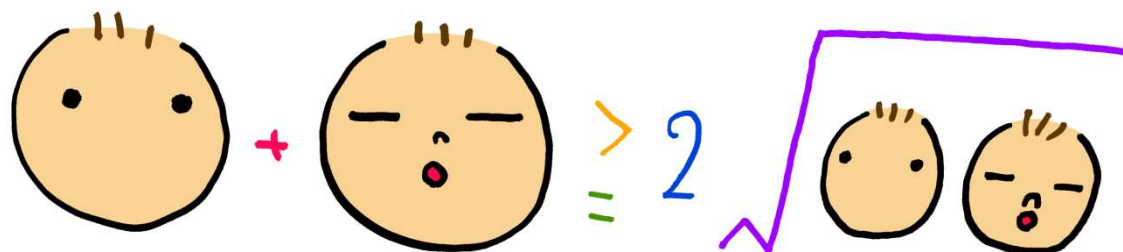


数学Ⅱ

08 式と証明



<講義ノート>

式と証明

- 0 式の扱い（整式・分数式）
- 1 二項定理
- 2 恒等式
- 3 等式の証明
- 4 不等式の証明
- 5 有名不等式の利用（相・コ）

0. 式(整式・分数式)の扱い + 「比例式」

(1) 整式

単項式と多項式を合わせて「整式」という。

いくつかの いくつかの

文字や数の 単項式の

積として 和として

表される式 表される式

①例 $7x^4y^2z^3$ ②例 $4x^2y + 3x - 5y^3$

< 整式の除法 >

①例 $(5x^2 - 3x^3 + 4) \div (x + 3x^2 - 1)$ を計算せよ。

$$\begin{array}{r} -x+2 \\ 3x^2+x-1 \overline{) -3x^3+5x^2 +4} \\ \underline{-3x^3-x^2+x} \\ 6x^2-x+4 \\ \underline{6x^2+2x-2} \\ -3x+6 \end{array}$$

商: $-x+2$ 余り: $-3x+6$

$$\begin{array}{r} 59 \\ 7 \overline{) 415} \\ \underline{35} \\ 65 \\ \underline{63} \\ 2 \end{array}$$

$415 = 7 \times 59 + 2$

$$-3x^3 + 5x^2 + 4 = (3x^2 + x - 1)(-x + 2) - 3x + 6$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{(わられる式)} = \text{(わる式)} \times \text{(商)} + \text{(余り)} \\ \text{(わる式の次数)} > \text{(余りの次数)} \end{array} \right.$$

(2) 分数式

$$[\text{加法・減法}] \quad \frac{A}{C} + \frac{B}{C} = \frac{A+B}{C} \quad , \quad \frac{A}{C} - \frac{B}{C} = \frac{A-B}{C}$$

$$[\text{乗法}] \quad \frac{A}{B} \times \frac{C}{D} = \frac{AC}{BD}$$

$$[\text{除法}] \quad \frac{A}{B} \div \frac{C}{D} = \frac{A}{B} \times \frac{D}{C} = \frac{AD}{BC}$$

(通分)

$$\begin{aligned} \frac{A}{B} + \frac{C}{D} &= \frac{AD}{BD} + \frac{BC}{BD} \\ &= \frac{AD+BC}{BD} \end{aligned}$$

⑨ 次の各式を簡単にせよ。

$$(1) \frac{bc}{(a-b)(a-c)} + \frac{ca}{(b-c)(b-a)} + \frac{ab}{(c-a)(c-b)}$$

$$(2) \quad 1 - \frac{1}{1 - \frac{1}{x}}$$

$$(1) \text{ (与式)} = \frac{bc}{(a-b)(a-c)} + \frac{-ac}{(b-c)(a-b)} + \frac{ab}{(a-c)(b-c)}$$

$$= \frac{bc(b-c) - ac(a-c) + ab(a-b)}{(a-b)(a-c)(b-c)}$$

$$= \frac{(b-c)a^2 - (b^2-c^2)a + bc(b-c)}{(a-b)(a-c)(b-c)}$$

$$= \frac{(b-c)\{a^2 - (b+c)a + bc\}}{(a-b)(a-c)(b-c)}$$

$$= 1 \quad ,$$

$$\begin{aligned}
 (2) \left(\frac{1}{x} \right)' &= \frac{1}{1 - \frac{\frac{1}{x-1}}{x}} \\
 &= \frac{1}{1 - \frac{x}{x-1}} = \frac{1}{\frac{x-1-x}{x-1}} \\
 &= \frac{x-1}{-1} = 1-x,
 \end{aligned}$$

