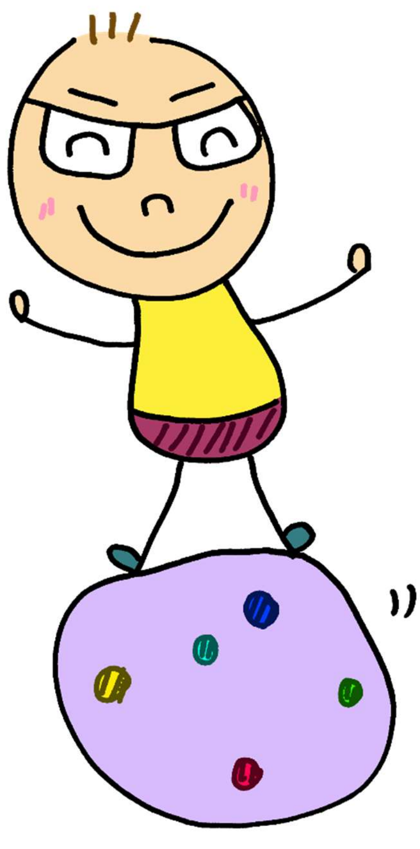
数学Ⅱ

１０　図形と方程式



＜講義ノート＞

<u>図形と方程式</u>

１　点と直線

（１）２点間の距離

（２）内分・外分

（３）直線の方程式

（４）点と直線の距離

（５）平行＆垂直条件

（６）「束」という考え方

＜応用編＞

（三角形の面積）

（対称点）

（３直線）

（２直線を表す方程式）

２　円

（１）円の方程式

（２）束

（３）円と直線
　(i) 位置関係・弦
　(ii) 接線

（４）２円の関係（５パターン）

＜応用編＞

（極線）

（２円の共通接線）

３　軌跡

（手順通り）
＜タイプ１＞いらない文字なし
＜タイプ２＞いらない文字あり
＜タイプ３＞いらない文字を自分で作る

＜タイプ２＞の応用

（図形的性質の利用）

４　領域

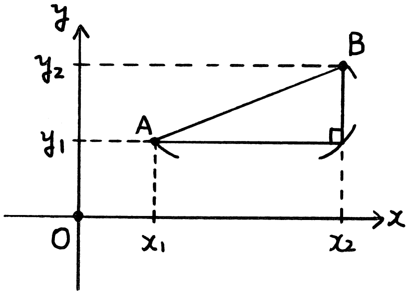
（１）図示

（２）最大・最小

（３）通過領域

1. 点と直線

(1) 2点間のキョリ



$$AB^2 = |x_2 - x_1|^2 + |y_2 - y_1|^2$$
$$= (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$$
$$= (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2$$
$$\therefore AB = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

まとめ

2点A(x_1, y_1)、B(x_2, y_2)のキョリは

$AB = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$

例 2点A(-2, 1)、B(3, 4)から等距離にあるx軸上の点の座標を求めよ。

解）求める点をP(X, 0)とすると、AP = BP

よって、$\sqrt{\{X-(-2)\}^2 + (0-1)^2} = \sqrt{(X-3)^2 + (0-4)^2}$

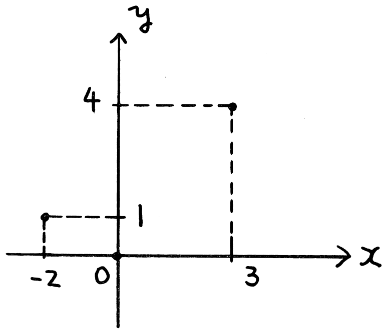
$\Longleftrightarrow (X+2)^2 + 1 = (X-3)^2 + 16$

$\Longleftrightarrow X^2 + 4X + 4 + 1 = X^2 - 6X + 9 + 16$

$\Longleftrightarrow 10X = 20$

$\Longleftrightarrow X = 2$

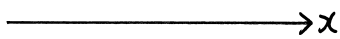
$\therefore$ P(2, 0)〃



(2) 内分・外分

まずは一次元で。

内分



AP：PB = m：n より、

$(x - x_1) : (x_2 - x) = m : n$

$\therefore\ n(x - x_1) = m(x_2 - x)$

$\Longleftrightarrow (m+n)x = mx_2 + nx_1$

$\Longleftrightarrow x = \dfrac{mx_2 + nx_1}{m+n}$

外分

m > n のとき

AQ：QB = m：n より、$(m > n > 0)$

$(x' - x_1) : (x' - x_2) = m : n$

$\therefore\ n(x' - x_1) = m(x' - x_2)$

m < n のとき

AQ：QB = m：n より、$(n > m > 0)$

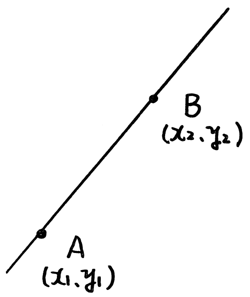
$(x_1 - x') : (x_2 - x') = m : n$

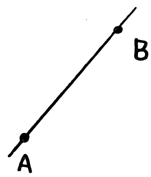
$\therefore\ n(x_1 - x') = m(x_2 - x')$

$(m-n)x' = mx_2 - nx_1$

より、$x' = \dfrac{mx_2 - nx_1}{m-n}$

二次元へ。





まとめ

2点 $A(x_1, y_1)$、$B(x_2, y_2)$ について、
ABを $m:n$ に内分する点をP、
$m:n$ に外分する点をQ、

とすると、

$$P\left(\frac{mx_2+nx_1}{m+n},\ \frac{my_2+ny_1}{m+n}\right)$$

$$Q\left(\frac{mx_2-nx_1}{m-n},\ \frac{my_2-ny_1}{m-n}\right)$$

例1　2点 $A(4, 4)$、$B(-2, -5)$ について、

(1) ABを $1:5$ に内分する点Pの座標を求めよ。

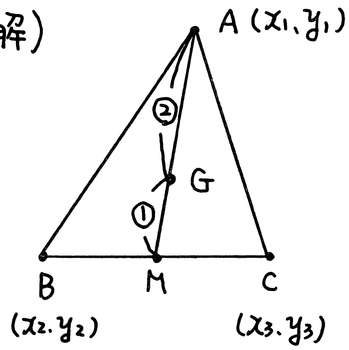
(2) ABを $2:1$ に外分する点Qの座標を求めよ。

解) (1) $P\left(\frac{1\times(-2)+5\times4}{1+5},\ \frac{1\times(-5)+5\times4}{1+5}\right)=\left(3,\ \frac{5}{2}\right)$

(2) $Q\left(\frac{2\times(-2)-1\times4}{2-1},\ \frac{2\times(-5)-1\times4}{2-1}\right)=(-8, -14)$

例2　3点 $A(x_1, y_1)$、$B(x_2, y_2)$、$C(x_3, y_3)$ を頂点とする三角形の重心の座標を求めよ。

解)

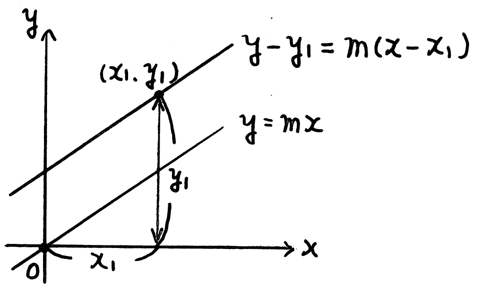


BCの中点をMとすると、
$$M\left(\frac{x_2+x_3}{2},\ \frac{y_2+y_3}{2}\right)$$
重心をGとすると、AMを $2:1$ に内分するので、

$$G\left(\frac{2\times\frac{x_2+x_3}{2}+1\times x_1}{2+1},\ \frac{2\times\frac{y_2+y_3}{2}+1\times y_1}{2+1}\right)$$

$$=\left(\frac{x_1+x_2+x_3}{3},\ \frac{y_1+y_2+y_3}{3}\right)$$

(3) 直線の方程式



$y=f(x)$

↓ $x:=+x_1$, $y:=+y_1$

$y-y_1=f(x-x_1)$

まとめ

点(x_1, y_1)を通り、傾きmの直線の方程式は

$y=m(x-x_1)+y_1$

$x=$ ▨ という直線は表せない

例1 点$(1, 2)$を通り、傾き3の直線の方程式は

$y=3(x-1)+2$

$\quad =3x-1 \rightsquigarrow 3x-y-1=0$

$ax+by+c=0$

どんな直線も表せる

例2 次の3点が同一直線上にあるように、定数aの値を求めよ。

$(-4, -6)$、$(3, 2)$、$(a, -1)$

解) この直線の方程式は

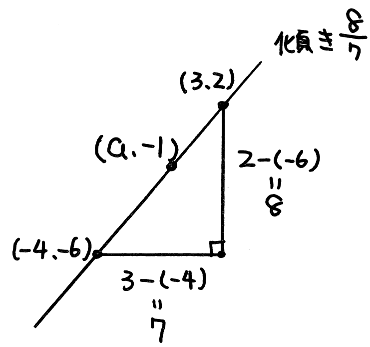
$y=\frac{8}{7}(x-3)+2$

$\quad =\frac{8}{7}x-\frac{10}{7}$

$\therefore 8x-7y-10=0$

これが$(a, -1)$を通るので、

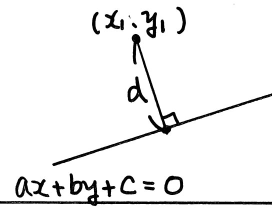
$8a+7-10=0 \quad \therefore a=\frac{3}{8}$ //



