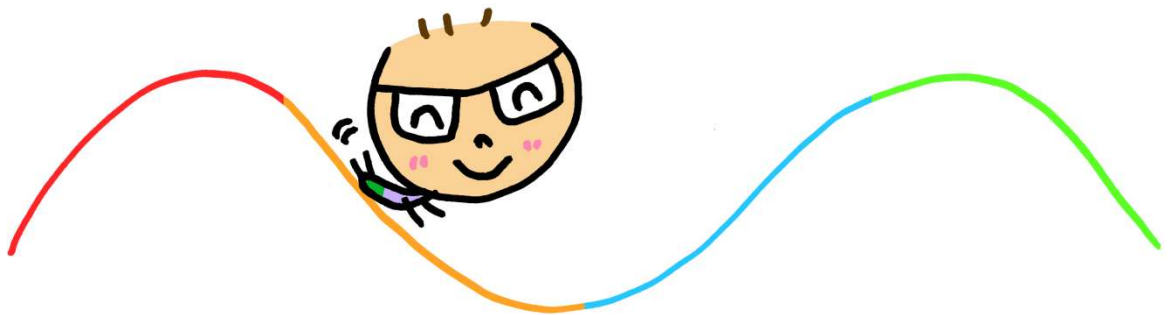


数学Ⅱ

1 1 三角関数



<講義ノート>

三角関数

< 基本編 >

- 1 弧度法・一般角
- 2 相互関係
- 3 グラフ
- 4 25 公式

< 応用編 >

最大最小・方程式・不等式を絶対に解くための 7 パターン

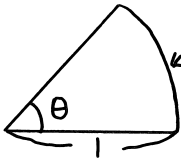
0 基本的な方程式・不等式

- 1 公式のみを用いて解けるもの
- 2 2 (3) 次関数・2 (3) 次方程式・2 (3) 次不等式に帰着させるもの
- 3 $\sin$ と $\cos$ の一次式の和・差 $\rightarrow$ 合成
- 4 $\sin$ と $\cos$ の積があり、それ以外が $\sin$ と $\cos$ の和 (or 差) のみ
 $\rightarrow$ 和 (or 差) を t とおく
- 5 $\sin$ と $\cos$ の積があり、それ以外が $\sin$ と $\cos$ の 2 乗、2 倍角のみ
 $\rightarrow$ すべて 2 倍角にして合成
- 6 積和・和積の公式の左辺の形 $\rightarrow$ 積和・和積の公式を利用する
- 7 (方程式・不等式の場合) 1 ~ 6 でダメ $\rightarrow$ 再度因数分解に挑戦!

<基本編>

1. 弧度法・一般角

(1) 弧度法



$$2\pi \times 1 \times \frac{\theta}{360^\circ}$$

$$\curvearrowright 2\pi \times \frac{\theta}{360^\circ} = \theta$$

$$\therefore 2\pi = 360^\circ$$

$$\underline{180^\circ} = \underline{\pi} \text{ (ラジアン)}$$

度数法 弧度法

⑪ 弧度法に直せ。

$$(1) 90^\circ = \frac{\pi}{2}$$

$$(2) 60^\circ = \frac{\pi}{3}$$

$$(3) 30^\circ = \frac{\pi}{6}$$

$$(4) 45^\circ = \frac{\pi}{4}$$

$$(5) 120^\circ = \frac{2}{3}\pi$$

$$(6) 135^\circ = \frac{3}{4}\pi$$

$$(7) 240^\circ = \frac{4}{3}\pi$$

$$(8) 210^\circ = \frac{7}{6}\pi$$

$$(9) 225^\circ = \frac{5}{4}\pi$$

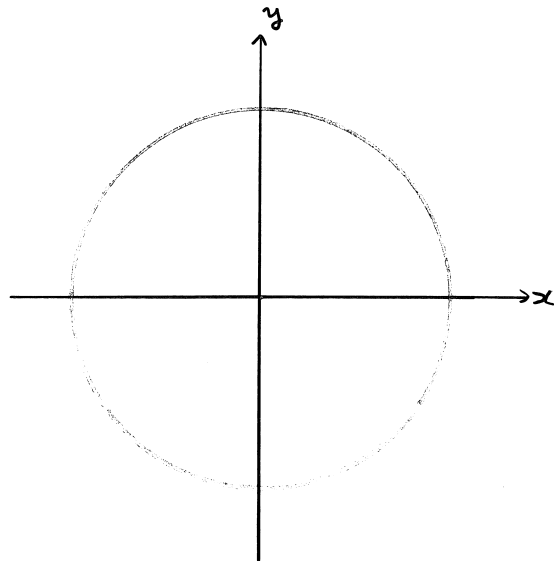
$$(10) 300^\circ = \frac{5}{3}\pi$$

$$(11) 330^\circ = \frac{11}{6}\pi$$

$$(12) 315^\circ = \frac{7}{4}\pi$$

$$(13) 270^\circ = \frac{3}{2}\pi$$

$$(14) 360^\circ = 2\pi$$



⑫ 次の方程式を解け ($0 \leq \theta < 2\pi$)

$$(1) \sin \theta = \frac{1}{2} \rightarrow \theta = \frac{\pi}{6}, \frac{5}{6}\pi //$$

$$(2) \cos \theta = -\frac{\sqrt{3}}{2} \rightarrow \theta = \frac{5}{6}\pi, \frac{7}{6}\pi //$$

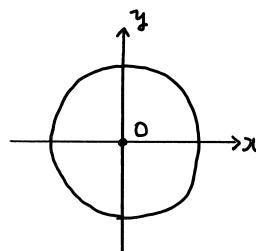
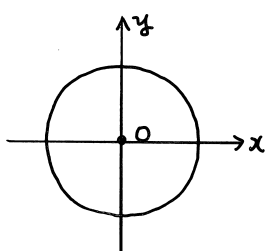
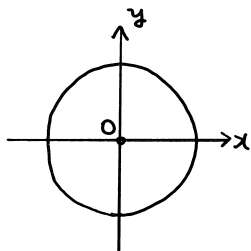
$$(3) \tan \theta = -1 \rightarrow \theta = \frac{3}{4}\pi, \frac{7}{4}\pi //$$

問2 次の不等式を解け。 ($0 \leq \theta < 2\pi$)

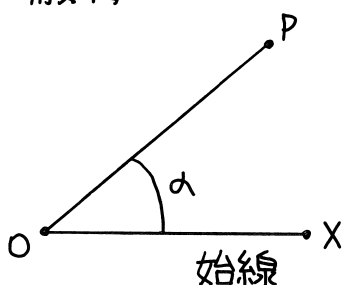
(1) $\sin \theta > -\frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow 0 \leq \theta < \frac{4}{3}\pi, \frac{5}{3}\pi < \theta < 2\pi //$

(2) $-\frac{1}{\sqrt{2}} < \cos \theta \leq \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{\pi}{3} \leq \theta < \frac{3}{4}\pi, \frac{5}{4}\pi < \theta \leq \frac{5}{3}\pi //$

(3) $-1 < \tan \theta \leq \sqrt{3} \Rightarrow 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{3}, \frac{3}{4}\pi < \theta \leq \frac{4}{3}\pi, \frac{7}{4}\pi < \theta < 2\pi //$



(2) 一般角



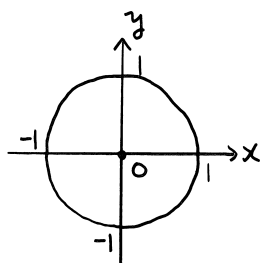
動径 OP を表す一般角は
 $\theta = \alpha + 2\pi \times n$ (n : 整数)

例① 次の値を求めよ。

(1) $\cos \frac{40}{3}\pi$ (2) $\sin(-\frac{15}{4}\pi)$ (3) $\tan \frac{49}{6}\pi$

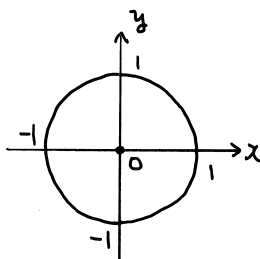
解) (1) $\cos \frac{40}{3}\pi$

$$\begin{aligned} &= \cos \frac{4 + 6 \times 6}{3} \pi \\ &= \cos \left(\frac{4}{3} + 6 \times 2 \right) \pi \\ &= \cos \left(\frac{4}{3}\pi + 2\pi \times 6 \right) \\ &= \cos \frac{4}{3}\pi \\ &= -\frac{1}{2} \text{,,} \end{aligned}$$



(2) $\sin(-\frac{15}{4}\pi)$

$$\begin{aligned} &= \sin \frac{1 - 16}{4} \pi \\ &= \sin \left(\frac{\pi}{4} - 4\pi \right) \\ &= \sin \left\{ \frac{\pi}{4} + 2\pi \times (-2) \right\} \\ &= \sin \frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}} \text{,,} \end{aligned}$$



