数学Ⅱ

09　複素数と方程式

＜講義ノート＞

複素数と方程式

１　複素数

２　２次方程式

（１）解の判別

（２）解と係数の関係

３　高次方程式　　（頻出問題編）

（１）剰余の定理　　＜余りの決定＞

（２）因数定理　　＜解から係数決定＞

（３）解と係数の関係　　＜ωの問題＞

1. 複素数

例1 $x^2-x+1=0$ を解け

解) $x=\dfrac{-(-1)\pm\sqrt{(-1)^2-4\times1\times1}}{2\times1}$

$=\dfrac{1\pm\sqrt{-3}}{2}$

$=\dfrac{1\pm\sqrt{3}\times\sqrt{-1}}{2}$

i ← $\boxed{\text{imaginary number}}$

虚数

$=\dfrac{1\pm\sqrt{3}i}{2}$ //

$\left(=\dfrac{1}{2}\pm\dfrac{\sqrt{3}}{2}i\right)$

まとめ1

i : 虚数単位

$i=\sqrt{-1}$ 、$i^2=-1$

まとめ2

$$\frac{\text{複素数}}{a+bi}\begin{cases}\text{実数} & b=0\\ \text{虚数} & b\neq0\end{cases}$$

まとめ3

$a+bi$ (a, b : 実数)

に対し、$a-bi$ を

「共役複素数」という。

2次方程式 (実係数) の2つの虚数解は「共役」である。

例 $x^2-3x+5=0$

→ $x=\dfrac{3\pm\sqrt{11}i}{2}$

$=\dfrac{3}{2}\pm\dfrac{\sqrt{11}}{2}i$

例2 $(1+i)^3$

$= 1^3 + 3\times 1^2 \times i + 3\times 1 \times i^2 + i^3$

$= 1 + 3i - 3 - i$

$= -2 + 2i$ //

例3 $\dfrac{3-i}{3+i} = \dfrac{(3-i)^2}{(3+i)(3-i)}$

$= \dfrac{3^2 - 6i + i^2}{3^2 - i^2}$

$= \dfrac{8-6i}{10} = \dfrac{4-3i}{5}$ //

例4 実数 a、b に対し、$a + bi = 3 + 4i$ のとき、

$a - 3 + (b-4)i = 0$

右辺が実数なので、左辺も実数。 ∴ $b = 4$ // より $a = 3$ //

まとめ4

実数 a、b、c、d に対し、

$a + bi = c + di \Longleftrightarrow a = c$、かつ $b = d$

例5 $(1+2i)x - (2-i)y = 3$

をみたす実数 x、y の値を求めよ。

解) 与えられた式を変形すると、

$x - 2y + (2x+y)i = 3 + 0i$

x、y は実数なので $\begin{cases} x - 2y = 3 \cdots ① \\ \text{かつ} \\ 2x + y = 0 \cdots ② \end{cases}$

②より、$y = -2x$ を ①に代入。

$x + 4x = 3$

∴ $x = \dfrac{3}{5}$、$y = -\dfrac{6}{5}$ //

2. 2次方程式

(1) 解の判別

〈基本編〉

まとめ

2次方程式 $ax^2+bx+c=0$ の判別式を
$D=b^2-4ac$ とすると、(a、b、c は実数)
($D/4=b'^2-ac$ ($b=2b'$として))

この2次方程式は、

$D>0$ のとき、「異なる2つの実数解をもつ」
$D=0$ のとき、「(実数の)重解をもつ」
$D<0$ のとき、「異なる2つの虚数解をもつ」

例1 $x^2+(1-a)x+a-1=0$ が虚数解をもつような実数 a の値の範囲を求めよ

解) $x^2+(1-a)x+a-1=0$ の判別式を D とおくと、

$D=(1-a)^2-4\times1\times(a-1)<0$

よって、$(a-1)^2-4(a-1)<0$

$\Leftrightarrow (a-1)\{(a-1)-4\}<0$

$\Leftrightarrow (a-1)(a-5)<0$　$\therefore 1<a<5$ //

(例2) aを実数とする。2次方程式 $x^2+(a+i)x-(4+ai)=0$ が実数解をもつような a の値を求めよ。(i：虚数単位)