(3) 比例式

⑭ $x : y : z = 3 : 4 : 5$ のとき、

$$x = 3k, \quad y = 4k, \quad z = 5k \quad (k \neq 0) \quad \text{とおく、}$$

$$\frac{x}{3} = \frac{y}{4} = \frac{z}{5} = k \quad \text{とおける。}$$

⑮ $\frac{x}{6} = \frac{y}{4} = \frac{z}{3} \neq 0$ のとき、 $\frac{xy + yz + zx}{x^2 + y^2 + z^2}$ の値を求めよ。

解) $\frac{x}{6} = \frac{y}{4} = \frac{z}{3} = k$ とおく、

$$x = 6k, \quad y = 4k, \quad z = 3k \quad (k \neq 0)$$

したがって、

$$\begin{aligned}
 \frac{xy + yz + zx}{x^2 + y^2 + z^2} &= \frac{6k \cdot 4k + 4k \cdot 3k + 3k \cdot 6k}{(6k)^2 + (4k)^2 + (3k)^2} \\
 &= \frac{24k^2 + 12k^2 + 18k^2}{36k^2 + 16k^2 + 9k^2} \\
 &= \frac{54k^2}{61k^2} = \frac{54}{61}
 \end{aligned}$$

1. 二項定理 多項定理も

(1) 二項定理

④ $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

∥

$(a+b)(a+b)(a+b)$

a	a	b
a	b	a
b	a	a

$(a+b)^7 = a^7 + 7a^6b + 21a^5b^2 + 35a^4b^3 + 35a^3b^4 + 21a^2b^5$

$+ 7ab^6 + b^7$

∥∥

$(a+b)(a+b)(a+b)(a+b)(a+b)(a+b)(a+b)$

①

②

③

④

⑤

⑥

⑦

$(a+b)^n = {}_nC_0 a^n + {}_nC_1 a^{n-1}b + {}_nC_2 a^{n-2}b^2 + \dots + {}_nC_{n-1} ab^{n-1} + {}_nC_n b^n$

二項係数

$\boxed{{}_nC_r} a^{n-r} b^r \quad (0 \leq r \leq n)$

(展開式における) 一般項

問 (1) $(3x+2y)^5$ の展開式における x^3y^2 の係数を求めよ。

(2) $(x^2 - \frac{2}{x})^6$ の展開式における x^6 の係数を求めよ。

指数法則

◦ $a^m a^n = a^{m+n}$

◦ $(a^m)^n = a^{mn}$

◦ $(ab)^n = a^n b^n$

解) (1) $(3x+2y)^5$ の展開式の一般項は

$$\begin{aligned} & {}^5C_r (3x)^{5-r} (2y)^r \\ &= {}^5C_r \times 3^{5-r} \times x^{5-r} \times 2^r \times y^r \\ &= {}^5C_r \times 3^{5-r} \times 2^r \times x^{5-r} \times y^r \end{aligned}$$

x^3y^2 については $r=2$

よって係数は、

$${}^5C_2 \times 3^3 \times 2^2 = 1080 //$$

(2) $(x^2 - \frac{2}{x})^6$ の展開式の一般項は

$$\begin{aligned} & {}^6C_r \times (x^2)^{6-r} \times (-\frac{2}{x})^r \\ &= {}^6C_r \times x^{2(6-r)} \times (-2)^r \left(\frac{1}{x}\right)^r \\ &= {}^6C_r \times x^{12-2r} \times (-2)^r \times x^{-r} \\ &= {}^6C_r \times (-2)^r \times x^{12-3r} \end{aligned}$$