(4) 点と直線のキョリ

点 (x_1, y_1) と直線 $ax+by+c=0$ の距離を d とすると、

$$d = \frac{|ax_1+by_1+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$



例) 点 $(1, -2)$ と直線 $3x+4y+10=0$ との距離 d を求めよ。

解) $d = \dfrac{|3\times1+4\times(-2)+10|}{\sqrt{3^2+4^2}}$

$= \dfrac{|5|}{5} = 1$ //

証明

まず、原点Oと直線 l : $ax+by+c=0$ … ①

のキョリを求める。

Oを通り、l に垂直な直線の方程式は

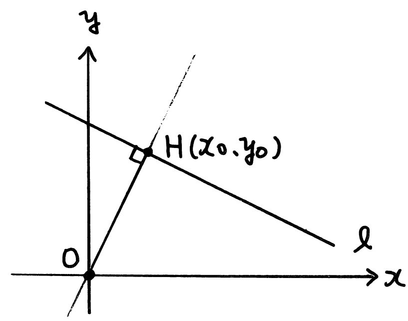
$bx-ay=0$ … ②

①、②の交点を $H(x_0, y_0)$ とすると、

代入して整理すれば、

$$x_0 = -\frac{ac}{a^2+b^2}, \quad y_0 = -\frac{bc}{a^2+b^2}$$

したがって、$OH = \sqrt{x_0^2+y_0^2} = \dfrac{|c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$ … ③



$a_1a_2+b_1b_2=0$

$\begin{cases} a_1x+b_1y+c_1=0 \\ a_2x+b_2y+c_2=0 \end{cases}$ が垂直

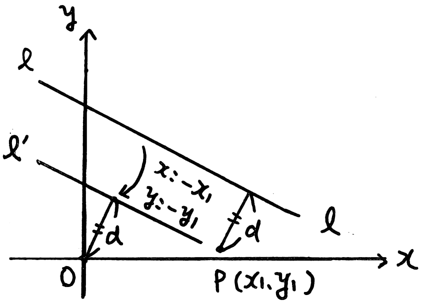
次に点P(x_1、y_1)と直線ℓのキョリdを求める。

点P(x_1、y_1)と直線ℓを、

x軸方向に$-x_1$、y軸方向に$-y_1$、だけ平行移動

すると、Pは原点Oに、直線ℓはそれと平行な直線ℓ'

に移る。



ℓ'の方程式は、

$a(x+x_1)+b(y+y_1)+c=0$

すなわち $ax+by+(ax_1+by_1+c)=0$

dはOとℓ'の距離に等しいので、③より、 $d=\dfrac{|ax_1+by_1+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$

(証明終)$_{//}$

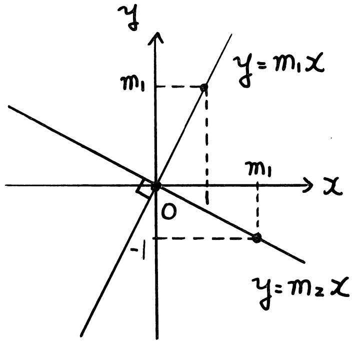
(5) 平行＆垂直条件

基本形

2直線 $\begin{cases} y = m_1 x + n_1 \\ y = m_2 x + n_2 \end{cases}$ について、

これらが 平行 となるのは $m_1 = m_2$ のとき。

垂直となるのは $m_1 m_2 = -1$ のとき。



$y = m_1 x$ と $y = m_2 x$

一般形

2直線 $\begin{cases} a_1 x + b_1 y + c_1 = 0 \\ a_2 x + b_2 y + c_2 = 0 \end{cases}$ について、

$b_1 \neq 0$、$b_2 \neq 0$ のとき、これらを変形すると、

$$\begin{cases} y = -\dfrac{a_1}{b_1} x - \dfrac{c_1}{b_1} \\[2ex] y = -\dfrac{a_2}{b_2} x - \dfrac{c_2}{b_2} \end{cases}$$

よってこれらが平行のとき、$-\dfrac{a_1}{b_1} = -\dfrac{a_2}{b_2}$ $\therefore a_1 b_2 = a_2 b_1$

よって、$a_1 b_2 - a_2 b_1 = 0$

($b_1 = 0$、$b_2 = 0$ もこれをみたす)

垂直のとき、$\left(+\frac{a_1}{b_1}\right)\times\left(+\frac{a_2}{b_2}\right)=-1$

$\therefore$、$a_1a_2=-b_1b_2$　よって、$a_1a_2+b_1b_2=0$

（$b_1=0$、$b_2=0$もこれをみたす）

まとめ

	$y=m_1x+n_1$ $y=m_2x+n_2$	$a_1x+b_1y+c_1=0$ $a_2x+b_2y+c_2=0$
平行	$m_1=m_2$	$a_1b_2-a_2b_1=0$
垂直	$m_1m_2=-1$	$a_1a_2+b_1b_2=0$
一致	$m_1=m_2$ かつ $n_1=n_2$	$a_1:b_1:c_1=a_2:b_2:c_2$

例　$\begin{cases} x-2y+3=0 \\ -3x+6y-9=0 \end{cases}$　が一致。

例′　2直線 $\begin{cases} x-ay-3=0 & \cdots ① \\ x-(2a-3)y+5=0 & \cdots ② \end{cases}$

について、

①と②が平行のとき、$1\times\{-(2a-3)\}-1\times(-a)=0$

$\Longleftrightarrow -2a+3+a=0$

$\Longleftrightarrow a=3$〃

①と②が垂直のとき、$1\times1+(-a)\times\{-(2a-3)\}=0$

$\Longleftrightarrow 2a^2-3a+1=0$

$\Longleftrightarrow (2a-1)(a-1)=0$

$\therefore$、$a=\frac{1}{2}$、1〃

(6) '束' という考え方

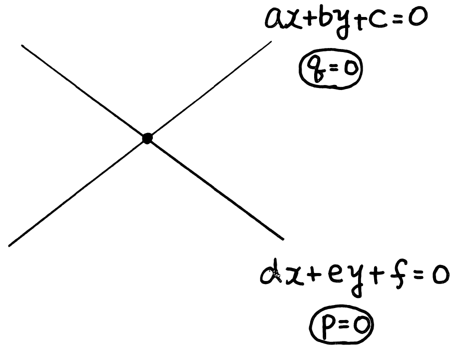
①と②は平行でないとする

2直線 $\begin{cases} ax+by+c=0 & \cdots ① \\ dx+ey+f=0 & \cdots ② \end{cases}$ の交点を (m, n) とする。

ここで、定数 p、q を用いた方程式 $(p^2+q^2 \neq 0)$

$p(ax+by+c)+q(dx+ey+f)=0 \quad \cdots (*)$

は直線を表し、かつ (m, n) を通る。



($q=0$ のとき、$(*)$ は①を表し、
$p=0$ のとき、$(*)$ は②を表す)

$p \neq 0$ とすると、$ax+by+c+\frac{q}{p}(dx+ey+f)=0$

$\frac{q}{p}=k$ において、$ax+by+c+k(dx+ey+f)=0 \quad \cdots (*)'$

(②は除く)

まとめ

$ax+by+c+k(dx+ey+f)=0$ は

2直線 $\begin{cases} ax+by+c=0 & \cdots ① \\ dx+ey+f=0 & \cdots ② \end{cases}$

の交点を通る直線である。(ただし②は表さない)