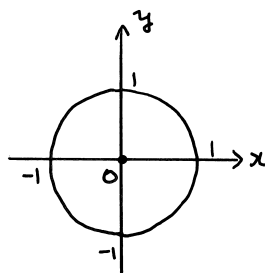
$$(3) \tan \frac{49}{6} \pi$$

$$= \tan \frac{1+6 \times 8}{6} \pi$$

$$= \tan \left(\frac{\pi}{6} + 8\pi \right)$$

$$\left(= \tan \left(\frac{\pi}{6} + 2\pi \times 4 \right) \right)$$

$$= \tan \frac{\pi}{6} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$



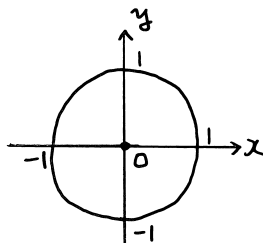
例2 次の方程式を解け。

$$(1) \sin \theta = \frac{1}{2}$$

$$(2) \cos \theta = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

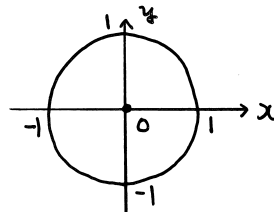
$$(3) \tan \theta = 1$$

解) (1) $\sin \theta = \frac{1}{2}$



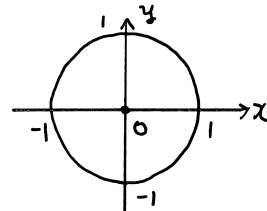
$$\theta = \frac{\pi}{6} + 2n\pi, \frac{5}{6}\pi + 2n\pi \quad (n: \text{整数}) //$$

$$(2) \cos \theta = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$



$$\theta = \frac{5}{6}\pi + 2n\pi, \frac{7}{6}\pi + 2n\pi \quad (n: \text{整数}) //$$

$$(3) \tan \theta = 1$$



$$\theta = \frac{\pi}{4} + 2n\pi, \frac{5}{4}\pi + 2n\pi$$

6

$$\theta = \frac{\pi}{4} + n\pi \quad (n: \text{整数}) //$$

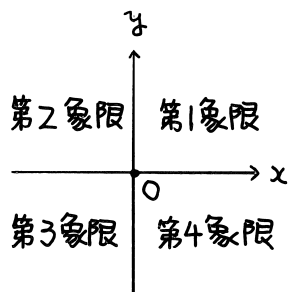
2. 相互関係

三角比と同様に、三角関数についても、以下が成り立つ。

$$\circ \tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta}$$

$$\circ \cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1$$

$$\circ 1 + \tan^2 \theta = \frac{1}{\cos^2 \theta}$$



例1) θ を第2象限の角とする。

(1) $\sin \theta = \frac{3}{5}$ のとき、 $\cos \theta$ 、 $\tan \theta$ の値を求めよ。

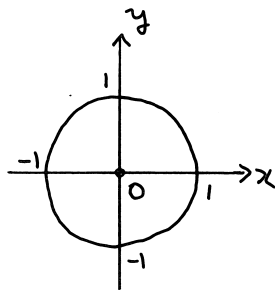
(2) $\tan \theta = -3$ のとき、 $\cos \theta$ 、 $\sin \theta$ の値を求めよ。

解) (1) $\cos^2 \theta = 1 - \sin^2 \theta$

$$= 1 - \left(\frac{3}{5}\right)^2$$

$$= \frac{16}{25}$$

$$\cos \theta = \pm \frac{4}{5}$$



θ は第2象限なので、 $\cos \theta < 0$ $\therefore \cos \theta = -\frac{4}{5}$ //

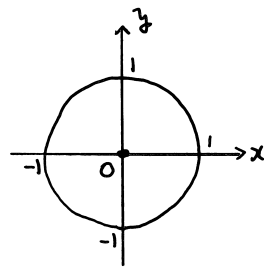
また、 $\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta}$

$$= \frac{\frac{3}{5}}{-\frac{4}{5}} = -\frac{3}{4} //$$

(2) $\tan \theta = -3$ のとき、

$$1 + \tan^2 \theta = \frac{1}{\cos^2 \theta} \text{ から、}$$

$$1 + (-3)^2 = \frac{1}{\cos^2 \theta} \quad \therefore \cos^2 \theta = \frac{1}{10}$$



$$\text{したがって、} \cos \theta = \pm \frac{1}{\sqrt{10}}$$

θ は第2象限の角なので、 $\cos \theta < 0$ より、 $\cos \theta = -\frac{1}{\sqrt{10}}$ //

$$\begin{aligned} \text{また、} \tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} \text{ から、} \sin \theta &= \tan \theta \cos \theta \\ &= (-3) \times \left(-\frac{1}{\sqrt{10}}\right) \\ &= \frac{3}{\sqrt{10}} // \end{aligned}$$

例2) $\sin \theta + \cos \theta = \frac{1}{2}$ のとき、次の値を求めよ。

(1) $\sin \theta \cos \theta$

(2) $\sin^3 \theta + \cos^3 \theta$

(3) $\sin \theta - \cos \theta$

(4) $\tan \theta$

解) (1) $\sin \theta + \cos \theta = \frac{1}{2} \dots \textcircled{1}$

①の両辺を2乗

$$(\sin \theta + \cos \theta)^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2$$

$$\Leftrightarrow \sin^2 \theta + 2\sin \theta \cos \theta + \cos^2 \theta = \frac{1}{4}$$

$$\Leftrightarrow 1 + 2\sin \theta \cos \theta = \frac{1}{4}$$

$$\Leftrightarrow 2\sin \theta \cos \theta = -\frac{3}{4} \quad \therefore \sin \theta \cos \theta = -\frac{3}{8} // \dots \textcircled{2}$$

$$(2) \sin^3 \theta + \cos^3 \theta$$

$$= (\sin \theta + \cos \theta)^3 - 3 \sin \theta \cos \theta (\sin \theta + \cos \theta)$$

$$= \left(\frac{1}{2}\right)^3 - 3 \times \left(-\frac{3}{8}\right) \times \frac{1}{2} \quad (\text{①、②より})$$

$$= \frac{1}{8} + \frac{9}{16} = \frac{11}{16} //$$

(別解)

$$\sin^3 \theta + \cos^3 \theta = (\sin \theta + \cos \theta)(\sin^2 \theta - \sin \theta \cos \theta + \cos^2 \theta)$$

$$= \frac{1}{2} \left\{ 1 - \left(-\frac{3}{8}\right) \right\} \quad (\text{①、②より})$$

$$= \frac{1}{2} \times \frac{11}{8}$$

$$= \frac{11}{16} //$$

$$(3) (\sin \theta - \cos \theta)^2 = \sin^2 \theta - 2 \sin \theta \cos \theta + \cos^2 \theta$$

$$= 1 - 2 \sin \theta \cos \theta$$

$$= 1 - 2 \times \left(-\frac{3}{8}\right) \quad (\text{②より})$$

$$= \frac{7}{4}$$

$$\therefore \sin \theta - \cos \theta = \pm \frac{\sqrt{7}}{2} //$$

$$(4) \begin{cases} \sin \theta + \cos \theta = \frac{1}{2} \dots \text{①} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sin \theta - \cos \theta = \pm \frac{\sqrt{7}}{2} \dots \text{③} \end{cases}$$

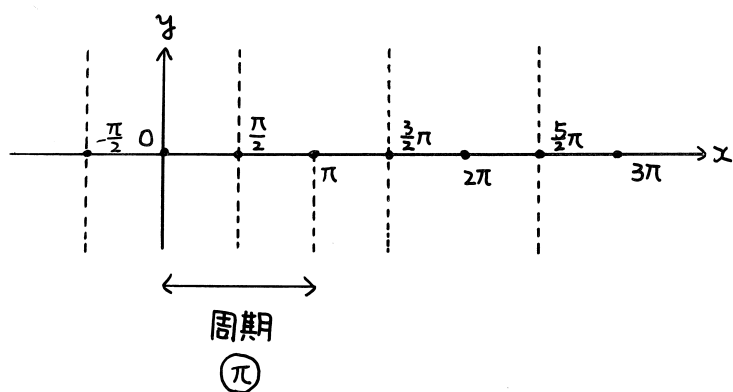
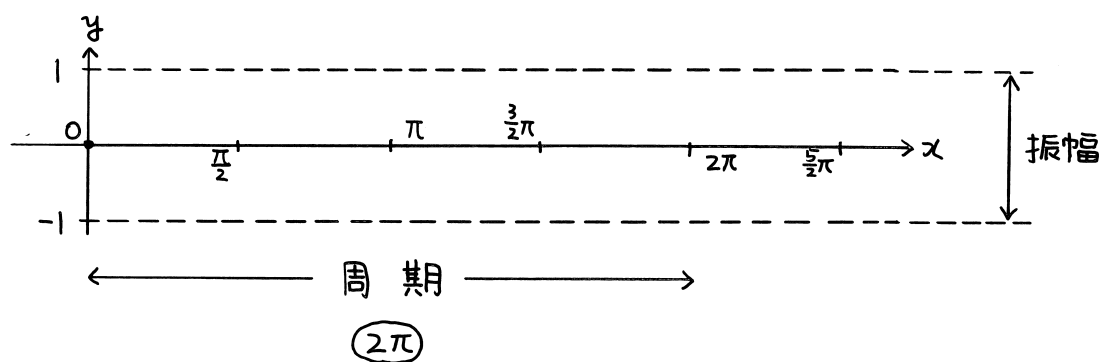
$$\frac{\text{①} + \text{③}}{2} \quad \sin \theta = \frac{1 \pm \sqrt{7}}{4}$$

$$\frac{\text{①} - \text{③}}{2} \quad \cos \theta = \frac{1 \mp \sqrt{7}}{4}$$

$$\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \frac{\frac{1 \pm \sqrt{7}}{4}}{\frac{1 \mp \sqrt{7}}{4}}$$

$$= \frac{(1 \mp \sqrt{7})^2}{(1 \mp \sqrt{7})(1 \pm \sqrt{7})} = - \frac{8 \pm 2\sqrt{7}}{6} = \frac{-4 \pm \sqrt{7}}{3} //$$