解) $\boxed{\text{よくやるミス}}$ $x^2+(a+i)x-(4+ai)=0$ の判別式を D とすると、

$$D=(a+i)^2+4(4+ai)\geqq 0$$

以下ちゃんとしたもの

実数解を α とすると、代入して、$\alpha^2+(a+i)\alpha-(4+ai)=0$

$\therefore$、$\alpha^2+a\alpha-4+(\alpha-a)i=0$

α、a は実数なので、

$$\begin{cases} \alpha^2+a\alpha-4=0 \cdots ① \\ \text{かつ} \\ \alpha=a \cdots ② \end{cases}$$

②を①に代入、$\alpha^2+\alpha^2-4=0$

$\alpha^2=2$ から、$\alpha=\pm\sqrt{2}$

②より、$a=\pm\sqrt{2}$ //

〈応用編〉対称式の置き換え

例 実数 x、y は $4x^2+4y^2+7xy+x+y-1=0$ を満たしているとする。このとき、$u=x+y$ および $v=xy$ のとり得る値の範囲を求めよう。

(1) u のとりうる値の範囲は $\boxed{}$ である。

(2) v を u で表すと、$v=$ $\boxed{}$ であるから、

v のとりうる値の範囲は $\boxed{}$ である。

解) $4x^2+4y^2+7xy+x+y-1=0$ について、

$$4\{(x+y)^2-2xy\}+7xy+x+y-1=0$$

$x+y=u$、$xy=v$ とおくと、※

$$4(u^2-2v)+7v+u-1=0$$

$$\iff v=4u^2+u-1 \quad \cdots ①$$

(1) ※ x と y を解にもつ2次方程式は、

$$(t-x)(t-y)=0$$

$$\iff t^2-(x+y)t+xy=0$$

$$\iff t^2-ut+v=0$$

判別式を D とすると、

$$D=u^2-4v\geqq 0 \quad \cdots ②$$

①を②に代入して、$u^2-4(4u^2+u-1)\geqq 0$

$\therefore\ -15u^2-4u+4\geqq 0$

$\Longleftrightarrow\ 15u^2+4u-4\geqq 0$

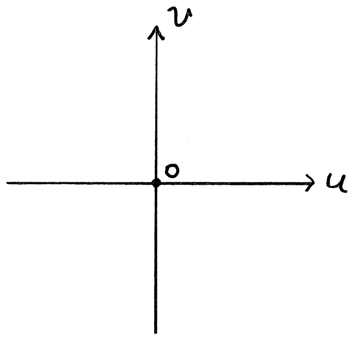
$\Longleftrightarrow\ (3u+2)(5u-2)\leqq 0$

$\Longleftrightarrow\ -\frac{2}{3}\leqq u\leqq\frac{2}{5}$ //

(2) (1)の結果より、$-\frac{2}{3}\leqq u\leqq\frac{2}{5}$ のもと、

$v=4u^2+u-1$ …①

したがって、$v=4\left(u+\frac{1}{8}\right)^2-\frac{17}{16}$



$\frac{2}{5}-\left(-\frac{1}{8}\right)=\frac{21}{40}=\frac{63}{120}$

$\wedge$

$-\frac{1}{8}-\left(-\frac{2}{3}\right)=\frac{13}{24}=\frac{65}{120}$

グラフより、$-\frac{17}{16}\leqq v\leqq\frac{1}{9}$ //

(2) 解と係数の関係 〈2つ〉

(i) 基本

2次方程式 $ax^2+bx+c=0$ …① について、
2つの解を α、β とすると、

① は $a(x-\alpha)(x-\beta)=0$ と表せる。変形すると、

$a\{x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta\}=0$

$\Leftrightarrow ax^2-a(\alpha+\beta)x+a\alpha\beta=0$ …②

① と ② は一致するので、

$b=-a(\alpha+\beta)$ 、 $c=a\alpha\beta$

$a\neq 0$ なので、$\alpha+\beta=-\dfrac{b}{a}$ 、$\alpha\beta=\dfrac{c}{a}$

[解と係数の関係]

