ &= (2^x + 2^{-x})^2 - 2 \times 2^x \times 2^{-x} \\ &= t^2 - 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \therefore f(x) &= (t^2 - 2) - at \\ &= t^2 - at - 2 \end{aligned}$$



ここで、「相加相乗平均の関係」により、

$$t = 2^x + 2^{-x} \geq 2\sqrt{2^x \times 2^{-x}} = 2$$

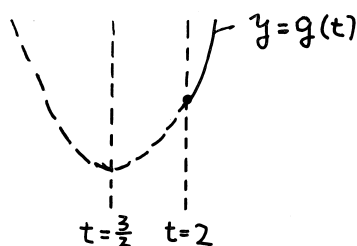
(等号は $2^x = 2^{-x} \Leftrightarrow x = -x \Leftrightarrow x = 0$ のとき)

$t \geq 2$ のもとで、

$$\begin{aligned} f(x) &= t^2 - at - 2 \\ &= \left(t - \frac{a}{2}\right)^2 - \frac{a^2}{4} - 2 \quad \text{の最小値を考える。} \end{aligned}$$

(1) $a = 3$ のとき、

$$\begin{aligned} f(x) &= t^2 - 3t - 2 \\ &= \left(t - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{17}{4} \end{aligned}$$

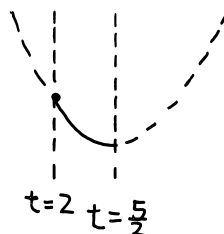


$t = 2$ のとき、最小値 -4 、

そのとき、 $x = 0$ 、

(2) $a = 5$ のとき、

$$\begin{aligned} f(x) &= t^2 - 5t - 2 \\ &= \left(t - \frac{5}{2}\right)^2 - \frac{33}{4} \end{aligned}$$



$t = \frac{5}{2}$ のとき、最小値 $-\frac{33}{4}$ 、

そのとき、 $2^x + 2^{-x} = \frac{5}{2}$

両辺に 2^x をかけて、 $(2^x)^2 + 2^x \times 2^{-x} = \frac{5}{2} \times 2^x$

$$\therefore 2 \times (2^x)^2 - 5 \times 2^x + 2 = 0$$

$$2^x = \frac{1}{2}, 2$$

$$= 2^{-1}, 2^1 \quad \therefore x = \pm 1,$$

(2) 領域 (と最大最小)

数Ⅱ
「図形と式」

①例 $\begin{cases} \log_3 \frac{x}{3} \geq 0 \cdots ① \end{cases}$

$\begin{cases} \log_2 (2y - x + 4) \leq \log_8 (4 - x)^3 + \log_2 (x + 1) \cdots ② \end{cases}$

のとき、 $y - x$ のとりうる値の範囲を求めよ。

もちろん x と y は実数ねっ!

解) ①、②について、真数条件から、

$$\frac{x}{3} > 0 \text{ かつ } 2y - x + 4 > 0 \text{ かつ } (4 - x)^3 > 0 \text{ かつ } x + 1 > 0$$

$$\therefore 0 < x < 4 \text{ かつ } y > \frac{1}{2}x - 2 \cdots ③$$

③のもとで、

$$① \text{ は } \log_3 \frac{x}{3} \leq \log_3 1$$

$$\therefore (0 <) \frac{x}{3} \leq 1 \rightarrow 0 < x \leq 3 \cdots ①'$$

$$② \text{ は } \log_2 (2y - x + 4) \leq \frac{\log_2 (4 - x)^3}{\log_2 8} + \log_2 (x + 1)$$

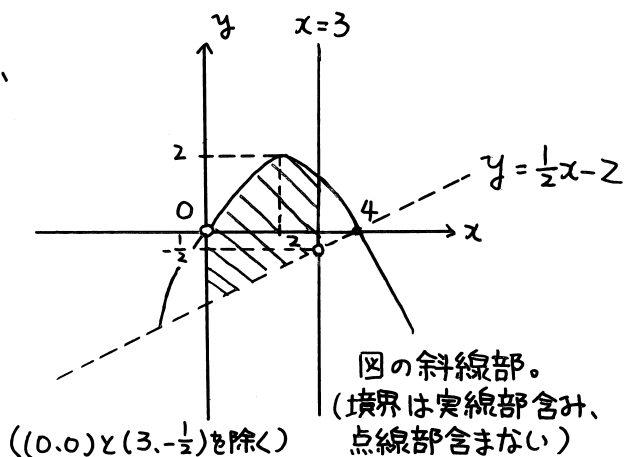
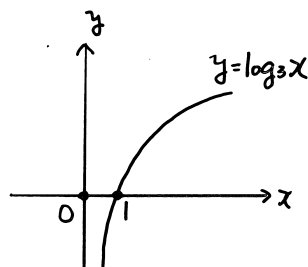
$$\Leftrightarrow \log_2 (2y - x + 4) \leq \log_2 (4 - x)(x + 1)$$