例) 2直線 $x-y+1=0$ 、$x+2y+4=0$ の交点を通り、

次の条件をみたす直線の方程式を求めよ。

(1) 点 $(3,5)$ を通る。　(2) 直線 $3x-4y-1=0$ に垂直

解) $x-y+1+k(x+2y-4)=0$ … (*) は、

2直線 $x-y+1=0$、$x+2y+4=0$ の交点を通る直線である。

(1) (*) に $(3,5)$ を代入。$3-5+1+k(3+10+4)=0$

$\therefore k=\frac{1}{17}$

(*) に代入。$x-y+1+\frac{1}{17}(x+2y+4)=0$

$\Leftrightarrow 17x-17y+17+x+2y+4=0$

$\Leftrightarrow 18x-15y+21=0$

$\Leftrightarrow 6x-5y+7=0$ //

(2) (*) が $3x-4y-1=0$ に垂直より、

$3(k+1)-4(2k-1)=0$

$\Leftrightarrow -5k+7=0$

$\Leftrightarrow k=\frac{7}{5}$

よって、$\frac{12}{5}x+\frac{9}{5}y+\frac{33}{5}=0$

$\Leftrightarrow 4x+3y+11=0$ //

〈応用編〉 三角形の面積

「点と直線の距離」の公式を利用

例1 3点A(−3、2)、B(−1、5)、C(3、−1)を頂点とする三角形ABCがある。

(1) 直線BCの方程式を求めよ。

(2) 点Aと直線BCとの距離を求めよ。

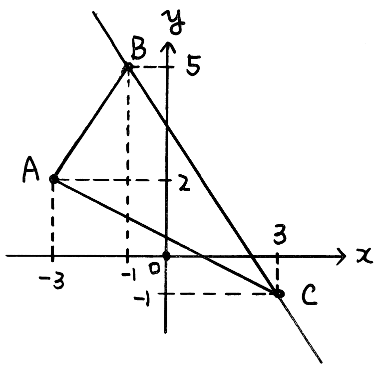
(3) △ABCの面積を求めよ。

解) (1) B(−1、5)、C(3、−1)により、BCの直線の方程式は、

$$y=\frac{-1-5}{3-(-1)}\{x-(-1)\}+5$$

$$=-\frac{3}{2}(x+1)+5$$

$$=-\frac{3}{2}x+\frac{7}{2} \,/\!/$$



(2) 直線BCの方程式は、$2y=-3x+7 \iff 3x+2y-7=0$

これとA(−3、2)との距離をdとすると、

$$d=\frac{|3\times(-3)+2\times2-7|}{\sqrt{3^2+2^2}}=\frac{12}{\sqrt{13}} \,/\!/ \quad \left(=\frac{12\sqrt{13}}{13} \,/\!/\right)$$

(3) 求める面積をSとすると、$S=\frac{1}{2}\times BC\times d$

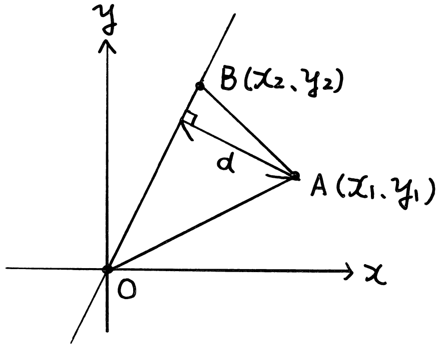
$$=\frac{1}{2}\times\sqrt{\{3-(-1)^2\}+(-1-5)^2}\times\frac{12}{\sqrt{13}}$$

$$=\frac{1}{2}\times2\sqrt{13}\times\frac{12}{\sqrt{13}}$$

$$=12 \,/\!/$$

例2　3点 O$(0, 0)$、A(x_1, y_1)、B(x_2, y_2) を頂点とする三角形OABがある。このとき、△OABの面積Sを求めよ。

解）(i) $x_2 \neq 0$ のとき、



直線OBの方程式は

$y = \frac{y_2}{x_2}x$

$\therefore\ x_2y = y_2y$

$\Longleftrightarrow y_2x - x_2x = 0$

これとA(x_1, y_1)との距離をdとすると、

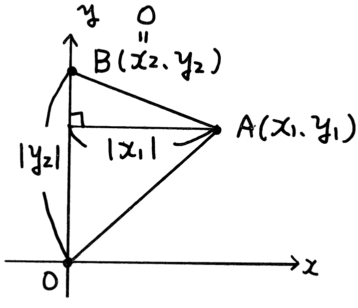
$$d = \frac{|y_2x_1 - x_2y_1|}{\sqrt{y_2^2 + (-x_2)^2}} = \frac{|x_1y_2 - x_2y_1|}{\sqrt{x_2^2 + y_2^2}}$$

よって、$S = \frac{1}{2} \times OB \times d$

$$= \frac{1}{2} \times \sqrt{x_2^2 + y_2^2} \times \frac{|x_1y_2 - x_2y_1|}{\sqrt{x_2^2 + y_2^2}}$$

$$= \frac{1}{2}|x_1y_2 - x_2y_1|$$

(ii) $x_2 = 0$ のとき、



$$S = \frac{1}{2} \times |y_2| \times |x_1|$$

$$= \frac{1}{2}|x_1y_2|$$

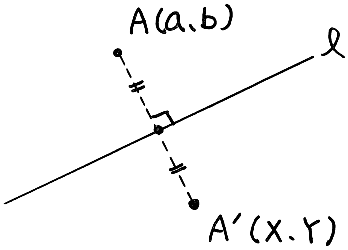
$$= \frac{1}{2}|x_1y_2 - x_2y_1|$$

(i)、(ii)より、$S = \frac{1}{2}|x_1y_2 - x_2y_1|$ //

3点 O$(0, 0)$、A(x_1, y_1)、B(x_2, y_2) を用いてできる △OAB の面積 S は、

$$S = \frac{1}{2}|x_1 y_2 - x_2 y_1|$$

〈応用編〉　対称点



対称点の求め方

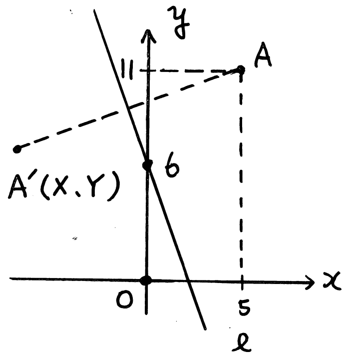
(元の点をAとする)

- 対称点を A′(X、Y) とおく。
- $\begin{cases} \cdot\ AA' \perp \ell \\ \cdot\ AA' \text{の中点が} \ell \text{上} \end{cases}$ を連立。

㊎ 直線 $3x+y-6=0$ に関して、点A (5、11) と対称な点の座標を求めよ

解) $3x+y-6=0 \iff y=-3x+6$ を ℓ とする。

Aの ℓ に関する対称点を A′(X、Y) とすると、



- $AA' \perp \ell$ より、$\dfrac{Y-11}{X-5} \times (-3) = -1$

　$\therefore\ 3(Y-5) = X-5$

　$\iff X-3Y+28=0 \cdots ①$

- AA′の中点 $\left(\dfrac{X+5}{2}、\dfrac{Y+11}{2}\right)$ が

　$\ell: 3x+y-6=0$ 上より、

　$3 \times \dfrac{X+5}{2} + \dfrac{Y+11}{2} - 6 = 0$

　$\iff 3(X+5)+Y+11-12$

　$\iff 3X+Y+14=0 \cdots ②$

① + ② × 3

$$\begin{array}{rrrrl} & X & -3Y & +28 & =0 \\ +) & 9X & +3Y & +42 & =0 \\ \hline & 10X & & +70 & =0 \end{array}$$

$X=-7$

→ ②に代入して、

$-21+Y+14=0$

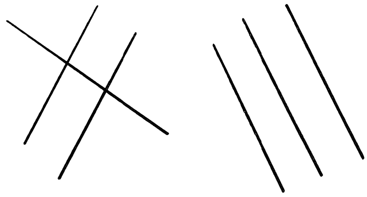
$Y=7$

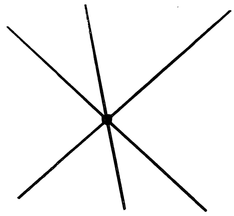
よって、A′(−7、7)〃

〈応用編〉　3直線

3直線が三角形を作らない条件

(i) 少なくとも2本が平行　　　(ii) 1点で交わる





例　3直線 $l_1 : 2x+3y-6=0$、$l_2 : x-y+2=0$、
$l_3 : ax+y+a=0$ が三角形を作らないように、
定数 a の値を定めよ。

解) $\begin{cases} l_1 : 2x+3y-6=0 \\ l_2 : x-y+2=0 \\ l_3 : ax+y+a=0 \end{cases}$

l_1 と l_2 は、$2\times(-1)-1\times3=5\neq0$ により、平行でない。これらが三角形を作らないのは、

$\left\{\begin{array}{l} \text{(i) 少なくとも2本が平行} \\ \qquad\qquad\text{または} \\ \text{(ii) 3本が1点で交わる} \end{array}\right.$