2次方程式 $ax^2+bx+c=0$ の2つの解を α、β とすると、

$\alpha+\beta=-\dfrac{b}{a}$ 、 $\alpha\beta=\dfrac{c}{a}$

例 2次方程式 $x^2-2x+3=0$ の2つの解を α、β とする。このとき、$\dfrac{1}{\alpha}+\dfrac{1}{\beta}$ 、$\alpha^3+\beta^3$ の値を求めよ。

解）解と係数の関係より、

$$\alpha+\beta=-\frac{-2}{1}=2 \qquad \alpha\beta=\frac{3}{1}=3$$

よって、$\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}=\frac{\beta+\alpha}{\alpha\beta}$

$=\frac{2}{3}$ //

$$\begin{aligned}\alpha^3+\beta^3&=(\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta)\\&=2^3-3\times3\times2\\&=8-18\\&=-10\end{aligned}$$ //

(ii) 2次方程式を作る

αとβを解にもつ2次方程式は

$(x-\alpha)(x-\beta)=0$

$\Longleftrightarrow \ x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta=0$

まとめ

αとβを解にもつ2次方程式は

$$x^2-\underbrace{(\alpha+\beta)}_{\text{解の和}}x+\underbrace{\alpha\beta}_{\text{解の積}}=0$$

例1 2と5を解にもつ2次方程式は

$x^2-7x+10=0$

例2 $2x^2+3x+2=0$の2つの解をα、βとするとき、

$1-\frac{1}{\alpha}$、$1-\frac{1}{\beta}$を2つの解とする2次方程式を作れ。

解) $2x^2+3x+2=0$について、

解と係数の関係により、

$\alpha+\beta=-\frac{3}{2}$、$\alpha\beta=1$ …①

ここで、

$$\left(1-\frac{1}{\alpha}\right)+\left(1-\frac{1}{\beta}\right)=2-\left(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}\right)$$

$$=2-\frac{\beta+\alpha}{\alpha\beta}$$

$$=2-\left(-\frac{3}{2}\right)=\frac{7}{2}$$ (①より)

$$\left(1-\frac{1}{\alpha}\right)\left(1-\frac{1}{\beta}\right) = 1-\left(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}\right)-\frac{1}{\alpha\beta}$$

$$= 1 + \frac{3}{2} + 1 = \frac{7}{2} \text{（①より）}$$

よって、$x^2 - \frac{7}{2}x + \frac{7}{2} = 0$

$\therefore$ $2x^2 - 7x + 7 = 0$ //

3. 高次方程式

(1) 剰余の定理

xの整式$f(x)$を$x-\alpha$でわった余りをR(定数)とすると、

$f(x) = (x-\alpha)\times P(x) + R$ より、$f(\alpha) = R$

例1 整式 $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - ax + 1$ を $x-1$ でわったときの余りが 3 となるような、定数 a の値を求めよ。

解) 題意より、$f(1) = 3$ …①

また、$f(1) = 2\times1^3 + 3\times1^2 - a\times1 + 1$

$= 6 - a = 3$ (①より)

$\therefore a = 3$ //

例2 xの整式 $P(x) = x^3 + ax^2 + bx + 2$ が $x-1$ で割り切れて、$x+2$ で割ると余りが -12 となるように、定数 a と b の値を求めよ。

解) 題意より、$\begin{cases} P(1) = 0 & \cdots ① \\ P(-2) = -12 & \cdots ② \end{cases}$

①より、$P(1) = 1 + a + b + 2 = 0$

$\therefore a + b + 3 = 0$ …①'

②より、$P(-2) = -8 + 4a - 2b + 2 = -12$

$\therefore 2a - b + 3 = 0$ …②'

①'+②' $3a + 6 = 0$ $\therefore a = -2$、$b = -1$ //

(2) 因数定理

> 整式 $f(x)$ について、
> $\boxed{f(\alpha)=0 \iff f(x) \text{ は } x-\alpha \text{ を因数にもつ}}$