3. グラフ



まとめ

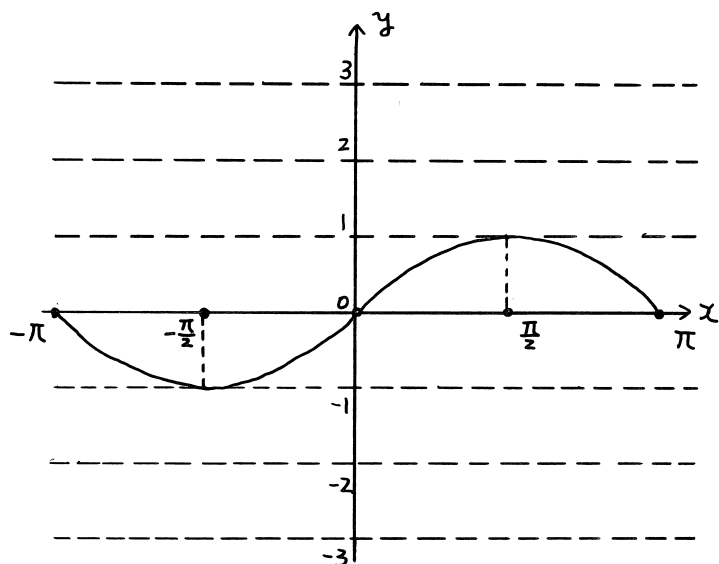
$y = \sin x$ の周期は 2π

$y = \cos x$ の周期は 2π

$y = \tan x$ の周期は π

例) $y = 3 \sin(2x - \frac{\pi}{3})$ のグラフを書く。 ($-\pi \leq x \leq \pi$)

$$y = \sin x$$



まとめ2

$$y = t \sin a(x - \theta) \quad (a > 0, t > 0)$$

のグラフは、 $y = \sin x$ のグラフを

- { 周期 $\frac{1}{a}$ 倍 ($\frac{2\pi}{a}$)
- { 振幅 t 倍
- { x 軸正方向に $+\theta$ 平行移動したもの。

■加法定理 (おおもと)

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta \quad \cdots \textcircled{1}$$

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta \quad \cdots \textcircled{2}$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta \quad \cdots \textcircled{3}$$

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta \quad \cdots \textcircled{4}$$

これらをもとに,

$$\textcircled{5} \quad \tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta}$$

$$\textcircled{6} \quad \tan(\alpha - \beta) = \frac{\tan \alpha - \tan \beta}{1 + \tan \alpha \tan \beta}$$

■2倍角の公式

$$\textcircled{7} \quad \sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$$

$$\textcircled{8} \quad \cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$$

$$\textcircled{9} \quad = 2 \cos^2 \alpha - 1$$

$$\textcircled{10} \quad = 1 - 2 \sin^2 \alpha$$

$$\textcircled{11} \quad \tan 2\alpha = \frac{2 \tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha}$$

■半角の公式

$$\textcircled{12} \quad \cos^2 \alpha = \frac{1}{2} (1 + \cos 2\alpha)$$

$$\textcircled{13} \quad \sin^2 \alpha = \frac{1}{2} (1 - \cos 2\alpha)$$

$$\textcircled{14} \quad \tan^2 \alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{1 + \cos 2\alpha}$$

■3倍角の公式

$$\textcircled{15} \quad \sin 3\alpha = 3 \sin \alpha - 4 \sin^3 \alpha$$

$$\textcircled{16} \quad \cos 3\alpha = 4 \cos^3 \alpha - 3 \cos \alpha$$

■合成

$$\textcircled{17} \quad (\text{i}) \text{ 係数の2乗の和のルートでくくる}$$

$$(\text{ii}) \quad \cos, \sin \text{ をわりあてる}$$

$$(\text{iii}) \text{ 加法定理でくつつける}$$

■積和の公式

$$\textcircled{18} \quad \sin \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} \{ \sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta) \}$$

$$\textcircled{19} \quad \cos \alpha \sin \beta = \frac{1}{2} \{ \sin(\alpha + \beta) - \sin(\alpha - \beta) \}$$

$$\textcircled{20} \quad \cos \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} \{ \cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta) \}$$

$$\textcircled{21} \quad \sin \alpha \sin \beta = -\frac{1}{2} \{ \cos(\alpha + \beta) - \cos(\alpha - \beta) \}$$

■和積の公式

$$<\text{前提}> \quad \alpha + \beta = A, \quad \alpha - \beta = B \text{ とすると,}$$

$$\alpha = \frac{A+B}{2}, \quad \beta = \frac{A-B}{2}$$

$$\textcircled{22} \quad \sin A + \sin B = 2 \sin \frac{A+B}{2} \cos \frac{A-B}{2}$$

$$\textcircled{23} \quad \sin A - \sin B = 2 \cos \frac{A+B}{2} \sin \frac{A-B}{2}$$

$$\textcircled{24} \quad \cos A + \cos B = 2 \cos \frac{A+B}{2} \cos \frac{A-B}{2}$$

$$\textcircled{25} \quad \cos A - \cos B = -2 \sin \frac{A+B}{2} \sin \frac{A-B}{2}$$

4. 25 公式

■ 加法定理

$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta \dots ①$$

$$\sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta \dots ②$$

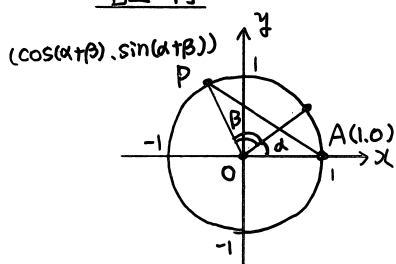
$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta \dots ③$$

$$\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta \dots ④$$

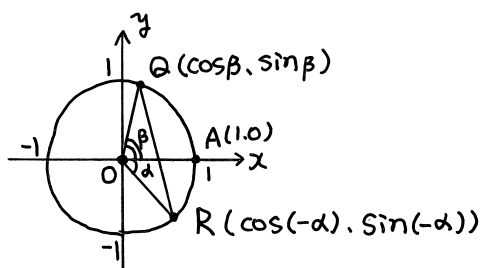
$$\tan(\alpha+\beta) = \frac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha\tan\beta} \dots ⑤$$

$$\tan(\alpha-\beta) = \frac{\tan\alpha - \tan\beta}{1 + \tan\alpha\tan\beta} \dots ⑥$$

証明



(図1)



(図2)

(図1) において、 $P(\cos(\alpha+\beta), \sin(\alpha+\beta))$ とする、 $A(1, 0)$

$$\begin{aligned} AP^2 &= \{\cos(\alpha+\beta) - 1\}^2 + \{\sin(\alpha+\beta) - 0\}^2 \\ &= \cos^2(\alpha+\beta) - 2\cos(\alpha+\beta) + 1 + \sin^2(\alpha+\beta) \\ &= 2 - 2\cos(\alpha+\beta) \dots (*1) \end{aligned}$$

(図2) において、 $Q(\cos\beta, \sin\beta)$ 、 $R(\cos(-\alpha), \sin(-\alpha))$ とする、

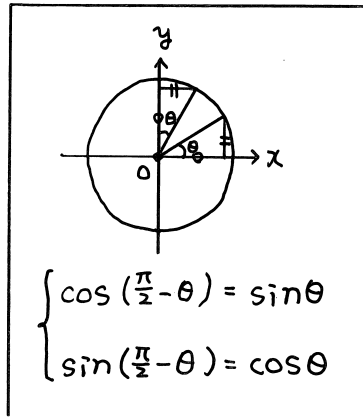
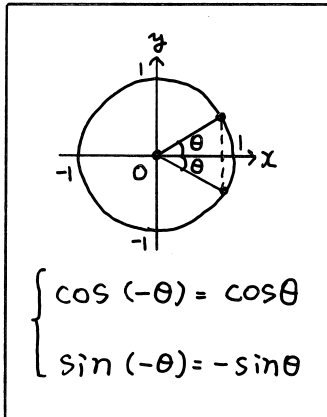
$$\begin{aligned} QR^2 &= \{\cos\beta - \cos(-\alpha)\}^2 + \{\sin\beta - \sin(-\alpha)\}^2 \\ &= \cos^2\beta - 2\cos\alpha\cos\beta + \cos^2\alpha + \sin^2\beta + 2\sin\alpha\sin\beta + \sin^2\alpha \\ &= 2 - 2(\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta) \dots (*2) \end{aligned}$$

AP = QR より、(*1)、(*2) から、

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha \cos\beta - \sin\alpha \sin\beta \quad (\textcircled{3} \text{完成!})$$

β を $-\beta$ にする、 $\cos\{\alpha + (-\beta)\} = \cos\alpha \cos(-\beta) - \sin\alpha \sin(-\beta)$

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha \cos\beta + \sin\alpha \sin\beta \quad (\textcircled{4} \text{完成!})$$



$$\begin{aligned} \text{次に、} \sin(\alpha + \beta) &= \cos\left\{\frac{\pi}{2} - (\alpha + \beta)\right\} \\ &= \cos\left\{\frac{\pi}{2} - \alpha - \beta\right\} \\ &= \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)\cos\beta + \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)\sin\beta \\ &= \sin\alpha \cos\beta + \cos\alpha \sin\beta \quad (\textcircled{1} \text{完成!}) \end{aligned}$$

β を $-\beta$ にする、

$$\sin\{\alpha + (-\beta)\} = \sin\alpha \cos(-\beta) + \cos\alpha \sin(-\beta)$$

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha \cos\beta - \cos\alpha \sin\beta \quad (\textcircled{2} \text{完成!})$$

これらを用いると、

例1

$$\begin{aligned}(1) \sin \frac{5}{12}\pi &= \sin \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{6} \right) \\ &= \sin \frac{\pi}{4} \cos \frac{\pi}{6} + \cos \frac{\pi}{4} \sin \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(2) \cos \frac{7}{12}\pi &= \cos \left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{4} \right) \\ &= \cos \frac{\pi}{3} \cos \frac{\pi}{4} - \sin \frac{\pi}{3} \sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2} - \sqrt{6}}{4}\end{aligned}$$