(i) 少なくとも2本が平行

(ア) l_1 と l_3 が平行：$2\times1-a\times3=0$　$\therefore a=\frac{2}{3}$

(イ) l_2 と l_3 が平行：$1\times1-a\times(-1)=0$　$\therefore a=-1$

(ii) 3本が1点で交わる

①－②×2　$5y-10=0$　$\therefore y=2$

②に代入して、$x=0$

よって、l_1とl_2の交点は$(0, 2)$

l_3が$(0, 2)$を通るので、$0+2+a=0$　$\therefore a=-2$

(i)、(ii)から、$a=-2, -1, \frac{2}{3}$ //

〈応用編〉 2直線を表す方程式

例1 方程式 $(2x-y+2)(x+2y-1)=0 \cdots ①$ について、

これは、2直線 $\begin{cases} 2x-y+2=0 \\ x+2y-1=0 \end{cases}$ を表す。

①を変形すると、

$$(2x-y+2)(x+2y-1)=0$$

$$\Leftrightarrow 2x^2+4xy-2x-xy-2y^2+y+2x+4y-2=0$$

$$\Leftrightarrow 2x^2+3xy-2y^2+5y-2=0$$

$$2x^2+3yx-2y^2+5y-2=0$$

$$x=\frac{-3y\pm\sqrt{(3y)^2-4\times2\times(-2y^2+5y-2)}}{4}$$

$$=\frac{-3y\pm\sqrt{25y^2-40y+16}}{4}$$

※

$$=\frac{-3y\pm\sqrt{(5y-4)^2}}{4}$$

$$=\frac{-3y\pm|5y-4|}{4}=\frac{-3y\pm(5y-4)}{4}$$

$$=\frac{-3y+(5y-4)}{4}\text{、}\frac{-3y-(5y-4)}{4}$$

$$=\frac{1}{2}y-1\text{、}-2y+1$$

※ 方程式 $ax^2+bxy+cy^2+dx+ey+f=0 \cdots ①$

が2直線を表すとき、 $(a\neq0、b\neq0、c\neq0)$

①を x の2次方程式とみなし、その判別式を D_x とすると、

y の2次方程式 $D_x=0$ が重解をもつ。 (ただし、D_x の y^2 の係数は正)

その判別式 $D_y=0$ となる。

例2 $3x^2-2xy-y^2+ax+6y-8=0$ が2直線を表す方程式となるように定数aの値を定め、2直線の方程式を求めよ。

解) $3x^2-2xy-y^2+ax+6y-8=0$

$\Leftrightarrow 3x^2-(2y-a)x-y^2+6y-8=0$

①をxの2次方程式とみなし、判別式をD_xとすると、

$D_x=(2y-a)^2-4\times3\times(-y^2+6y-8)$

$\quad=4y^2-4ay+a^2+12y^2-72y+96$

$\quad=16y^2-4(a+18)y+a^2+98$

$D_x=0$ の判別式をD_yとすると、

$\dfrac{D_y}{4}=4(a+18)^2-16(a^2+96)=0$

$\therefore\ (a+18)^2-4(a^2+96)=0$

$\Leftrightarrow a^2+36a+18^2-4a^2-4\times96=0$

$\Leftrightarrow -3a^2+36a+18^2-4\times96=0$

$\Leftrightarrow a^2-12a-6\times18+4\times32=0$

$\Leftrightarrow a^2-12a+20=0$

$\Leftrightarrow (a-2)(a-10)=0 \quad \therefore a=2,10$ //

(i) $a=2$のとき、

①は $3x^2+(-2y+2)x-(y-2)(y-4)=0$

よって、$\{x-(y-2)\}(3x+y-4)=0$

$\Leftrightarrow (x-y+2)(3x+y-4)=0$

$\therefore \begin{cases} x-y+2=0 \\ 3x+y-4=0 \end{cases}$

(ii) $a=10$ のとき、

①は $3x^2+(-2y+10)x-(y-2)(y-4)=0$

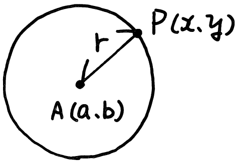
よって、$\{x-(y-4)\}(3x+y-2)=0$

$\Longleftrightarrow (x-y+4)(3x+y-2)=0$

$$\therefore \begin{cases} x-y+4=0 \\ 3x+y-2=0 \end{cases}$$

2. 円

(1) 円の方程式 〈2通りの型〉



$AP^2 = r^2$ より、

$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$

まとめ

中心 A(a、b)、半径 r の円の方程式は

$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$ ← 基本形(標準形)

注 $(x-a)^2+(y-b)^2=k$ について、$k>0$ $\boxed{\text{円の成立条件}}$

例1 中心 (1、2)、半径3の円の方程式は

$(x-1)^2+(y-2)^2=3^2$

$\Longleftrightarrow \underline{x^2+y^2-2x-4y-4=0}$

$x^2+y^2+Ax+By+C=0$ ← 一般形

例 $x^2+y^2+2x-4y+7=0$

$\Longleftrightarrow (x+1)^2-1+(y-2)^2-4+7=0$

$\Longleftrightarrow (x+1)^2+(y-2)^2=-2$ ← 円を表さない!

例2 次の円の方程式を求めよ。

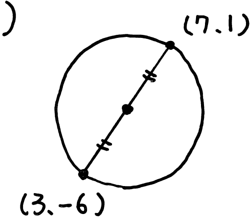
(1) 2点 (7、1)、(3、−6) を直径の両端とする円

(2) 点 (1、2) を通り、x軸および y軸に接する円

(3) 3点 (0、0)、(0、−4)、(3、−3) を通る円

\- - - - - - - - - - - - -

解）(1) 中心 $\left(\frac{7+3}{2},\ \frac{1-6}{2}\right)=\left(5,\ -\frac{5}{2}\right)$



半径 $\frac{1}{2}\sqrt{(7-3)^2+(1+6)^2}$

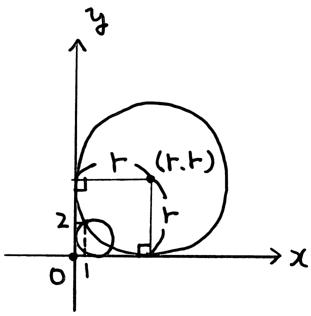
$=\frac{1}{2}\sqrt{65}$

求める円の方程式は $(x-5)^2+\left(y+\frac{5}{2}\right)^2=\frac{65}{4}$

(2) 点 $(1,2)$ が第1象限の点なので、

中心も第1象限にある。半径を $r\ (>0)$

とすると、中心は (r,r) となるから、



求める円の方程式を

$(x-r)^2+(y-r)^2=r^2$

とおくと、$(1,2)$ を代入して、

$(1-r)^2+(2-r)^2=r^2$

$\Longleftrightarrow 1-2r+r^2+4-4r+r^2=r^2$

$\Longleftrightarrow r^2-6r+5=0$

$\Longleftrightarrow (r-1)(r-5)=0$

$\therefore r=1,\ 5$

① に代入して、

$$\begin{cases}(x-1)^2+(y-1)^2=1\\(x-5)^2+(y-5)^2=25\end{cases}$$ //

(3) 求める方程式を $x^2+y^2+Ax+By+C=0$ …① とおく。

①に $(0,0)$ を代入。 $C=0$

①に $(0,-4)$ を代入。 $16-4B=0$ $\therefore B=4$

①に $(3,-3)$ を代入。 $18+3A-3B+C=0$

$\Leftrightarrow 3A+6=0$
$\Leftrightarrow A=-2$

よって、①から、 $x^2+y^2-2x+4y=0$

$\Leftrightarrow (x-1)^2+(y+2)^2=(\sqrt{5})^2$ //

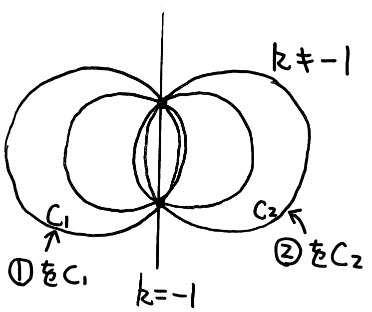
(2) 束

まとめ

$$x^2+y^2+ax+by+c+k(x^2+y^2+dx+ey+f)=0$$

は2つの円 $\begin{cases} x^2+y^2+ax+by+c=0 & \cdots ① \\ x^2+y^2+dx+ey+f=0 & \cdots ② \end{cases}$ の交点を通る。