例 因数定理を用いて、次の式を因数分解せよ。

(1) x^3-2x-4

(2) $4x^3+12x^2-x-3$

---

(1) $f(x)=x^3-2x-4$ とおく。

$f(2)=8-4-4=0$ よって $f(x)$ は $x-2$ を因数にもつ。

$$
\begin{array}{r|l}
 & x^2+2x+2 \\
\hline
x-2 & x^3 \qquad\;\; -2x-4 \\
 & x^3-2x^2 \\
\hline
 & \quad 2x^2-2x-4 \\
 & \quad 2x^2-4x \\
\hline
 & \qquad\quad 2x-4 \\
 & \qquad\quad 2x-4 \\
\hline
 & \qquad\qquad\;\; 0
\end{array}
$$

組立除法

2	1	0	−2	−4

$f(x)=(x-2)(x^2+2x+2)$ //

問 $x^3-2x-4=0$ を解け

解) $(x-2)(x^2+2x+2)=0$

$x=2,\ -1\pm i$ //

(2) $f(x)=4x^3+12x^2-x-3$ とおく。

$f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}+3-\frac{1}{2}-3=0$ より、

$f(x)$ は $x-\frac{1}{2}$ を因数にもち、

$f(\alpha)=0$ となる α は

$\pm\dfrac{(\text{定数項の約数})}{(\text{最高次の係数の約数})}$

から探す!（整数係数のとき）

$f(x)=\left(x-\frac{1}{2}\right)(4x^2+14x+6)$

$=(2x-1)(2x^2+7x+3)$

$=(2x-1)(2x+1)(x+3)$〃

問 $4x^3+12x^2-x-3=0$ を解け

解）$(2x-1)(2x+1)(x+3)=0$ より、

$x=\pm\frac{1}{2}$、-3〃

整数係数の3次方程式 $ax^3+bx^2+cx+d=0$ が有理数の解をもてば、それは $\pm\dfrac{(d\text{の約数})}{(a\text{の約数})}$ の形であることを示せ。

証明

3次方程式 $ax^3+bx^2+cx+d=0$ の

有理数解を $x=\frac{q}{p}$ (p、q は互いに素な整数)

とおき、代入すると、

$a\left(\frac{q}{p}\right)^3+b\left(\frac{q}{p}\right)^2+c\times\frac{q}{p}+d=0$

$\Longleftrightarrow aq^3+bpq^2+cp^2q+dp^3=0 \quad \cdots ①$

① は $aq^3=-bpq^2-cp^2q-dp^3$

$\qquad\qquad = p(-bq^2-cpq-dp^2)$

ここで、p と q は互いに素なので、

p と q^3 も互いに素。よって、p は a の約数。

① は $dp^3=-aq^3-bpq^2-cp^2q$

$\qquad\qquad = q(-aq^2-bpq-cp^2)$

ここで、p と q は互いに素なので、

p^3 と q も互いに素。よって、q は d の約数。

以上より、有理数解 $x=\frac{q}{p}$ は

$\pm\dfrac{(d\text{の約数})}{(a\text{の約数})}$ の形である。(証明終)

(3) 解と係数の関係

3次方程式

3次方程式 $ax^3+bx^2+cx+d=0$ …①

の3つの解を α、β、γ とすると、

①は $a(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)=0$ と表せる。

つまり、$a\{x^3-(\alpha+\beta+\gamma)x^2+(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)x-\alpha\beta\gamma\}=0$

$\Longleftrightarrow$ $ax^3-a(\alpha+\beta+\gamma)x^2+a(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)-a\alpha\beta\gamma=0$ …②

①と②は一致するので
$$\begin{cases} b=-a(\alpha+\beta+\gamma) \\ c=a(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha) \\ d=-a\alpha\beta\gamma \end{cases}$$

$$\begin{cases} \alpha+\beta+\gamma=-\dfrac{b}{a} \\ \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=\dfrac{c}{a} \\ \alpha\beta\gamma=-\dfrac{d}{a} \end{cases}$$