$12-3r=6$ より、 $r=2$

よって係数は、

$${}^6C_2 \times (-2)^2 = 15 \times 4 = 60 //$$

(2) 多項定理

$$\textcircled{\text{例}} (a+b+c)^6 = \square a^6 + \square a^5b + \square a^4bc + \square a^3bc^2 + \dots$$

||

$$(a+b+c)(a+b+c)(a+b+c)(a+b+c)(a+b+c)(a+b+c)$$

①

②

③

④

⑤

⑥

a	a	b	c	a	c
---	---	---	---	---	---

並べ方は

$$\frac{6!}{3!1!2!} \text{通り}$$

$(a+b+c)^n$ の展開一般項は

$$\frac{n!}{p!q!r!} a^p b^q c^r \quad (p+q+r=n)$$

問 $(x+2y+3z)^8$ を展開したときの $x^2y^3z^3$ の係数を求めよ。

解) 展開一般項は

$$\frac{8!}{p!q!r!} x^p (2y)^q (3z)^r = \frac{8!}{p!q!r!} \times 2^q \times 3^r \times x^p y^q z^r$$

$p=2, q=3, r=3$ なので、

$$\text{係数は } \frac{8!}{2!3!3!} \times 2^3 \times 3^3 = 560 \times 8 \times 27$$

$$= 120960,,$$

2. 恒等式

どんな x に対しても成り立つ等式を
 x の「恒等式」という。

① $ax^2 + bx + c = 2x^2 - 3x + 4$
が恒等式であるとき、
 $a = 2$ 、 $b = -3$ 、 $c = 4$ である。

「方程式」
ある x に対して成り立つ等式

① $x^2 - 4x + 3 = 0$
 $\downarrow$
 $(x-1)(x-3) = 0$
 $\therefore x = 1, 3$

未定係数法

- 係数比較法
- 数値代入法 ← ※ くせもの

① $x^3 - 9x^2 + 9x - 4 = ax(x-1)(x-2) + bx(x-1) + cx + d \dots ①$
が x についての恒等式となるように定数 a, b, c, d の値を求めよ。

(解1) 係数比較法

$$\begin{aligned} (\text{①の右辺}) &= a(x^3 - 3x^2 + 2x) + b(x^2 - x) + cx + d \\ &= ax^3 + (b - 3a)x^2 + (2a - b + c)x + d \end{aligned}$$

① が x の恒等式となるには、左辺の係数と比較して

$$\begin{cases} a = 1 \\ b - 3a = -9 \rightarrow b = -6 \\ 2a - b + c = 9 \rightarrow c = 1 \\ d = -4 \end{cases}$$

よって、 $a = 1$ 、 $b = -6$ 、 $c = 1$ 、 $d = -4$ //

(解2) 数値代入法

必要条件

$$\textcircled{1} \text{ に } x=0 \text{ を代入 } -4=d$$

$$\textcircled{1} \text{ に } x=1 \text{ を代入 } -3=c+d \quad c=1$$

$$\textcircled{1} \text{ に } x=2 \text{ を代入 } 8-36+18-4=2b+2-4 \quad \therefore b=-6$$

また、3次の係数を比較して、 $a=1$

~~したがって、 $a=1, b=-6, c=1, d=-4$~~

十分条件

逆にこのとき、

$$(\text{右辺}) = x(x-1)(x-2) - 6x(x-1) + x - 4$$

$$= x^3 - 3x^2 + 2x - 6x^2 + 6x + x - 4$$

$$= x^3 - 9x^2 + 9x - 4$$

したがって、 $a=1, b=-6, c=1, d=-4$ //

例2 $(2k+1)x + (k-1)y - 2k - 7 = 0$ 、はどのような k の値
に対しても成り立つとする。このとき、 x, y の値を求めよ。

解) $(2k+1)x + (k-1)y - 2k - 7 = 0$

$$\Leftrightarrow (2x+y-7)k + x-y-7=0$$

これが k の恒等式となるので、
$$\begin{cases} 2x+y-7=0 \\ x-y-7=0 \end{cases}$$

$$\therefore x=3, y=-4$$

3. 等式の証明

$A = B$ を示す。

(左辺) (右辺)

[方法1] $A = \dots = B \quad \therefore (\text{左辺}) = (\text{右辺}) \quad \square$

[方法2] $A = \dots = C, B = \dots = C, \therefore (\text{左辺}) = (\text{右辺}) \quad \square$

[方法3] $A - B = \dots = 0 \quad \therefore (\text{左辺}) = (\text{右辺}) \quad \square$