これは $\begin{cases} k \neq -1 \text{ のとき 円} & \text{(ただし、②は除く)} \\ k=-1 \text{ のとき 直線(共通弦)} & \end{cases}$ を表す。



例 2つの円 $\begin{cases} x^2+y^2-5x-y-6=0 \\ x^2+y^2+x+y-2=0 \end{cases}$ について、

(1) 2円の共通弦を表す直線の方程式を求めよ。

(2) 2円の交点と点 $(1, 1)$ を通る円の方程式を求めよ。

解) $x^2+y^2-5x-y-6+k(x^2+y^2+x+y-2)=0 \cdots (*)$

(k: 実数の定数)

(1) $(*)$ に $k=-1$ を代入。$-5x-y-6-(x+y-2)=0$

$\Leftrightarrow -6x-2y-4=0$

$\Leftrightarrow 3x+y+2=0$ //

(2) (*) が (1, 1) を通るので、

$1+1-5-1-6+k(1+1+1+1-2)=0$

$\therefore$ $2k-10=0$ から、$k=5$

(*) に代入。$x^2+y^2-5x-y-6+5(x^2+y^2+x+y-2)=0$

$\Longleftrightarrow 6x^2+6y^2+4y-16=0$

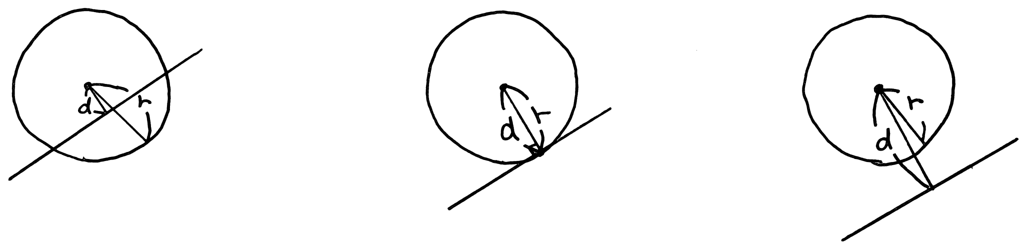
$\Longleftrightarrow x^2+y^2+\frac{2}{3}y-\frac{8}{3}=0$ //

(3) 円と直線

r: 円の半径
d: 中心と直線のキョリ

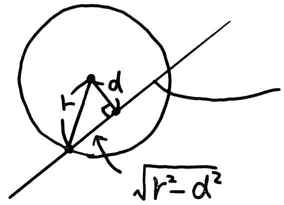
(i) 位置関係・弦

(ア)(異なる)2点で交わる　(イ) 接する　(ウ) 共有点をもたない



$\boxed{d<r}$　$\boxed{d=r}$　$\boxed{d>r}$

特に(ア)のとき



$\dfrac{2\sqrt{r^2-d^2}}{\text{弦の長さ}}$

例　円 $x^2+y^2=4$ と直線 $y=2x+k$ がある。

(1) 円と直線が異なる2点で交わるための k の範囲を求めよ。

(2) k が(1)の条件をみたすとする。直線が円によって切り取られる線分の長さが $2\sqrt{3}$ であるとき、k の値を定めよ。

- - - - - - - - - - - -

解）(1) 円の半径をr、中心と直線の距離をdとすると、

$r=2$であり、dは中心$(0,0)$と直線$2x-y+k=0$

とのキョリだから、

$$d=\frac{|2\times0-0+k|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}=\frac{|k|}{\sqrt5}$$

円と直線が異なる2点で交わるとき、

$$\frac{|k|}{\sqrt5}<2$$

$$\Leftrightarrow |k|<2\sqrt5$$

$$\Leftrightarrow -2\sqrt5<k<2\sqrt5_{\,//}$$

(2) $-2\sqrt5<k<2\sqrt5$のもと、題意より、

$$2\sqrt{2^2-\left(\frac{|k|}{\sqrt5}\right)^2}=2\sqrt3$$

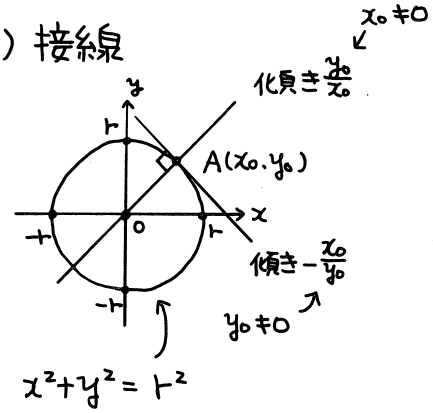
$$\therefore\ 4-\frac{k^2}{5}=3$$

$$\Leftrightarrow \frac{k^2}{5}=1$$

$$\Leftrightarrow k^2=5$$

$\Leftrightarrow k=\pm\sqrt5_{\,//}$ ($-2\sqrt5<k<2\sqrt5$をみたす)

(ii) 接線



円 $x^2+y^2=r^2$ 上の点 $A(x_0, y_0)$ における接線の方程式を求める。

(ア) $x_0 \neq 0$ かつ $y_0 \neq 0$ のとき、

原点を O とするとき、直線 OA の傾きは $\frac{y_0}{x_0}$

よって、$A(x_0, y_0)$ における接線の傾きは $-\frac{x_0}{y_0}$

$A(x_0, y_0)$ における接線の方程式は、

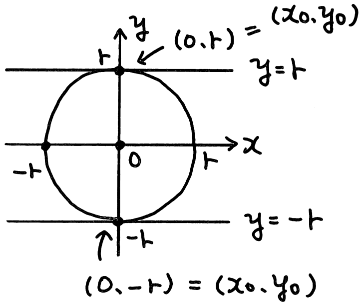
$$y = -\frac{x_0}{y_0}(x - x_0) + y_0$$

$$\therefore\ y_0 y = -x_0(x - x_0) + y_0^2$$

$$= -x_0 x + x_0^2 + y_0^2$$

$$\Leftrightarrow\ x_0 x + y_0 y = x_0^2 + y_0^2 \qquad \therefore\ x_0 x + y_0 y = r^2 \cdots (*)$$

(イ) $x_0 = 0$ のとき、



$(*)$ で $(x_0, y_0) = (0, r)$ とすると、

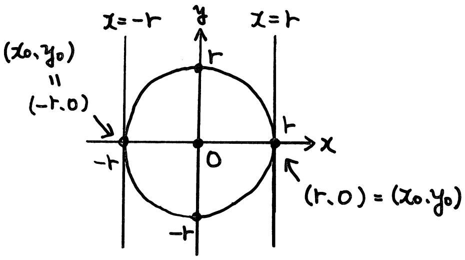
$ry = r^2$ 、$(*)$ は成立。

$(*)$ で $(x_0, y_0) = (0, -r)$ とすると、

$-ry = r^2$ 、$(*)$ は成立。

よって、$x = 0$ のとき $(*)$ は成立。

(ウ) $y_0 = 0$ のとき、



(*) で $(x_0, y_0) = (r, 0)$ とすると、

$rx = r^2$ 、(*) は成立。

(*) で $(x_0, y_0) = (-r, 0)$ とすると、

$-rx = r^2$ 、(*) は成立。

よって、$y_0 = 0$ のとき、(*) は成立。

まとめ

円 $x^2 + y^2 = r^2$ 上の点 (x_0, y_0) における

接線の方程式は、

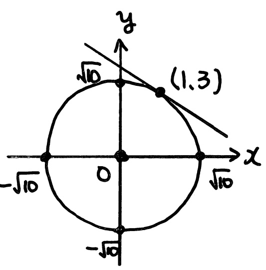
$x_0 x + y_0 y = r^2$

例 円C：$x^2 + y^2 = 10$ について、次の問いに答えよ。

(1) 円周上の点 $(1, 3)$ で円Cに接する直線の方程式を求めよ。

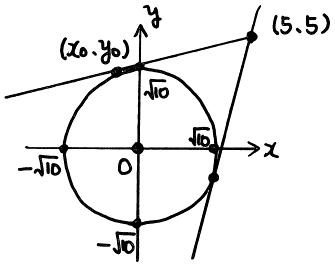
(2) 点 $(5, 5)$ から円Cに引いた2本の接線の方程式を求めよ。

解) (1)



$x + 3y = 10$ //

(2)