3次方程式 $ax^3+bx^2+cx+d=0$ の

3つの解を α、β、γ とすると、
$$\begin{cases} \alpha+\beta+\gamma=-\dfrac{b}{a} \\ \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=\dfrac{c}{a} \\ \alpha\beta\gamma=-\dfrac{d}{a} \end{cases}$$

㊩ 方程式 $x^3+2x-3=0$ の3つの解を α、β、γ とするとき、次の値を求めよ。

(1) $(\alpha-\beta)^2+(\beta-\gamma)^2+(\gamma-\alpha)^2$

(2) $\alpha^3+\beta^3+\gamma^3$

解) 解と係数の関係により、

$$\begin{cases} \alpha+\beta+\gamma=0 \\ \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=2 \quad \cdots ① \\ \alpha\beta\gamma=3 \end{cases}$$

(1) $(\alpha-\beta)^2+(\beta-\gamma)^2+(\gamma-\alpha)^2$

$= \alpha^2-2\alpha\beta+\beta^2+\beta^2-2\beta\gamma+\gamma^2+\gamma^2-2\gamma\alpha+\alpha^2$

$= 2(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)-2(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)$

$= 2\{(\alpha+\beta+\gamma)^2-2(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)\}-2(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)$

$= 2(0^2-2\times2)-2\times2$ (①より)

$= -12$ //

(2) $\alpha^3+\beta^3+\gamma^3$

$= (\alpha+\beta+\gamma)(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2-\alpha\beta-\beta\gamma-\gamma\alpha)+3\alpha\beta\gamma$

$= 9$ // (①より)

〈余りの決定〉

例1 整式 $f(x)$ を $x-1$ でわると、余りは5、$x-2$ でわると余りは7となる。このとき、$f(x)$ を x^2-3x+2 でわった余りを求めよ。

解) 剰余の定理から、$\begin{cases} f(1)=5 \cdots ① \\ f(2)=7 \cdots ② \end{cases}$

$f(x)=(x^2-3x+2)\times P(x)+ax+b$ とすると、($P(x)$: 整式、aとb: 実定数)

$f(x)=(x-1)(x-2)\times P(x)+ax+b$

①より、$f(1)=a+b=5 \cdots ①'$

②より、$f(2)=2a+b=7 \cdots ②'$

②$'$ − ①$'$ $a=2$

①$'$から $b=3$

よって余りは $2x+3$ //

例2 整式$P(x)$をx^2+1でわると、$-5x-10$余り、$x-2$でわると-5余る。このとき、$P(x)$を$(x^2+1)(x-2)$でわった余りを求めよ。

やや難

解) 題意より、$\begin{cases} P(x)=(x^2+1)\times Q(x)-5x-10 \ (Q(x):\text{整式}) \cdots ① \\ P(2)=-5 \cdots ② \end{cases}$

このとき、$\left(P(x)=(x^2+1)(x-2)\times g(x)\boxed{+ax^2+bx+c} \text{ とおくと、} \right)$

$P(x)=(x^2+1)(x-2)\times g(x)+a(x^2+1)-5x-10$ とおくと、

$\left(\begin{array}{l} g(x):\text{整式} \\ a:\text{実定数} \end{array} \right)$

②より、$P(2)=a\times 5-20=-5$ $\therefore a=3$

よって余りは、$3(x^2+1)-5x-10=3x^2-5x-7$〃

〈解から係数決定〉 最重要

例 3次方程式 $x^3+px^2+qx+5=0$（p、qは実数）が $1+2i$ を解に持つとき、p、qの値および他の2つの解を求めよ。 $\boxed{\text{3つの解法}}$

（解1） $x^3+px^2+qx+5=0$ …① が

$1+2i$ を解にもつので、代入して、

$(1+2i)^3+p(1+2i)^2+q(1+2i)+5=0$

$\Leftrightarrow 1^3+3\times1^2\times2i+3\times1\times(2i)^2+(2i)^3+p(1+4i+4i^2)+q+2qi+5=0$