次に、

$$\begin{aligned}\tan(\alpha \pm \beta) &= \frac{\sin(\alpha \pm \beta)}{\cos(\alpha \pm \beta)} \\ &= \frac{\sin \alpha \cos \beta \pm \cos \alpha \sin \beta}{\cos \alpha \cos \beta \mp \sin \alpha \sin \beta} \\ &= \frac{\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \pm \frac{\sin \beta}{\cos \beta}}{1 \mp \frac{\sin \alpha \sin \beta}{\cos \alpha \cos \beta}} \\ &= \frac{\tan \alpha \pm \tan \beta}{1 \mp \tan \alpha \tan \beta} \quad \dots \textcircled{5} \\ &\quad \dots \textcircled{6}\end{aligned}$$

$$\tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta} \quad \dots \textcircled{5}$$

$$\tan(\alpha - \beta) = \frac{\tan \alpha - \tan \beta}{1 + \tan \alpha \tan \beta} \quad \dots \textcircled{6}$$

(例2) 2直線 $y = \frac{1}{2}x$ と $y = 3x$ のなす角 θ ($0 < \theta < \frac{\pi}{2}$) を求めよ。

解) $y = 3x$ 、 $y = \frac{1}{2}x$ と、 x 軸正方向とのなす角をそれぞれ α 、 β とすると ($0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ 、 $0 < \beta < \frac{\pi}{2}$)

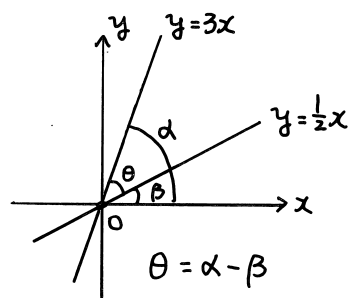
$$\tan \alpha = 3, \tan \beta = \frac{1}{2} \dots \textcircled{1}$$

$$\text{よ、} \tan \theta = \tan(\alpha - \beta)$$

$$= \frac{\tan \alpha - \tan \beta}{1 + \tan \alpha \tan \beta}$$

$$= \frac{3 - \frac{1}{2}}{1 + 3 \times \frac{1}{2}} \quad (\textcircled{1} \text{より})$$

$$= 1 \quad \therefore \theta = \frac{\pi}{4} //$$



2倍角の公式

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha \dots ⑦$$

$$\cos 2\alpha = \begin{cases} \cos^2\alpha - \sin^2\alpha \dots ⑧ \\ 2\cos^2\alpha - 1 \dots ⑨ \\ 1 - 2\sin^2\alpha \dots ⑩ \end{cases}$$

$$\tan 2\alpha = \frac{2\tan\alpha}{1 - \tan^2\alpha} \dots ⑪$$

$$\begin{aligned} \sin 2\alpha &= \sin(\alpha + \alpha) \\ &= \sin\alpha\cos\alpha + \cos\alpha\sin\alpha \\ &= 2\sin\alpha\cos\alpha \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \cos 2\alpha &= \cos(\alpha + \alpha) \\ &= \cos\alpha\cos\alpha - \sin\alpha\sin\alpha \\ &= \cos^2\alpha - \sin^2\alpha \\ &= \cos^2\alpha - (1 - \cos^2\alpha) \\ &= 2\cos^2\alpha - 1 \\ &= 2(1 - \sin^2\alpha) - 1 \\ &= 1 - 2\sin^2\alpha \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{また、} \tan 2\alpha &= \tan(\alpha + \alpha) \\ &= \frac{\tan\alpha + \tan\alpha}{1 - \tan\alpha\tan\alpha} \\ &= \frac{2\tan\alpha}{1 - \tan^2\alpha} \end{aligned}$$

例1 $-\frac{\pi}{2} < \alpha < 0$ において、 $\cos \alpha = \frac{1}{3}$ であるとき、次の値を求めよ。

(1) $\sin 2\alpha$

(2) $\cos 2\alpha$

(3) $\tan 2\alpha$

解) $\sin^2 \alpha = 1 - \cos^2 \alpha$

$$= 1 - \left(\frac{1}{3}\right)^2$$

$$= \frac{8}{9}$$

$$\sin \alpha = \pm \sqrt{\frac{8}{9}}$$

$$= \pm \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

$\sin \alpha < 0$ なので、

$$\sin \alpha = -\frac{2\sqrt{2}}{3}$$

また、 $\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$

$$= \frac{-\frac{2\sqrt{2}}{3}}{\frac{1}{3}}$$

$$= -2\sqrt{2}$$

(1) $\sin 2\alpha$

$$= 2\sin \alpha \cos \alpha$$

$$= 2 \times \left(-\frac{2\sqrt{2}}{3}\right) \times \frac{1}{3}$$

$$= -\frac{4\sqrt{2}}{9} //$$

(2) $\cos 2\alpha$

$$= 2\cos^2 \alpha - 1$$

$$= 2\left(\frac{1}{3}\right)^2 - 1$$

$$= -\frac{7}{9} //$$

(3) $\tan 2\alpha$

$$= \frac{2\tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha}$$

$$= \frac{2 \times (-2\sqrt{2})}{1 - (-2\sqrt{2})^2}$$

$$= \frac{4\sqrt{2}}{7} //$$

■ 半角の公式

$$\cos^2 \alpha = \frac{1}{2} (1 + \cos 2\alpha) \dots (12)$$

$$\sin^2 \alpha = \frac{1}{2} (1 - \cos 2\alpha) \dots (13)$$

$$\tan^2 \alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{1 + \cos 2\alpha} \dots (14)$$

$$\cos^2 \frac{\theta}{2} = \frac{1}{2} (1 + \cos \theta) \dots (12)'$$

$$\sin^2 \frac{\theta}{2} = \frac{1}{2} (1 - \cos \theta) \dots (13)'$$

$$\tan^2 \frac{\theta}{2} = \frac{1 - \cos \theta}{1 + \cos \theta} \dots (14)'$$

⑨ から、 $2 \cos^2 \alpha = 1 + \cos 2\alpha$

$$\therefore \cos^2 \alpha = \frac{1}{2} (1 + \cos 2\alpha)$$

$$\cos^2 \frac{\theta}{2} = \frac{1}{2} (1 + \cos \theta)$$

⑩ から、 $2 \sin^2 \alpha = 1 - \cos 2\alpha$

$$\therefore \sin^2 \alpha = \frac{1}{2} (1 - \cos 2\alpha)$$

$$\sin^2 \frac{\theta}{2} = \frac{1}{2} (1 - \cos \theta)$$

$$\begin{aligned} \tan^2 \alpha &= \frac{\sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} \\ &= \frac{\frac{1}{2} (1 - \cos 2\alpha)}{\frac{1}{2} (1 + \cos 2\alpha)} \end{aligned}$$

$$\tan^2 \frac{\theta}{2} = \frac{1 - \cos \theta}{1 + \cos \theta}$$

(例2) $\pi < \theta < \frac{3}{2}\pi$ において、 $\tan \theta = \frac{4}{3}$ のとき、次の値を求めよ。

(1) $\sin \frac{\theta}{2}$

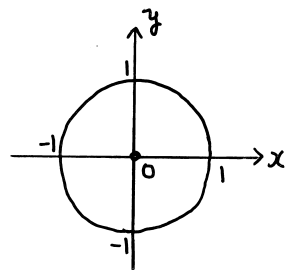
(2) $\cos \frac{\theta}{2}$

(3) $\tan \frac{\theta}{2}$

解) $1 + \tan^2 \theta = \frac{1}{\cos^2 \theta}$ により、

$$1 + \left(\frac{4}{3}\right)^2 = \frac{1}{\cos^2 \theta} \quad \therefore \cos^2 \theta = \frac{9}{25}$$

$\cos \theta < 0$ なのて、 $\cos \theta = -\frac{3}{5}$



$$(1) \sin^2 \frac{\theta}{2} = \frac{1}{2} (1 - \cos \theta)$$

$$= \frac{1}{2} \left\{ 1 - \left(-\frac{3}{5}\right) \right\}$$

$$= \frac{1}{2} \times \frac{8}{5} = \frac{4}{5}$$

$$\therefore \sin \frac{\theta}{2} = \pm \frac{2}{\sqrt{5}}$$

$\sin \frac{\theta}{2} > 0$ なのて、 $\sin \frac{\theta}{2} = \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$ //

$$(2) \cos^2 \frac{\theta}{2} = \frac{1}{2} (1 + \cos \theta)$$

$$= \frac{1}{2} \left(1 - \frac{3}{5} \right)$$

$$= \frac{1}{5}$$

$$\therefore \cos \frac{\theta}{2} = \pm \frac{1}{\sqrt{5}}$$

$\cos \frac{\theta}{2} < 0$ なのて、 $\cos \frac{\theta}{2} = -\frac{1}{\sqrt{5}} = -\frac{\sqrt{5}}{5}$ //

$$(3) \tan^2 \frac{\theta}{2} = \frac{1 - \cos \theta}{1 + \cos \theta}$$

$$= \frac{1 - \left(-\frac{3}{5}\right)}{1 + \left(-\frac{3}{5}\right)}$$

$$= \frac{\frac{8}{5}}{\frac{2}{5}} = 4$$

$$\therefore \tan \frac{\theta}{2} = \pm 2$$

$\tan \frac{\theta}{2} < 0$ なのて、 $\tan \frac{\theta}{2} = -2$ //

3倍角の公式

$$\sin 3\alpha = 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha \dots \textcircled{15}$$

$$\cos 3\alpha = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha \dots \textcircled{16}$$

$$\sin 3\alpha = \sin(2\alpha + \alpha)$$

$$= \sin 2\alpha \cos\alpha + \cos 2\alpha \sin\alpha$$

$$= 2\sin\alpha \cos\alpha \times \cos\alpha + (1 - \sin^2\alpha) \times \sin\alpha$$

$$= 2\sin\alpha(1 - \sin^2\alpha) + \sin\alpha - 2\sin^3\alpha$$

$$= 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha$$

$$\cos 3\alpha = \cos(2\alpha + \alpha)$$

$$= \cos 2\alpha \cos\alpha - \sin 2\alpha \sin\alpha$$

$$= (2\cos^2\alpha - 1) \cos\alpha - 2\sin\alpha \cos\alpha \times \sin\alpha$$

$$= 2\cos^3\alpha - \cos\alpha - 2\cos\alpha(1 - \cos^2\alpha)$$

$$= 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha$$

■ 合成

加法定理を用いることにより、

$a \sin \theta + b \cos \theta$ は $r \sin(\theta + \alpha)$ ($r > 0$, $-\pi < \alpha < \pi$) の形にできる。

$$\textcircled{\text{例}} \quad \sin \theta + \sqrt{3} \cos \theta = 2 \sin\left(\theta + \frac{\pi}{3}\right)$$