(解1) 接点設定

接線を(x_0, y_0)とおくと、$x_0^2 + y_0^2 = 10 \cdots ①$

接線の方程式は $x_0 x + y_0 y = 10 \cdots (*)$

これが$(5, 5)$を通るので $5x_0 + 5y_0 = 10$

$\therefore y_0 = 2 - x_0 \cdots ②$

②を①に代入 $x_0^2 + (2 - x_0)^2 = 10$

$\Leftrightarrow 2x_0^2 - 4x_0 - 6 = 0$

$\Leftrightarrow 2(x_0 + 1)(x_0 - 3) = 0$

$\therefore x_0 = -1, 3$

②から、$y_0 = 3, -1$

(*)に代入して、$\begin{cases} -x + 3y = 10 \\ 3x - y = 10 \end{cases}$ //

(解2) $d = r$

求める直線はy軸に平行とならないので、

$y = m(x - 5) + 5$

つまり、$mx - y - 5m + 5 = 0 \cdots (*)$と表せ、

これが円Cと接するので、

$$\frac{|-5m + 5|}{\sqrt{m^2 + 1}} = \sqrt{10}$$

$|-5m + 5| = \sqrt{10(m^2 + 1)}$

$\Leftrightarrow 25(m - 1)^2 = 10(m^2 + 1)$

$\Leftrightarrow 3m^2 - 10m + 3 = 0$

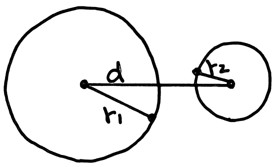
$\Longleftrightarrow (3m-1)(m-3)=0 \quad \therefore m=\frac{1}{3}, 3$

(*)に代入 $\begin{cases} \frac{1}{3}x - y - \frac{5}{3} + 5 = 0 \\ 3x - y - 15 + 5 = 0 \end{cases}$

$\Longleftrightarrow \begin{cases} x - 3y = -10 \\ 3x - y = 10 \end{cases}$ //

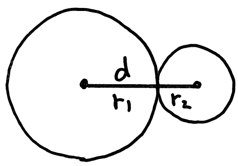
(4) 2円の関係 (5パターン)

(ア) 互いに外にある
(離れている)



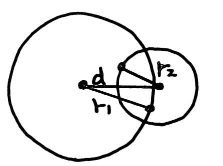
$r_1 + r_2 < d$

(イ) 外接する



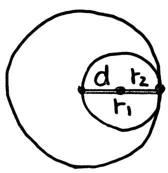
$r_1 + r_2 = d$

(ウ) 2点で交わる



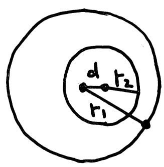
$|r_1 - r_2| < d < r_1 + r_2$

(エ) 内接する



$|r_1 - r_2| = d$

(オ) 一方が他方を含む
(の内部にある)



$|r_1 - r_2| > d$

d：中心間のキョリ

r_1、r_2：円の半径
($r_1 > r_2$)

例) 次の2円の位置関係を調べよ

C_1 : $(x-3)^2 + y^2 = 4$

C_2 : $x^2 + y^2 - 2x + 4y + 4 = 0$

解) C_2 は $(x-1)^2 + (y+2)^2 = 1$

C_1、C_2 の半径をそれぞれ r_1、r_2 とすると、$r_1 = 2$、$r_2 = 1$

また、中心間のキョリを d とすると、$d = \sqrt{(3-1)^2 + (0+2)^2}$

$= 2\sqrt{2}$

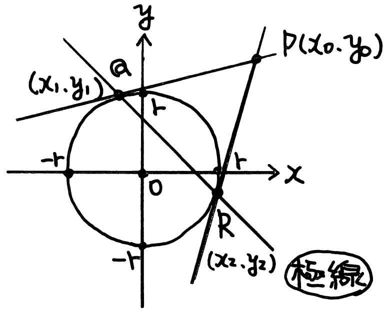
したがって、$r_1 - r_2 < d < r_1 + r_2$ より、2点で交わる〃

〈応用編〉 極線

例 円 $x^2+y^2=r^2$ の外側の点 $P(x_0, y_0)$ からこの円に2接線をひく。この2接点をQ、Rとするとき、直線QRの方程式を求めよ。

解) $Q(x_1, y_1)$、$R(x_2, y_2)$ とすると、

Q、Rにおける接線の方程式は、



それぞれ $\begin{cases} x_1x+y_1y=r^2 \\ x_2x+y_2y=r^2 \end{cases}$

これらはともに $P(x_0, y_0)$ を通るので、

代入して、$\begin{cases} x_0x_1+y_0y_1=r^2 \cdots ① \\ x_0x_2+y_0y_2=r^2 \cdots ② \end{cases}$

よって直線QRの方程式は、

$x_0x+y_0y=r^2$ //

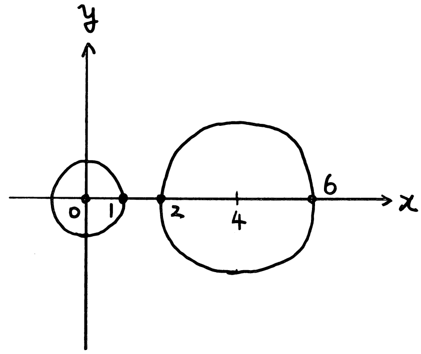
(①、②よりQとRを通る)

〈応用編〉 2円の共通接線

㊄ 2つの円 $x^2+y^2=1$ と $(x-4)^2+y^2=4$ の共通接線の方程式を求めよ。

(解1) 共通接線の方程式を $y=mx+n$、

つまり $mx-y+n=0$ …① とおく。



①と円 $x^2+y^2=1$ が接するので、

$$\frac{|n|}{\sqrt{m^2+(-1)^2}}=1 \quad \therefore n^2=m^2+1 \cdots ②$$

①と円 $(x-4)^2+y^2=2^2$ が接するので、

$$\frac{|4m+n|}{\sqrt{m^2+(-1)^2}}=2 \quad \therefore (4m+n)^2=4(m^2+1) \cdots ③$$

②を③に代入。$(4m+n)^2=4n^2$

$\therefore 4m+n=\pm 2n$

$$\begin{cases} 4m+n=2n \rightarrow n=4m \\ 4m+n=-2n \rightarrow n=-\frac{4}{3}m \end{cases}$$

。$n=4m$ のとき、②より、$(4m)^2=m^2+1$

$\therefore m=\pm\frac{1}{\sqrt{15}}$ で、$n=\pm\frac{4}{\sqrt{15}}$

。$n=-\frac{4}{3}m$ のとき、②より、$(-\frac{4}{3}m)^2=m^2+1$

$\therefore m=\pm\frac{3}{\sqrt{7}}$ で、$n=\mp\frac{4}{\sqrt{7}}$

したがって、共通接線の方程式は、$\begin{cases} y=\pm\frac{\sqrt{15}}{15}x\pm\frac{4\sqrt{15}}{15} \\ y=\pm\frac{3\sqrt{7}}{7}x\mp\frac{4\sqrt{7}}{7} \end{cases}$ (複号同順)〃

(解2) 円 $x^2+y^2=1$ 上の点 (x_0, y_0) について、

$$x_0^2+y_0^2=1 \quad \cdots \text{①}$$

この点における接線の方程式は、

$$x_0x+y_0y=1$$

$$\Longleftrightarrow x_0x+y_0y-1=0$$

これが $(x-4)^2+y^2=2^2$ に接するので、

$$\frac{|4x_0-1|}{\sqrt{x_0^2+y_0^2}}=2 \rightsquigarrow |4x_0-1|=2 \ (\text{①より})$$

$$\therefore 4x_0-1=\pm 2$$

$$\Longleftrightarrow 4x_0=1\pm 2$$

$$=3、-1 \qquad \therefore x_0=\frac{3}{4}、-\frac{1}{4}$$

○ $x_0=\frac{3}{4}$ のとき①より、$y_0^2=\frac{7}{16}$ $\therefore y_0=\pm\frac{\sqrt{7}}{4}$

○ $x_0=-\frac{1}{4}$ のとき①より、$y_0^2=\frac{15}{16}$ $\therefore y_0=\pm\frac{\sqrt{15}}{4}$

②より、接線は

$$\begin{cases} \frac{3}{4}x\pm\frac{\sqrt{7}}{4}y=1 \\ -\frac{1}{4}x\pm\frac{\sqrt{15}}{4}y=1 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} \pm\frac{\sqrt{7}}{4}y=-\frac{3}{4}x+1 \\ \pm\frac{\sqrt{15}}{4}y=\frac{1}{4}x+1 \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} y=\pm\frac{3}{\sqrt{7}}x\mp\frac{4}{\sqrt{7}} \\ y=\mp\frac{1}{\sqrt{15}}x\mp\frac{4}{\sqrt{15}} \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} y=\pm\frac{3\sqrt{7}}{7}x\mp\frac{4\sqrt{7}}{7} \\ y=\pm\frac{\sqrt{15}}{15}x\pm\frac{4\sqrt{15}}{15} \end{cases}$$