$$\therefore (0 <) 2y - x + 4 \leq (4 - x)(x + 1)$$

$$y \leq -\frac{1}{2}(x - 2)^2 + 2 \cdots ②'$$

①' かつ ②' かつ ③ により、

$$\begin{cases} 0 < x \leq 3 \\ \text{かつ} \\ y > \frac{1}{2}x - 2 \\ \text{かつ} \\ y \leq -\frac{1}{2}(x - 2)^2 + 2 \end{cases}$$



$$y-x=k \text{ とおくとき、 } y=x+k$$

。最大のとき、 $y=-\frac{1}{2}x^2+2x$ と $y=x+k$ が接するので、

$$\text{代入 } -\frac{1}{2}x^2+2x=x+k$$

$$\Leftrightarrow x^2-2x+2k=0$$

$$\text{判別式 } \frac{D}{4}=(-1)^2-2k=0 \quad \therefore k=\frac{1}{2}$$

また、 $(3, -\frac{1}{2})$ を $y=x+k$ が通るとき、

$$-\frac{1}{2}=3+k \quad k=-\frac{7}{2}$$

$$\therefore -\frac{7}{2} < k \leq \frac{1}{2}$$

$$\text{よって、 } -\frac{7}{2} < y-x \leq \frac{1}{2} //$$

(3) 大小比較

(まずは「底合わせ」
ダメなら「同じ乗」)

⑨ 次の数の大きさを比べよ。

$$(1) \sqrt{5} \text{ と } \sqrt[3]{625} \text{ と } \sqrt[4]{125}$$

$$(2) \sqrt{2} \text{ と } \sqrt[3]{7}$$

$$(3) \log_{\frac{1}{2}} 3 \text{ と } \log_{\frac{1}{2}} 4$$

$$(3) \log_2 5 \text{ と } \frac{7}{3}$$

解) (1) $\sqrt{5}$ と $\sqrt[3]{625}$ と $\sqrt[4]{125}$

$$\sqrt{5} = 5^{\frac{1}{2}}$$

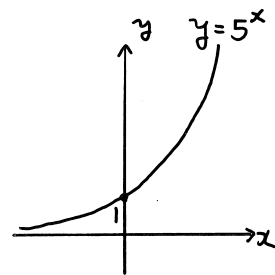
$$\sqrt[3]{625} = (5^4)^{\frac{1}{3}} = 5^{\frac{4}{3}}$$

$$\sqrt[4]{125} = (5^3)^{\frac{1}{4}} = 5^{\frac{3}{4}}$$

ここで、 $\frac{1}{2} < \frac{3}{4} < \frac{4}{3}$ より、

$$5^{\frac{1}{2}} < 5^{\frac{3}{4}} < 5^{\frac{4}{3}}$$

$$\therefore \sqrt{5} < \sqrt[4]{125} < \sqrt[3]{625} //$$



$$(2) \sqrt{2} \text{ と } \sqrt[3]{7}$$

両方とも 6 乗すると、

$$\sqrt{2}^6 = (2^{\frac{1}{2}})^6 = 2^3 = 8$$

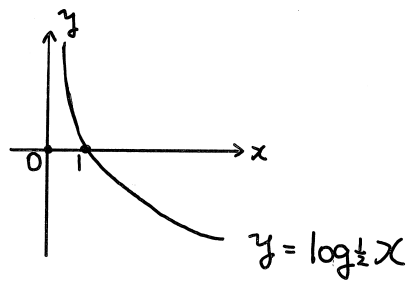
$$\sqrt[3]{7}^6 = (7^{\frac{1}{3}})^6 = 7^2 = 49$$