三角関数の合成の公式

$$a \sin \theta + b \cos \theta = \sqrt{a^2 + b^2} \sin(\theta + \alpha)$$

$$\text{ただし、} \cos \alpha = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \quad , \quad \sin \alpha = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

合成の手順

(i) 係数の2乗の和のルートでくくる。

(ii) $\cos$ 、 $\sin$ をわりあてる。

(iii) 加法定理でくっつける。

$$\textcircled{\text{例}} \quad (1) \quad \sin \theta + \sqrt{3} \cos \theta$$

$$= 2 \left(\sin \theta \times \frac{1}{2} + \cos \theta \times \frac{\sqrt{3}}{2} \right)$$

$$= 2 \left(\sin \theta \cos \frac{\pi}{3} + \cos \theta \sin \frac{\pi}{3} \right)$$

$$= 2 \sin\left(\theta + \frac{\pi}{3}\right),,$$

$$(2) \sqrt{3} \sin \theta + \cos \theta$$

$$= 2 \left(\sin \theta \times \frac{\sqrt{3}}{2} + \cos \theta \times \frac{1}{2} \right)$$

$$= 2 \sin \left(\theta + \frac{\pi}{6} \right),,$$

$$(3) \sin \theta - \cos \theta$$

$$= \sqrt{2} \left(\sin \theta \times \frac{1}{\sqrt{2}} - \cos \theta \times \frac{1}{\sqrt{2}} \right)$$

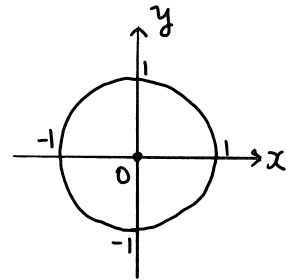
$$= \sqrt{2} \sin \left(\theta - \frac{\pi}{4} \right),,$$

$$(4) 3 \sin \theta + 4 \cos \theta$$

$$= 5 \left(\sin \theta \times \frac{3}{5} + \cos \theta \times \frac{4}{5} \right)$$

$$= 5 \sin (\theta + \alpha),,$$

$$\text{ただし、} \begin{cases} \cos \alpha = \frac{3}{5} \\ \sin \alpha = \frac{4}{5} \end{cases}$$



$$(5) a \sin \theta + b \cos \theta$$

$$= \sqrt{a^2 + b^2} \left(\sin \theta \times \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} + \cos \theta \times \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right)$$

$$= \sqrt{a^2 + b^2} \sin (\theta + \alpha),,$$

$$\text{ただし、} \begin{cases} \cos \alpha = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \\ \sin \alpha = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \end{cases}$$

④ (1) $\sin \theta + \sqrt{3} \cos \theta$ について。

先ほとは、 $\sin \theta + \sqrt{3} \cos \theta$

$$= 2 \left(\sin \theta \times \frac{1}{2} + \cos \theta \times \frac{\sqrt{3}}{2} \right)$$

$$= 2 \sin \left(\theta + \frac{\pi}{3} \right) //$$

$$\sin \theta + \sqrt{3} \cos \theta$$

$$= 2 \left(\cos \theta \times \frac{\sqrt{3}}{2} + \sin \theta \times \frac{1}{2} \right)$$

$$= 2 \cos \left(\theta - \frac{\pi}{6} \right) //$$

■ 積和の公式

$$\frac{\textcircled{1} + \textcircled{2}}{2} \sin \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} \{ \sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta) \} \dots \textcircled{18}$$

$$\frac{\textcircled{1} - \textcircled{2}}{2} \cos \alpha \sin \beta = \frac{1}{2} \{ \sin(\alpha + \beta) - \sin(\alpha - \beta) \} \dots \textcircled{19}$$

$$\frac{\textcircled{3} + \textcircled{4}}{2} \cos \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} \{ \cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta) \} \dots \textcircled{20}$$

$$\frac{\textcircled{3} - \textcircled{4}}{2} \sin \alpha \sin \beta = -\frac{1}{2} \{ \cos(\alpha + \beta) - \cos(\alpha - \beta) \} \dots \textcircled{21}$$

$$\begin{aligned} \textcircled{\text{例}} \quad \sin \frac{5}{12} \pi \sin \frac{\pi}{12} &= -\frac{1}{2} \{ \cos(\frac{5}{12} \pi + \frac{\pi}{12}) - \cos(\frac{5}{12} \pi - \frac{\pi}{12}) \} \\ &= -\frac{1}{2} (\cos \frac{\pi}{2} - \cos \frac{\pi}{3}) \\ &= -\frac{1}{2} (-\frac{1}{2}) = \frac{1}{4} // \end{aligned}$$

■ 和積の公式

<前提> $\alpha + \beta = A$ 、 $\alpha - \beta = B$ とすると、

$$\alpha = \frac{A+B}{2}, \quad \beta = \frac{A-B}{2}$$

$$\textcircled{1} + \textcircled{2} \quad \sin A + \sin B = 2 \sin \frac{A+B}{2} \cos \frac{A-B}{2} \dots \textcircled{22}$$

$$\textcircled{1} - \textcircled{2} \quad \sin A - \sin B = 2 \cos \frac{A+B}{2} \sin \frac{A-B}{2} \dots \textcircled{23}$$

$$\textcircled{3} + \textcircled{4} \quad \cos A + \cos B = 2 \cos \frac{A+B}{2} \cos \frac{A-B}{2} \dots \textcircled{24}$$

$$\textcircled{3} - \textcircled{4} \quad \cos A - \cos B = -2 \sin \frac{A+B}{2} \sin \frac{A-B}{2} \dots \textcircled{25}$$

$$\textcircled{\text{例 2}} \quad \cos \frac{5}{12}\pi + \cos \frac{\pi}{12} = 2 \cos \frac{\frac{5}{12}\pi + \frac{\pi}{12}}{2} \cos \frac{\frac{5}{12}\pi - \frac{\pi}{12}}{2}$$

$$= 2 \cos \frac{\pi}{4} \cos \frac{\pi}{6}$$

$$= 2 \times \frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{6}}{2} //$$

<応用編>

0. 基本的な方程式・不等式

① 次の方程式・不等式を、与えられた θ の範囲で解け。

$$(1) \cos\left(\theta - \frac{\pi}{6}\right) = -\frac{1}{2} \quad (-\pi < \theta \leq \pi)$$

$$(2) \sin\left(2\theta + \frac{\pi}{6}\right) \geq \frac{1}{2} \quad (0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2})$$

解) (1) $\cos\left(\theta - \frac{\pi}{6}\right) = -\frac{1}{2}$

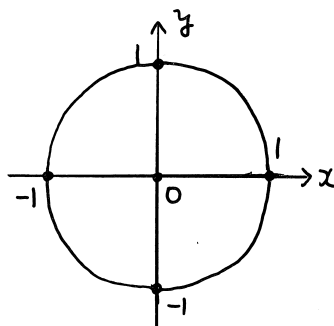
$-\pi < \theta \leq \pi$ なので、 $-\frac{7}{6}\pi < \theta - \frac{\pi}{6} \leq \frac{5}{6}\pi$ で考えて、

$$\theta - \frac{\pi}{6} = -\frac{2}{3}\pi, \frac{2}{3}\pi$$

$$\theta = \frac{\pi}{6} - \frac{2}{3}\pi, \frac{\pi}{6} + \frac{2}{3}\pi$$

$$= \frac{1-4}{6}\pi, \frac{1+4}{6}\pi$$

$$= -\frac{\pi}{2}, \frac{5}{6}\pi //$$



$$(2) \sin\left(2\theta + \frac{\pi}{6}\right) \geq \frac{1}{2}$$

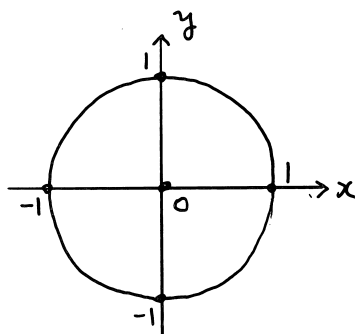
$0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ なので、 $0 \leq 2\theta \leq \pi$ 、つまり

$$\frac{\pi}{6} \leq 2\theta + \frac{\pi}{6} \leq \frac{7}{6}\pi \quad \text{で考えて、}$$

$$\frac{\pi}{6} \leq 2\theta + \frac{\pi}{6} \leq \frac{7}{6}\pi$$

$$\Leftrightarrow 0 \leq 2\theta \leq \frac{2}{3}\pi$$

$$\Leftrightarrow 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{3} //$$



1. 公式のみを用いて解けるもの

⑨ 次の方程式・不等式を、与えられた θ の範囲で解け。

$$(1) \sin \theta \cos \theta = \frac{1}{4} \quad (0 < \theta < \frac{\pi}{2})$$

$$(2) \cos \theta < \sin 2\theta \quad (0 \leq \theta \leq \pi)$$

解) (1) $\sin \theta \cos \theta = \frac{1}{4} \quad (0 < \theta < \frac{\pi}{2})$