$\Leftrightarrow 1+6i-12-8i+p(-3+4i)+q+5+2qi=0$

$\Leftrightarrow -6-3p+q+(-2+4p+2q)i=0$

p、qは実数なので、$\begin{cases} -6-3p+q=0 & \cdots② \\ -2+4p+2q=0 & \cdots③ \end{cases}$

$-1+2p+q=0 \quad \cdots③'$

③′−②　$5+5p=0$　$\therefore p=-1$〃

③′に代入して、$-1-2+q=0$　$\therefore q=3$〃

したがって①は、

$x^3-x^2+3x+5=0$

$f(x)=x^3-x^2+3x+5$ とおくと、

$f(-1)=0$ より、$x+1$ を因数にもち、

$f(x)=(x+1)(x^2-2x+5)$

$\therefore x=-1、1\pm2i$

したがって他の解は、-1〃 と $1-2i$〃

(解2) $x^3+px^2+qx+5=0$ …①

①は実係数なので、$1+2i$を解にもつならば、

その共役複素数 $1-2i$ も解にもつ。

$1+2i$ と $1-2i$ を解にもつ2次方程式は、

$x^2-2x+5=0$

[解法その1]

$$
\begin{array}{r}
x+(p+2) \\
x^2-2x+5 \,\big)\, \overline{x^3+px^2+qx+5} \\
\underline{x^3-2x^2+5x} \\
(p+2)x^2+(q-5)x+5 \\
\underline{(p+2)x^2+2(p+2)x+5(p+2)} \\
(q+2p-1)x-5p-5
\end{array}
$$

①の左辺は x^2-2x+5 でわりきれるので、

$$
\begin{cases}
q+2p-1=0 \\
-5p-5=0
\end{cases}
$$

したがって、$p=-1$、$q=3$〃

①は $(x+1)(x^2-2x+5)=0$

$x=-1$、$1\pm 2i$

よって他の解は、-1、$1-2i$〃

[解法その2]

①のもう1つの解は実数なので、それをαとすると、

$(x-\alpha)(x^2-2x+5)=0$

$\iff x^3-(\alpha+2)x^2+(2\alpha+5)x-5\alpha=0$

係数比較して、$\begin{cases} p=-(\alpha+2) \\ q=2\alpha+5 \\ -5\alpha=5 \end{cases}$

よって、$\alpha=-1$、$p=-1$、$q=3$〃

他の解は-1、$1-2i$〃

(解3) $x^3+px^2+qx+5=0$ …①

①は実係数なので、$1+2i$を解にもつならば、

その共役複素数$1-2i$も解に持つ。

もう1つの解は実数なので、それをαとおくと、

解と係数の関係より、

$\begin{cases} \alpha+(1+2i)+(1-2i)=-p \\ \alpha(1+2i)+(1+2i)(1-2i)+(1-2i)\alpha=q \\ \alpha(1+2i)(1-2i)=-5 \end{cases}$

$\begin{cases} \alpha+2=-p \\ 2\alpha+5=q \\ 5\alpha=-5 \end{cases}$

よって、$\alpha=-1$

$\therefore p=-1$、$q=3$

他の解は-1と$1-2i$〃

〈ωの問題〉

例 $x^3=1$ の虚数解の1つを ω とするとき、次の式の値を求めよ。

(1) $\omega^4+\omega^2+1$　　　(2) $\omega^{44}+\omega^{55}+\omega^{66}$

解) $x^3-1 \iff x^3-1^3=0$

$\iff (x-1)(x^2+x+1)=0$

$\therefore\ x=1,\ \dfrac{-1\pm\sqrt{3}i}{2}$

題意より、$\begin{cases}\omega^2+\omega+1=0 & \cdots ① \\ \omega^3=1 & \cdots ②\end{cases}$

(1) $\omega^4+\omega^2+1=\omega^3\times\omega+\omega^2+1$

$=\omega+\omega^2+1$ (②より)

$=0$ // (①より)

(2) $\omega^{44}+\omega^{55}+\omega^{66}$

$=(\omega^3)^{14}\times\omega^2+(\omega^3)^{18}\times\omega^1+(\omega^3)^{22}$

$=\omega^2+\omega+1$ (②より)

$=0$ // (①より)