$8 < 49$ なので、

$$\sqrt{2} < \sqrt[3]{7} //$$

$$(3) \log_{\frac{1}{2}} 3 < \log_{\frac{1}{2}} 4$$

$$\log_{\frac{1}{2}} 3 > \log_{\frac{1}{2}} 4 //$$



$$(4) \log_2 5 < \frac{7}{3}$$

$$5^3 = 125$$

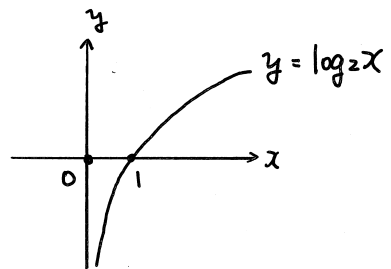
$$(2^{\frac{7}{3}})^3 = 2^7 = 128$$

$$125 < 128 \text{ より、}$$

$$5 < 2^{\frac{7}{3}}$$

$$\therefore \log_2 5 < \log_2 2^{\frac{7}{3}}$$

$$\log_2 5 < \frac{7}{3} //$$



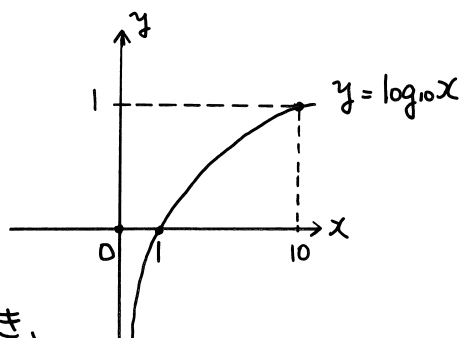
5. 桁数問題

準備 (常用対数)

10を底とした対数

① 例) $\log_{10} 2 = \log 2$

$\log_{10} 7 = \log 7$



② 問) $\log_{10} 2 = 0.3010$

$\log_{10} 3 = 0.4771$ とするとき、

次の値を求めよ。

$\log_{10} 4$ 、 $\log_{10} 5$ 、 $\log_{10} 6$ 、 $\log_{10} 8$ 、 $\log_{10} 9$

解) $\log_{10} 4 = \log_{10} 2^2$

$= 2 \log_{10} 2$

$= 2 \times 0.3010$

$= 0.6020$ 、

$\log_{10} 5 = \log_{10} \frac{10}{2}$

$= \log_{10} 10 - \log_{10} 2$

$= 1 - 0.3010$

$= 0.6990$ 、

$\log_{10} 6 = \log_{10} 2 + \log_{10} 3$

$= 0.3010 + 0.4771$

$= 0.7781$ 、

$\log_{10} 8 = \log_{10} 2^3$

$= 3 \log_{10} 2$

$= 3 \times 0.3010$

$= 0.9030$ 、

$\log_{10} 9 = \log_{10} 3^2$

$= 2 \log_{10} 3$

$= 2 \times 0.4771$

$= 0.9542$ 、

$\log_{10} 7 = 0.8451$

⑨ 例) $12^n > 10^{101}$ となる自然数 n の最小値を求めよ。

(ただし、 $\log_{10} 2 = 0.3010$ 、 $\log_{10} 3 = 0.4771$ とする)

解) $\log_{10} 12^n > \log_{10} 10^{101}$

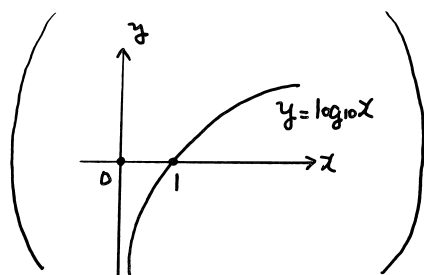
$$\Leftrightarrow n \log_{10} 12 > 101$$

$$\Leftrightarrow n \log_{10} (2^2 \times 3) > 101$$

$$\Leftrightarrow n (2 \log_{10} 2 + \log_{10} 3) > 101$$

$$\Leftrightarrow n (2 \times 0.3010 + 0.4771) > 101$$

$$\Leftrightarrow n > \frac{101}{1.0791}$$



n は自然数なので、 $n \geq 94$ n の最小値は 94、



(1) 桁数 & 小数首位

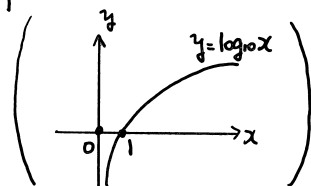
まずは具体例から。

① A が 4 桁の自然数のとき、 $10^3 \leq A < 10^4$

$$\Leftrightarrow \log_{10} 10^3 \leq \log_{10} A < \log_{10} 10^4$$

$$\Leftrightarrow 3 \leq \log_{10} A < 4$$

A が n 桁のとき、 $n-1 \leq \log_{10} A < n$



② B が小数第 5 位で初めて 0 でない数が現れる とするとき

$$0.00001 \leq B < 0.0001 \Leftrightarrow \log_{10} 10^{-5} \leq \log_{10} B < \log_{10} 10^{-4}$$