(複号同順)//

3. 軌跡

「与えられた条件をみたす点全体の集合」

解き方は、「手順通り」と「図形的性質の利用」

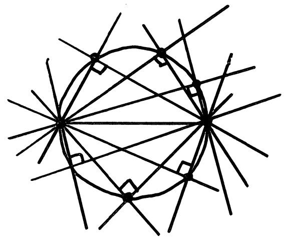
[手順]

① 求める軌跡を(X, Y)とおく。

② いらない文字を消去して、

XとYの関係式を求める。

③ 定義域をチェックする。



出題タイプ

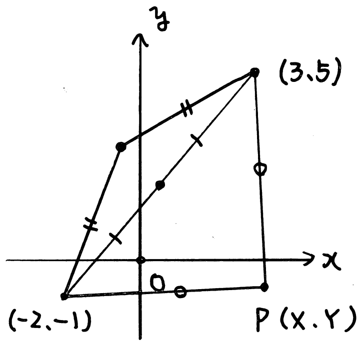
(タイプ1) いらない文字なし

(タイプ2) いらない文字あり

(タイプ3) いらない文字を自分で作る

タイプ1

例1 2点$(-2, -1)$、$(3, 5)$から等距離にある点の軌跡の方程式を求めよ。



解) 求める軌跡を$P(X, Y)$とおく。

$A(-2, -1)$、$B(3, 5)$、とすると、

$AP^2 = BP^2$より、

$$(X+2)^2 + (Y+1)^2 = (X-3)^2 + (Y-5)^2$$

$$\Longleftrightarrow X^2 + 4X + 4 + Y^2 + 2Y + 1 = X^2 - 6X + 9 + Y^2 - 10Y + 25$$

$$\Longleftrightarrow 10X + 12Y - 29 = 0$$

$$\therefore 10x + 12y - 29 = 0$$ //

タイプ1
例2　2点 A(−3、0)、B(2、0)がある。PA：PB＝3：2をみたす点Pの軌跡の方程式を求めよ。

解）$P(X, Y)$とおくと、$PA:PB=3:2$より、

$2PA=3PB$

$\therefore\ 4PA^2=9PB^2$より、

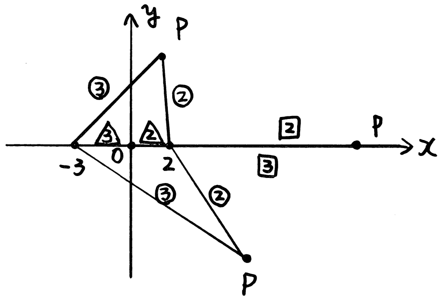
$$4\{(X+3)^2+(Y-0)^2\}=9\{(X-2)^2+(Y-0)^2\}$$

$$\Longleftrightarrow 4(X^2+6X+9+Y^2)=9(X^2-4X+4+Y^2)$$

$$\Longleftrightarrow 5X^2+5Y^2-60X=0$$

$$\Longleftrightarrow X^2+Y^2-12X=0$$

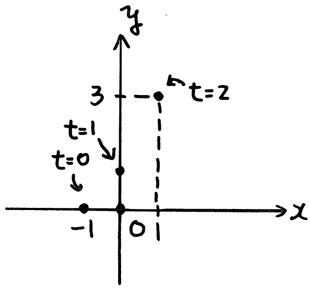
よって、$x^2+y^2-12x=0$ //



タイプ2
例1 実数tを用いて次のように表される点P(x、y)の軌跡の方程式を求めよ。

$x = t-1$、 $y = t^2$ $(0 \leqq t \leqq 2)$

解) $x = t-1 \iff t = x+1$



$\therefore$ $y = (x+1)^2$

ただしここで、$0 \leqq x+1 \leqq 2$ より、

$-1 \leqq x \leqq 1$

よって、$y = (x+1)^2$ の $-1 \leqq x \leqq 1$ の部分。

タイプ2
例2 pが正の値をとっていろいろ変わるとき、放物線 $y = x^2 + px$ の頂点の軌跡を求めよ。

解) $y = x^2 + px$

$= \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 - \frac{p^2}{4}$ 、頂点 $\left(-\frac{p}{2}、-\frac{p^2}{4}\right)$

頂点の軌跡を(X、Y)とすると、

$X = -\frac{p}{2}$ 、$Y = -\frac{p^2}{4}$

よって、$Y = -\frac{(-2X)^2}{4} = -X^2$

ここで、$p = -2X > 0$ より、$X < 0$

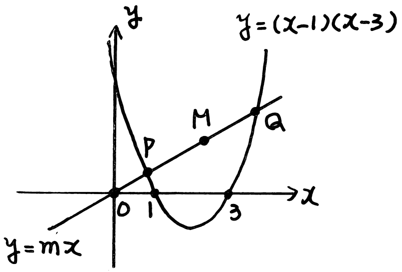
求める軌跡の放程式は、$y = -x^2$ $(x < 0)$ //

タイプ2
例
応用

曲線 $y=x^2-4x+3$ が直線 $y=mx$ と異なる2点 P、Q で交わるとき、PQの中点Mの軌跡を求めよ。

解) $y=x^2-4x+3$

$\quad =(x-1)(x-3)$



代入

$x^2-4x+3=mx$

$\Leftrightarrow x^2-(m+4)x+3=0 \cdots ①$

①の判別式をDとすると、

$D=(m+4)^2-12>0$

$\therefore (m+4)^2>12$

$\Leftrightarrow |m+4|>2\sqrt{3}$

$\Leftrightarrow m+4<-2\sqrt{3}、2\sqrt{3}<m+4$

$\Leftrightarrow m<-4-2\sqrt{3}、2\sqrt{3}-4<m \cdots ②$

$M(X、Y)$ とおく。

ここで、$P(\alpha, m\alpha)$、$Q(\beta, m\beta)$ とすると、α と β は ①の2つの解であることから、解と係数の関係により、

$$\begin{cases} \alpha+\beta=m+4 \\ \alpha\beta=3 \end{cases} \cdots ③$$

$M(X、Y)=\left(\frac{\alpha+\beta}{2}、\frac{m\alpha+m\beta}{2}\right)$

よって、$X=\frac{\alpha+\beta}{2}=\frac{m+4}{2}$ (③より)

$\quad Y=\frac{m(\alpha+\beta)}{2}=\frac{m(m+4)}{2}$

$2X = m + 4 \iff m = 2X - 4$

したがって、$Y = \dfrac{m(m+4)}{2}$

$= \dfrac{(2X-4) \times 2X}{2}$

$= 2X^2 - 4X$

ここで、②より、

$2X < -2\sqrt{3}$、$2\sqrt{3} < 2X$

$\iff X < -\sqrt{3}$、$\sqrt{3} < X$

よって、$y = 2x^2 - 4x$ $(x < -\sqrt{3}$、$\sqrt{3} < x)$ //

タイプ3

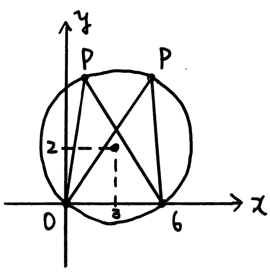
例　原点Oと定点A(6, 0)を通る円

$$x^2+y^2-6x-4y=0$$

の周上を動く点をPとするとき、三角形POAの重心Gの軌跡を求めよ。

解)　$x^2+y^2-6x-4y=0$

$\Longleftrightarrow (x-3)^2+(y-2)^2=13$



G(X, Y)とおく。P(x_0, y_0)とおくと、

$(x_0-3)^2+(y_0-2)^2=13 \cdots ①$

G(X, Y)は△POAの重心だから、

$$(X, Y)=\left(\frac{x_0+0+6}{3}, \frac{y_0+0+0}{3}\right)$$
$$=\left(\frac{x_0+6}{3}, \frac{y_0}{3}\right)$$

$$\therefore \begin{cases} X=\dfrac{x_0+6}{3} \rightsquigarrow x_0=3X-6 \\ Y=\dfrac{y_0}{3} \rightsquigarrow y_0=3Y \end{cases}$$

①に代入　$(3X-6-3)^2+(3Y-2)^2=13$

$\Longleftrightarrow (X-3)^2+\left(Y-\frac{2}{3}\right)^2=\frac{13}{9}$

ただし、$(x_0, y_0) \neq (0, 0), (6, 0)$

から、$(X, Y) \neq (2, 0), (4, 0)$

よって、円：$(x-3)^2+\left(y-\frac{2}{3}\right)^2=\left(\frac{\sqrt{13}}{3}\right)^2$

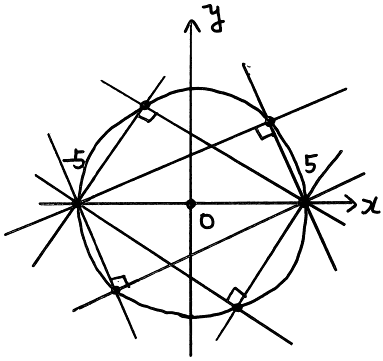
(ただし、2点(2, 0)、(4, 0)を除く)