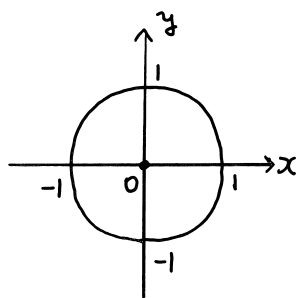
$$\therefore 2\sin \theta \cos \theta = \frac{1}{2}$$

$$\sin 2\theta = \frac{1}{2}$$

$0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ より、 $0 < 2\theta < \pi$ で考えて、

$$2\theta = \frac{\pi}{6}, \frac{5}{6}\pi$$

$$\theta = \frac{\pi}{12}, \frac{5}{12}\pi //$$



(2) $\cos \theta < \sin 2\theta \quad (0 \leq \theta \leq \pi)$

$$\therefore \cos \theta < 2\sin \theta \cos \theta$$

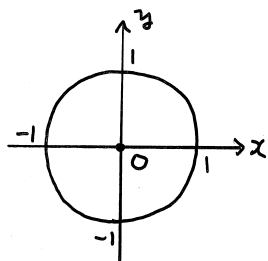
$$\Leftrightarrow 2\sin \theta \cos \theta - \cos \theta > 0$$

$$\Leftrightarrow \cos \theta (2\sin \theta - 1) > 0$$

$\therefore$ 「 $\cos \theta > 0$ かつ $2\sin \theta - 1 < 0$ 」 または

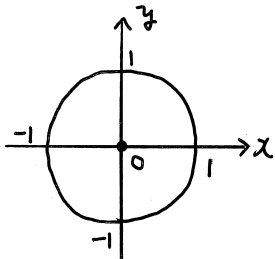
「 $\cos \theta < 0$ かつ $2\sin \theta - 1 > 0$ 」

(i) $\cos \theta > 0$ かつ $\sin \theta > \frac{1}{2}$ のとき、



$$\frac{\pi}{6} < \theta < \frac{\pi}{2}$$

(ii) $\cos \theta < 0$ かつ $\sin \theta < \frac{1}{2}$ のとき、



$$\frac{5}{6}\pi < \theta \leq \pi$$

(i)、(ii)により、 $\frac{\pi}{6} < \theta < \frac{\pi}{2}$ 、 $\frac{5}{6}\pi < \theta \leq \pi$ 、

2. 2次関数・2次方程式・2次不等式 に帰着させるもの
(3) (3) (3)

「方程式・不等式」から。

㉠ 次の方程式・不等式を、与えられた θ の範囲で解け。

$$(1) \cos 2\theta = \sin \theta \quad (0 \leq \theta < 2\pi)$$

$$(2) \frac{1}{3}(1 + \cos 2\theta) \geq 1 - \cos(\frac{\pi}{2} - \theta) \quad (0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2})$$

解) (1) $\cos 2\theta = \sin \theta \quad (0 \leq \theta < 2\pi)$

$$\therefore 1 - 2\sin^2 \theta = \sin \theta$$

$$\Leftrightarrow 2\sin^2 \theta + \sin \theta - 1 = 0$$

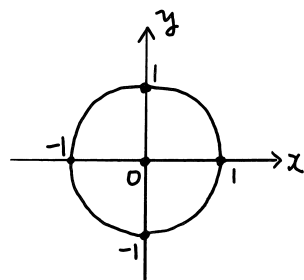
$$\sin \theta = t \text{ とおく、 } (-1 \leq t \leq 1)$$

$$2t^2 + t - 1 = 0$$

$$(2t - 1)(t + 1) = 0$$

$$t = \frac{1}{2}, -1 \quad (-1 \leq t \leq 1 \text{ をみたす})$$

$$\therefore \sin \theta = \frac{1}{2}, -1 \quad \theta = \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}, \frac{3\pi}{2} //$$



$$(2) \frac{1}{3}(1 + \cos 2\theta) \geq 1 - \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) \quad (0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2})$$

$$\therefore 1 + \cos 2\theta \geq 3 - 3\sin\theta$$

$$\Leftrightarrow 1 + (1 - 2\sin^2\theta) \geq 3 - 3\sin\theta$$

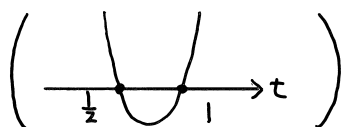
$$\Leftrightarrow 2 - 2\sin^2\theta - 3 + 3\sin\theta \geq 0$$

$$\Leftrightarrow 2\sin^2\theta - 3\sin\theta + 1 \leq 0$$

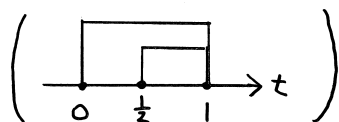
$$\sin\theta = t \text{ とおく } (0 \leq t \leq 1)$$

$$2t^2 - 3t + 1 \leq 0$$

$$(2t-1)(t-1) \leq 0$$

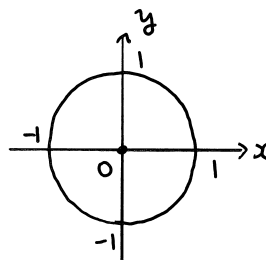
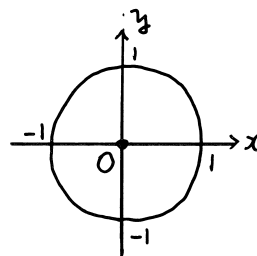


$$\therefore \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \quad (0 \leq t \leq 1 \text{ をみたす})$$



$$\frac{1}{2} \leq \sin\theta \leq 1$$

$$\therefore \frac{\pi}{6} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} //$$

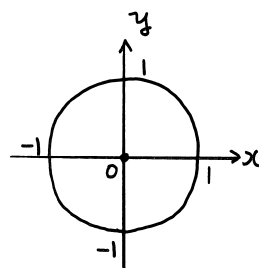


「最大最小」へ。

例1) $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ とする。関数 $y = 2\sin x - \cos 2x$ の
最大値・最小値と、そのときの値を求めよ。

解) $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ において、

$$\begin{aligned} y &= 2\sin x - \cos 2x \\ &= 2\sin x - (1 - 2\sin^2 x) \\ &= 2\sin^2 x + 2\sin x - 1 \end{aligned}$$

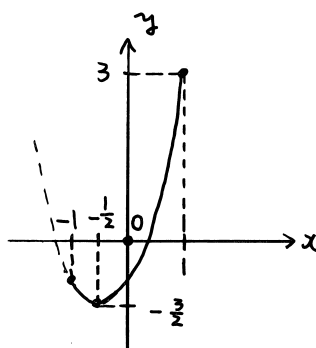


$\sin x = t$ とおく、 $(-1 \leq t \leq 1)$

$$\begin{aligned} y &= 2t^2 + 2t - 1 \\ &= 2\left(t + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{3}{2} \end{aligned}$$

よって、

$$\begin{cases} \text{最大値 } 3 \ (x = \frac{\pi}{2}) \\ \text{最小値 } -\frac{3}{2} \ (x = -\frac{\pi}{6}) \end{cases}$$



例2) $-\frac{\pi}{4} \leq x \leq \frac{\pi}{4}$ において、関数 $y = \sin 3x + \cos 2x + \sin x + 1$
を考える。 $\sin x = t$ とおくとき、
 y の値を最大にする t 、最小にする t の値をそれぞれ
求めよ。

解) $y = \sin 3x + \cos 2x + \sin x + 1$

$$= 3\sin x - 4\sin^3 x + 1 - 2\sin^2 x + \sin x + 1$$

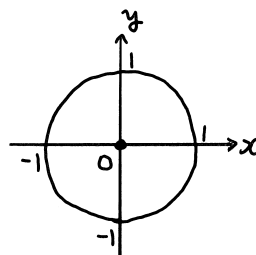
$$= -4\sin^3 x - 2\sin^2 x + 4\sin x + 2$$

$$\sin x = t \text{ とおく、 } (-\frac{1}{\sqrt{2}} \leq t \leq \frac{1}{\sqrt{2}})$$

$$y = -4t^3 - 2t^2 + 4t + 2$$

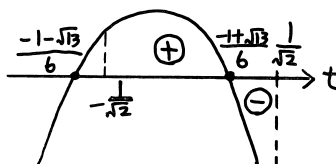
$$y' = -12t^2 - 4t + 4$$

$$= -4(3t^2 + t - 1)$$



$$y' = 0 \text{ のとき、 } t = \frac{-1 \pm \sqrt{13}}{6}$$

t	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\cdots$	$\frac{-1+\sqrt{13}}{6}$	$\cdots$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$
y'		$+$	0	$-$	
y	$1-\sqrt{2}$	$\nearrow$	最大	$\searrow$	$1+\sqrt{2}$



増減表から、 $\begin{cases} \text{最大にする } t \text{ は } \frac{-1+\sqrt{13}}{6} \\ \text{最小にする } t \text{ は } -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases}$ //

「方程式の解の個数」について。

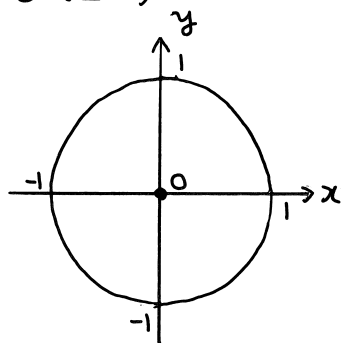
問 次の方程式の解の個数を調べよ。 $(0 \leq \theta < 2\pi)$