$$\Leftrightarrow -5 \leq \log_{10} B < -4$$

B が小数第 n 位で初めて 0 でない数が現れるとき、
 $-n \leq \log_{10} B < -(n-1)$

③ (1) 3^{2005} は何桁の数か?

$\log_{10} 2 = 0.3010$
 $\log_{10} 3 = 0.4771$ は用いてよい

(2) $(\frac{1}{5})^{32}$ を小数になおすと、小数第何位に初めて 0
でない数が現れるか?

$$\begin{aligned}
 \text{解) (1) } \log_{10} 3^{2005} &= 2005 \log_{10} 3 \\
 &= 2005 \times 0.4771 \\
 &= 956.5855
 \end{aligned}$$

$$\therefore 956 < \log_{10} 3^{2005} < 957$$

よって、 3^{2005} は 957桁 //

$$\begin{aligned}
 (2) \log_{10} \left(\frac{1}{5}\right)^{32} &= 32 \log_{10} \frac{2}{10} \\
 &= 32 (\log_{10} 2 - \log_{10} 10) \\
 &= 32 (0.3010 - 1) \\
 &= -22.368
 \end{aligned}$$

$$\therefore -23 < \log_{10} \left(\frac{1}{5}\right)^{32} < -22$$

よって、 $\left(\frac{1}{5}\right)^{32}$ は小数第23位に初めて0でない数が現れる。 //

(2) 最高位の数

小数部分をはさむ。

④ (1) 3^{2005} の最高位の数は何?

(2) $(\frac{1}{5})^{32}$ を小数になおすと、初めて現れる0でない数は何?

解) (1) $\log_{10} 3^{2005} = 2005 \times \log_{10} 3$
 $= 2005 \times 0.3010$
 $= 956.5855$

$\left(\begin{array}{l} 956 < \log_{10} 3^{2005} < 957 \\ \text{より、} \\ 3^{2005} \text{ は } 957 \text{ 桁} \end{array} \right)$

$\log_{10} 2 = 0.3010$

$\log_{10} 3 = 0.4771$

$\log_{10} 4 = 0.6020$

$\log_{10} 5 = 0.6990$

$\log_{10} 6 = 0.7781$

$\log_{10} 7 = 0.8451$

$\log_{10} 8 = 0.9030$

$\log_{10} 9 = 0.9542$

$\log_{10} 3 < 0.5855 < \log_{10} 4$

$\log_{10} 3 + \log_{10} 10^{956} < 956.5855 < \log_{10} 4 + \log_{10} 10^{956}$

$\Leftrightarrow \log_{10}(3 \times 10^{956}) < \log_{10} 3^{2005} < \log_{10}(4 \times 10^{956})$

$\Leftrightarrow 3 \times 10^{956} < 3^{2005} < 4 \times 10^{956}$

最高位の数は3、

(2) $\log_{10} (\frac{1}{5})^{32} = 32 \log_{10} \frac{2}{10}$

$= 32(0.3010 - 1)$

$= -22.368$

~~$= -22 - 0.368$~~

$= -23 + 0.632$

$\left(\begin{array}{l} -23 < \log_{10} (\frac{1}{5})^{32} < -22 \\ \text{より、小数第23位に} \\ \text{初めて0でない数が} \\ \text{現れる。} \end{array} \right)$

$$\log_{10} 4 < 0.632 < \log_{10} 5$$

$$\log_{10} 4 + \log_{10} 10^{-23} < -22.368 < \log_{10} 5 + \log_{10} 10^{-23}$$

$$\Leftrightarrow \log_{10} (4 \times 10^{-23}) < \log_{10} \left(\frac{1}{5}\right)^{32} < \log_{10} (5 \times 10^{-32})$$

$$\Leftrightarrow 4 \times 10^{-23} < \left(\frac{1}{5}\right)^{32} < 5 \times 10^{-23}$$

初めて表れる0でない数は4、