㊥〈図形的性質の利用〉

mの値が変化するとき、次の2直線の交点Pの軌跡を求めよ。

$$\begin{cases} mx - y + 5m = 0 \\ x + my - 5 = 0 \end{cases}$$

解）①は、$-y + m(x+5) = 0$ なので、



$(-5, 0)$を通る。

②は、$x - 5 + my = 0$ なので、

$(5, 0)$を通る。

また、$m \times 1 + (-1) \times m = 0$より、①と②は垂直。

よって、Pは$(-5, 0)$と$(5, 0)$を直径の両端とする円をえがく。

ここで、①は、$y = m(x+5)$（$x = -5$にはならない）

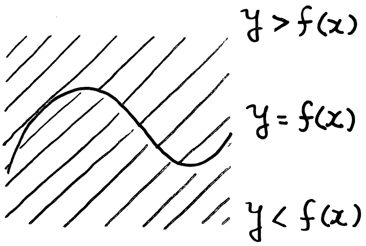
②は、$x = -my + 5$（$y = 0$にはならない）

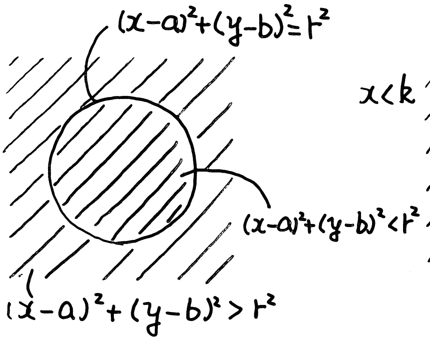
したがって、$(-5, 0)$は除く。

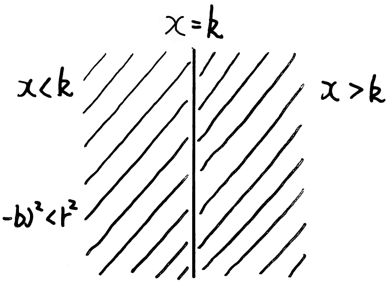
原点中心、半径5の円。ただし、点$(-5, 0)$を除く。//

4．領域

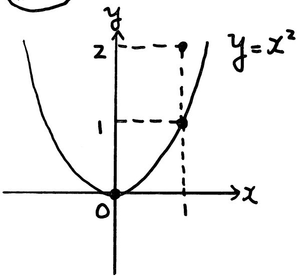
(1) 図示



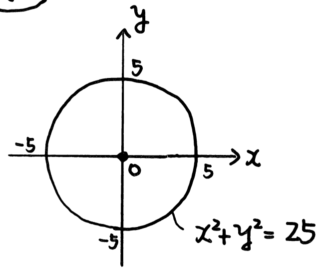




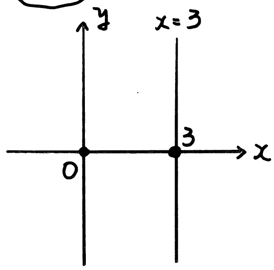
例1



例2



例3

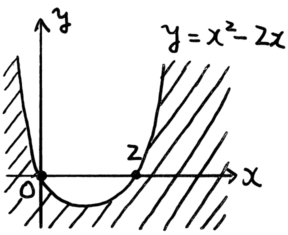


問 次の不等式の表す領域を図示せよ。

(1) $y \leqq x^2-2x$

(2) $(x-y)(x^2+y^2-1)>0$

解) (1) $y \leqq x(x-2)$

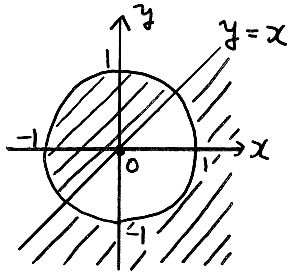


図の斜線部。境界を含む。

(2) $(x-y)(x^2+y^2-1)>0$

$$\begin{cases} \text{(i)}\ x-y>0 \ \text{かつ}\ x^2+y^2-1>0 \\ \qquad\qquad \text{または} \\ \text{(ii)}\ x-y<0 \ \text{かつ}\ x^2+y^2-1<0 \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} \text{(i)}\ y<x \ \text{かつ}\ x^2+y^2>1 \\ \qquad\qquad \text{または} \\ \text{(ii)}\ y>x \ \text{かつ}\ x^2+y^2<1 \end{cases}$$



図の斜線部。境界を含まない。//

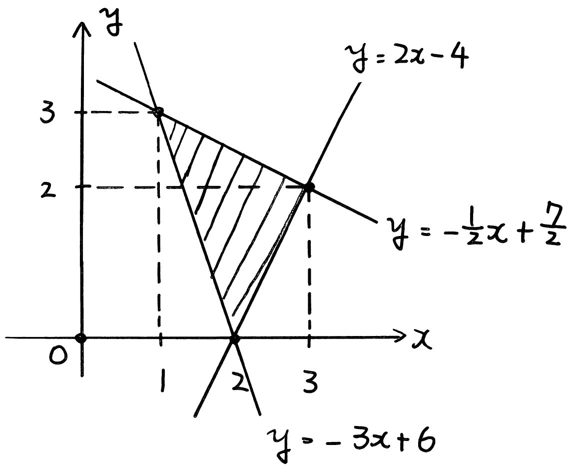
(2) 最大・最小

例　実数 x、y が、$3x+y \geqq 6$、$2x-y \leqq 4$、$x+2y \leqq 7$ を同時にみたすとき、次の問いに答えよ。

(1) $y-x$ のとりうる値の最大値、最小値を求めよ。

(2) x^2+y^2 のとりうる値の最大値、最小値を求めよ。

解) $\begin{cases} 3x+y \geqq 6 \iff y \geqq -3x+6 \\ 2x-y \geqq 4 \iff y \geqq 2x-4 \\ x+2y \leqq 7 \iff y \leqq -\frac{1}{2}x+\frac{7}{2} \end{cases}$



(1) $y-x=k$ とおくと、$y=x+k$

$(x, y)=(1, 3)$ のとき、最大値 $k=3-1=2$〃

$(x, y)=(2, 0)$ のとき、最小値 $k=0-2=-2$〃

(2) $x^2+y^2=r^2\ (r>0)$ とおくと、

$(x, y)=(3, 2)$ のとき、

最大値 $r^2=3^2+2^2=13$〃

一方最小のとき、

直線 $3x+y-6=0$ と円 $x^2+y^2=r^2$ が接する。

$\therefore \dfrac{|-6|}{\sqrt{3^2+1^2}}=\dfrac{6}{\sqrt{10}}=r$

よって最小値

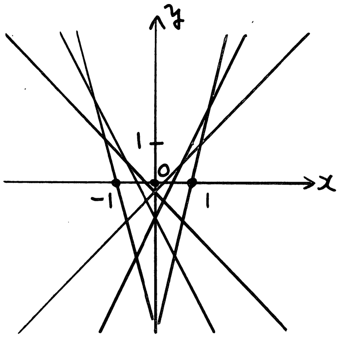
$r^2=\left(\dfrac{6}{\sqrt{10}}\right)^2=\dfrac{18}{5}$〃

(3) 通過領域

例 aを実数の定数とする。

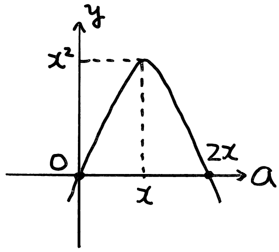
直線 $y=2ax-a^2$ の通過領域を求めよ。

解) (イメージ)



(解1) 順像法

$$y=2ax-a^2$$
$$=-a^2+2xa$$
$$=-(a-x)^2+x^2$$



$\therefore\ y \leqq x^2$

(解2) 逆像法

$$a^2-2xa+y=0$$

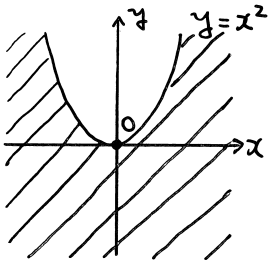
これを a の2次方程式とみなし、

判別式を D_a とすると、

$$\frac{D_a}{4}=x^2-y \geqq 0$$

$\therefore\ y \leqq x^2$

図示すると、



図の斜線部。境界を含む。