(1) $\cos \theta = -\frac{1}{2} \rightsquigarrow \theta = \frac{2}{3}\pi, \frac{4}{3}\pi$ の 2コ

(2) $\sin \theta = -\frac{1}{\sqrt{2}} \rightsquigarrow \theta = \frac{5}{4}\pi, \frac{7}{4}\pi$ の 2コ

(3) $\cos \theta = -1 \rightsquigarrow \theta = \pi$ の 1コ

(4) $\sin \theta = 1 \rightsquigarrow \theta = \frac{\pi}{2}$ の 1コ



まとめ

$$\begin{cases} \sin \theta = a \\ \cos \theta = a \end{cases} \quad (0 \leq \theta < 2\pi) \text{ の解の個数は}$$

$a = \pm 1$ のとき 1コ $-1 < a < 1$ のとき 2コ

例 $0 \leq \theta < 2\pi$ のとき、方程式

$$2\cos 2\theta + 4\cos \theta + 5 - a = 0$$

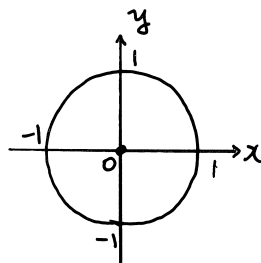
の異なる解の個数を、定数 a の値の範囲によって調べよ。

解) $2\cos 2\theta + 4\cos \theta + 5 - a = 0 \quad (0 \leq \theta < 2\pi)$

$$\Leftrightarrow 4\cos^2 \theta - 2 + 4\cos \theta + 5 - a = 0$$

$$\Leftrightarrow 4\cos^2 \theta + 4\cos \theta + 3 - a = 0$$

$$\Leftrightarrow 4\cos^2 \theta + 4\cos \theta + 3 = a$$



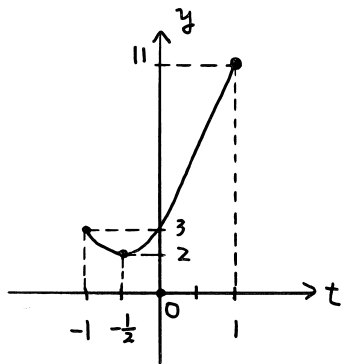
$$\cos \theta = t \text{ とおく、 } (-1 \leq t \leq 1)$$

$$4t^2 + 4t + 3 = 0$$

$$y = 4t^2 + 4t + 3$$

$$= 4\left(t + \frac{1}{2}\right)^2 + 2$$

と $y = a$ のグラフについて。



a の値	t の個数	θ の個数
$a > 11$	0	0
$a = 11$	1	1
$3 < a < 11$	1	2
$a = 3$	2	3
$2 < a < 3$	2	4
$a = 2$	1	2
$a < 2$	0	0

よって、

$$\left\{ \begin{array}{ll} a < 2, 11 < a \text{ のとき、} 0 \text{ 個} \\ a = 11 \text{ のとき、} 1 \text{ 個} \\ a = 2, 3 < a < 11 \text{ のとき、} 2 \text{ 個} \\ a = 3 \text{ のとき、} 3 \text{ 個} \\ 2 < a < 3 \text{ のとき、} 4 \text{ 個} \end{array} \right. //$$

3. $\sin$ と $\cos$ の一次式の和・差 $\Rightarrow$ 「合成」

方程式 & 不等式を練習!

④ 次の方程式・不等式を与えられた x の範囲で解け。

$$(1) \sin x + \cos x = 1 \quad (0 \leq x < 2\pi)$$

$$(2) 1 < \sqrt{3} \sin x - \cos x < \sqrt{2} \quad (0 \leq x \leq \frac{\pi}{2})$$

解) (1) $\sin x + \cos x = 1 \quad (0 \leq x < 2\pi)$

$$\sqrt{2} (\sin x \times \frac{1}{\sqrt{2}} + \cos x \times \frac{1}{\sqrt{2}}) = 1$$

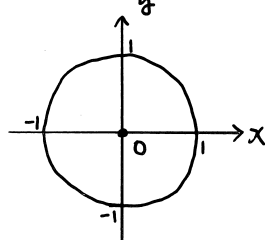
$$\sin x \cos \frac{\pi}{4} + \cos x \sin \frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\sin(x + \frac{\pi}{4}) = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

ここで、 $0 \leq x < 2\pi$ より、 $\frac{\pi}{4} \leq x + \frac{\pi}{4} < \frac{9}{4}\pi$ で考えて、

$$x + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}, \frac{3}{4}\pi$$

$$\therefore x = 0, \frac{\pi}{2} //$$



$$(2) 1 < \sqrt{3} \sin x - \cos x < \sqrt{2} \quad (0 \leq x \leq \frac{\pi}{2})$$

$$\therefore 1 < 2 (\sin x \times \frac{\sqrt{3}}{2} - \cos x \times \frac{1}{2}) < \sqrt{2}$$

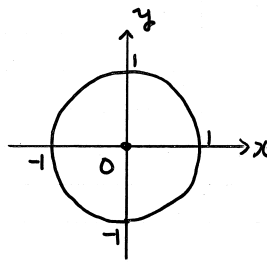
$$\Leftrightarrow 1 < 2 \sin(x - \frac{\pi}{6}) < \sqrt{2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2} < \sin(x - \frac{\pi}{6}) < \frac{\sqrt{2}}{2}$$

ここで、 $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ から、 $-\frac{\pi}{6} \leq x - \frac{\pi}{6} \leq \frac{\pi}{3}$ で考えて、

$$\frac{\pi}{6} < x - \frac{\pi}{6} < \frac{\pi}{4}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\pi}{3} < x < \frac{5}{12}\pi //$$



最大・最小を練習!

④ 例 $0 \leq x \leq \pi$ のとき、次の関数の最大値・最小値を求めよ。

(1) については、そのときの x の値も求めよ。

$$(1) y = \sin x + \sqrt{3} \cos x$$

$$(2) y = \sin x + 3 \cos x$$

解) (1) $0 \leq x \leq \pi$ において、

$$y = \sin x + \sqrt{3} \cos x$$

$$= 2 \left(\sin x \times \frac{1}{2} + \cos x \times \frac{\sqrt{3}}{2} \right)$$

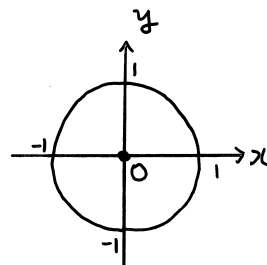
$$= 2 \sin \left(x + \frac{\pi}{3} \right)$$

ここで、 $0 \leq x \leq \pi$ により、 $\frac{\pi}{3} \leq x + \frac{\pi}{3} \leq \frac{4}{3}\pi$

$$\therefore -\frac{\sqrt{3}}{2} \leq \sin \left(x + \frac{\pi}{3} \right) \leq 1$$

$$\Leftrightarrow -\sqrt{3} \leq 2 \sin \left(x + \frac{\pi}{3} \right) \leq 2$$

よって、 $\begin{cases} \text{最大値 } 2 \text{ (そのとき } x = \frac{\pi}{6} \text{)} \\ \text{最小値 } -\sqrt{3} \text{ (そのとき } x = \pi \text{)} \end{cases}$



(2) $0 \leq x \leq \pi$ において、

$$\begin{aligned} y &= \sin x + 3 \cos x \\ &= \sqrt{10} \left(\sin x \times \frac{1}{\sqrt{10}} + \cos x \times \frac{3}{\sqrt{10}} \right) \end{aligned}$$

$$= \sqrt{10} \sin(x+\alpha) \quad \text{ただし、} \begin{cases} \cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{10}} \\ \sin \alpha = \frac{3}{\sqrt{10}} \end{cases}$$

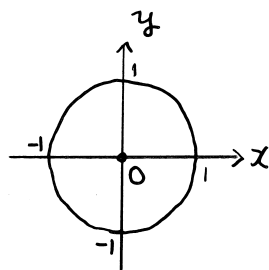
ここで、 $0 \leq x \leq \pi$ により、

$$\alpha \leq x+\alpha \leq \pi+\alpha$$

$$\text{したがって、} -\frac{3}{\sqrt{10}} \leq \sin(x+\alpha) \leq 1$$

$$\Leftrightarrow -3 \leq \sqrt{10} \sin(x+\alpha) \leq \sqrt{10}$$

$$\text{よって、} \begin{cases} \text{最大値 } \sqrt{10} & (\text{そのとき、} x = \frac{\pi}{2} - \alpha) \\ \text{最小値 } -3 & (\text{そのとき、} x = \pi) \end{cases}$$



4. 式の中に $\sin$ と $\cos$ の積があり、それ以外が $\sin$ と $\cos$ の和 (または差) のみ $\Rightarrow$ 和 (または差) を t とおく。

④例 $0 \leq \theta \leq \pi$ のとき、

$$y = 2\sin\theta\cos\theta - 3(\sin\theta + \cos\theta) - 3$$

の最大値・最小値を求める。

解) $\sin\theta + \cos\theta = t$ とおくと、

$$(\sin\theta + \cos\theta)^2 = t^2 \text{ より}$$

$$\sin^2\theta + 2\sin\theta\cos\theta + \cos^2\theta = t^2$$

$$\therefore 1 + 2\sin\theta\cos\theta = t^2 \text{ から、} \sin\theta\cos\theta = \frac{t^2 - 1}{2}$$

したがって、

$$\begin{aligned} y &= 2 \times \frac{t^2 - 1}{2} - 3t - 3 \\ &= t^2 - 3t - 4 \\ &= \left(t - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{25}{4} \end{aligned}$$

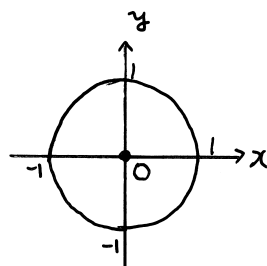
$$\text{ここで、} t = \sin\theta + \cos\theta$$

$$= \sqrt{2} \sin\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right) \text{ について、}$$

$$0 \leq \theta \leq \pi \text{ から、} \frac{\pi}{4} \leq \theta + \frac{\pi}{4} \leq \frac{5\pi}{4}$$

$$\therefore -\frac{1}{\sqrt{2}} \leq \sin\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right) \leq 1$$

$$\Leftrightarrow -1 \leq \sqrt{2} \sin\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right) \leq \sqrt{2}$$

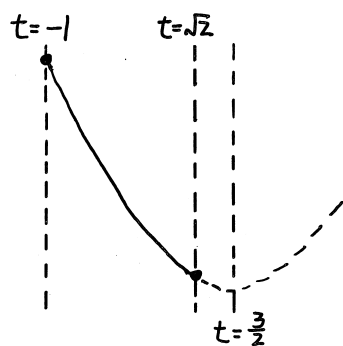


したがって、 $-1 \leq t \leq \sqrt{2}$ における

$$y = (t - \frac{3}{2})^2 - \frac{25}{4}$$

の最大値・最小値を求める。

$$\begin{cases} t = -1 \text{ のとき、最大値 } 0 \\ t = \sqrt{2} \text{ のとき、最小値 } -3\sqrt{2} - 2 \end{cases}$$



5. 式の中に $\sin$ と $\cos$ の積があり、それ以外が
 $\sin$ と $\cos$ の 2 乗または 2 倍角のみ
 $\Rightarrow$ すべて 2 倍角にして合成

① 例 $0 \leq x < \frac{\pi}{2}$ のとき、

$$y = \sin^2 x + 2 \sin x \cos x - \frac{1}{2} \sin 2x$$

の 最大値・最小値 を求めよ。

解) $0 \leq x < \frac{\pi}{2}$ において、

$$y = \sin^2 x + 2 \sin x \cos x - \frac{1}{2} \sin 2x$$

$$= \frac{1}{2} (1 - \cos 2x) + \sin 2x - \frac{1}{2} \sin 2x$$

$$= \frac{1}{2} \sin 2x - \frac{1}{2} \cos 2x + \frac{1}{2}$$

$$= \frac{1}{2} (\sin 2x - \cos 2x) + \frac{1}{2}$$

$$= \frac{1}{2} \times \sqrt{2} \left(\sin 2x \times \frac{1}{\sqrt{2}} - \cos 2x \times \frac{1}{\sqrt{2}} \right) + \frac{1}{2}$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2} \sin \left(2x - \frac{\pi}{4} \right) + \frac{1}{2}$$

ここで、 $0 \leq x < \frac{\pi}{2}$ より、 $0 \leq 2x < \pi$ 、

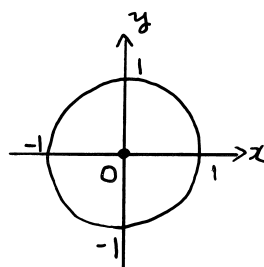
よって、 $-\frac{\pi}{4} \leq 2x - \frac{\pi}{4} < \frac{3}{4}\pi$ では、

$$-\frac{1}{\sqrt{2}} \leq \sin \left(2x - \frac{\pi}{4} \right) \leq 1$$

$$\Leftrightarrow -\frac{1}{2} \leq \frac{\sqrt{2}}{2} \sin \left(2x - \frac{\pi}{4} \right) \leq \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\Leftrightarrow 0 \leq \frac{\sqrt{2}}{2} \sin \left(2x - \frac{\pi}{4} \right) + \frac{1}{2} \leq \frac{\sqrt{2}+1}{2}$$

よって、 $\begin{cases} \text{最大値} & \frac{\sqrt{2}+1}{2} & (\text{そのとき } x = \frac{3}{8}\pi) \\ \text{最小値} & 0 & (\text{そのとき } x = 0) \end{cases}$



6. 積和・和積の公式の左辺の形 $\Rightarrow$ ⑮～㉔を利用

$$\sin\alpha\sin\beta \quad \sin A + \sin B$$

$$\cos\alpha\sin\beta \quad \sin A - \sin B$$

$$\cos\alpha\cos\beta \quad \cos A + \cos B$$

$$\sin\alpha\sin\beta \quad \cos A - \cos B$$

㉓ 次の方程式を解け。

$$\sin x + \sin 3x + \sin 5x = \cos x + \cos 3x + \cos 5x \quad (0 \leq x < 2\pi)$$

解) 与えられた方程式は

$$(\sin 5x + \sin x) + \sin 3x = (\cos 5x + \cos x) + \cos 3x$$

$$\Leftrightarrow 2\sin 3x \cos 2x + \sin 3x = 2\cos 3x \cos 2x + \cos 3x$$

$$\Leftrightarrow \sin 3x (2\cos 2x + 1) = \cos 3x (2\cos 2x + 1)$$

$$\Leftrightarrow \sin 3x (2\cos 2x + 1) - \cos 3x (2\cos 2x + 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow (\sin 3x - \cos 3x)(2\cos 2x + 1) = 0$$

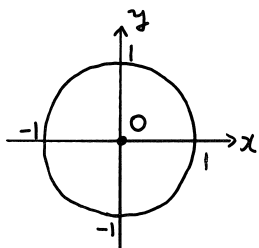
$$\Leftrightarrow \sqrt{2} \sin\left(3x - \frac{\pi}{4}\right)(2\cos 2x + 1) = 0$$

$$\text{よって、(i) } \sin\left(3x - \frac{\pi}{4}\right) = 0 \quad \text{または} \quad \text{(ii) } \cos 2x = -\frac{1}{2}$$

(i) $\sin(3x - \frac{\pi}{4}) = 0$ のとき、

$0 \leq 3x < 6\pi \Leftrightarrow -\frac{\pi}{4} \leq 3x - \frac{\pi}{4} < \frac{23}{4}\pi$ において、

$$3x - \frac{\pi}{4} = 0, \pi, 2\pi, 3\pi, 4\pi, 5\pi$$

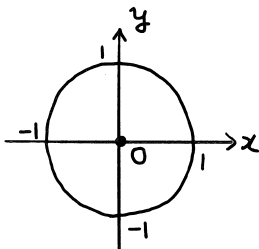


$$\Leftrightarrow 3x = \frac{\pi}{4}, \frac{5}{4}\pi, \frac{9}{4}\pi, \frac{13}{4}\pi, \frac{17}{4}\pi, \frac{21}{4}\pi$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{12}, \frac{5}{12}\pi, \frac{3}{4}\pi, \frac{13}{12}\pi, \frac{17}{12}\pi, \frac{7}{4}\pi$$

(ii) $\cos 2x = -\frac{1}{2}$ のとき、

$0 \leq 2x < 4\pi$ において、



$$2x = \frac{2}{3}\pi, \frac{4}{3}\pi, \frac{8}{3}\pi, \frac{10}{3}\pi$$

$$x = \frac{\pi}{3}, \frac{2}{3}\pi, \frac{4}{3}\pi, \frac{5}{3}\pi$$

(i), (ii) より、

$$x = \frac{\pi}{12}, \frac{\pi}{3}, \frac{5}{12}\pi, \frac{2}{3}\pi, \frac{3}{4}\pi, \frac{13}{12}\pi, \frac{4}{3}\pi, \frac{17}{12}\pi, \frac{5}{3}\pi, \frac{7}{4}\pi,,$$

7. (方程式・不等式の場合) 1. ~ 6. でダダ

=> 再度因数分解に挑戦!

⑦ 次の不等式を解け。

$$2\sin 2x - 2\sqrt{2}\sin x - 2\cos x + \sqrt{2} > 0 \quad (0 \leq x < 2\pi)$$

解) $2\sin 2x - 2\sqrt{2}\sin x - 2\cos x + \sqrt{2} > 0$

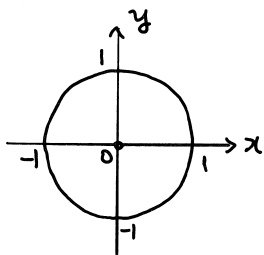
$$\Leftrightarrow 4\sin x \cos x - 2\sqrt{2}\sin x - 2\cos x + \sqrt{2} > 0$$

$$\Leftrightarrow 2\sqrt{2}\sin x(\sqrt{2}\cos x - 1) - \sqrt{2}(\sqrt{2}\cos x - 1) > 0$$

$$\Leftrightarrow (2\sqrt{2}\sin x - \sqrt{2})(\sqrt{2}\cos x - 1) > 0$$

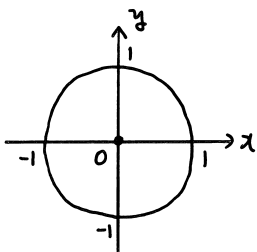
$$\Leftrightarrow \sqrt{2}(2\sin x - 1)(\sqrt{2}\cos x - 1) > 0$$

(i) $\sin x > \frac{1}{2}$ かつ $\cos x > \frac{1}{\sqrt{2}}$ のとき.



$$\frac{\pi}{6} < x < \frac{\pi}{4}$$

(ii) $\sin x < \frac{1}{2}$ かつ $\cos x < \frac{1}{\sqrt{2}}$ のとき.



$$\frac{5\pi}{6} < x < \frac{7\pi}{4}$$

(i), (ii) より, $\frac{\pi}{6} < x < \frac{\pi}{4}$, $\frac{5\pi}{6} < x < \frac{7\pi}{4}$ //