④ 例) 次の等式が成り立つことを証明せよ。

$$(a^2 + b^2)(x^2 + y^2) = (ax - by)^2 + (ay + bx)^2$$

証明 (方法2)で。

$$(\text{左辺}) = a^2x^2 + b^2x^2 + a^2y^2 + b^2y^2$$

$$\begin{aligned} (\text{右辺}) &= a^2x^2 - 2abxy + b^2y^2 + a^2y^2 + 2abxy + b^2x^2 \\ &= a^2x^2 + b^2x^2 + a^2y^2 + b^2y^2 \end{aligned}$$

$$\text{よって、} (\text{左辺}) = (\text{右辺}) \quad \square$$

別証明

$$(a^2 + b^2)(x^2 + y^2) = (ax - by)^2 + (ay + bx)^2 \text{ を示す。}$$

$$\begin{aligned} \therefore a^2x^2 + b^2x^2 + a^2y^2 + b^2y^2 &= a^2x^2 - 2abxy + b^2y^2 + a^2y^2 \\ &\quad + 2abxy + b^2x^2 \end{aligned}$$

(条件がある場合)

条件の使い方

- ① 文字消去
- ② [方法3]で因数分解
- ③ 比例式は「 $=k$ 」とおく。

例2 次の等式を証明せよ。

$$x + y = 1 \text{ のとき、 } x^3 + y^3 = 1 - 3xy$$

証明 その1 (①文字消去 で)

$$x + y = 1 \text{ により、 } y = 1 - x$$

$$\text{よって、 } x^3 + y^3 = x^3 + (1 - x)^3$$

$$= x^3 + 1 - 3x + 3x^2 - x^3$$

$$= 3x^2 - 3x + 1$$

$$1 - 3xy = 1 - 3x(1 - x)$$

$$= 3x^2 - 3x + 1 \quad \therefore (\text{左辺}) = (\text{右辺}) \quad \square$$

証明 その2 (②[方法3]で因数分解 で)

$$(\text{左辺}) - (\text{右辺}) = x^3 + y^3 - (1 - 3xy)$$

$$= x^3 + y^3 + (-1)^3 - 3 \times x \times y \times (-1)$$

$$= (x + y - 1) \{ x^2 + y^2 + (-1)^2 - xy - y \times (-1) - (-1) \times x \}$$

$$= 0 \quad (x + y = 1 \text{ より})$$

$$\text{したがって、 } (\text{左辺}) = (\text{右辺}) \quad \square$$

例3) 次の等式を証明せよ。

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \text{ のとき、 } \frac{a-2b}{a+b} = \frac{c-2d}{c+d}$$

証明 (③比例式は「 $=k$ 」とおく 2")

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = k \text{ とおくと、 } a = bk, c = dk$$

$$\text{よって、(左辺)} = \frac{bk - 2b}{bk + b}$$

$$= \frac{b(k-2)}{b(k+1)} = \frac{k-2}{k+1}$$

$$\text{(右辺)} = \frac{dk - 2d}{dk + d}$$

$$= \frac{d(k-2)}{d(k+1)} = \frac{k-2}{k+1}$$

ゆえに、(左辺) = (右辺) $\square$

4. 不等式の証明

$A \geq B$ を示す。

(左辺) (右辺)

[方法1] $A - B = \dots = \textcircled{>} 0$ より、 $A \geq B$ □

[方法2] 両辺ともに正のときは、2乗の大小を比較。

$$A > 0, B > 0 \text{ のとき、} A^2 - B^2 = \dots = \textcircled{>} 0$$

$$\therefore A^2 > B^2 \iff A > B$$

[方法3] 次の回

例1 [方法1]の練習

次の不等式が成り立つことを証明せよ。(文字は全て実数とする)

$$(1) x^2 + y^2 \geq 2(x + y - 1)$$

$$(2) a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca$$

証明 (1) $x^2 + y^2 \geq 2(x + y - 1)$ を示す。

$$(\text{左辺}) - (\text{右辺}) = x^2 + y^2 - 2(x + y - 1)$$

$$= x^2 + y^2 - 2x - 2y + 2$$

$$= x^2 - 2x + 1 + y^2 - 2y + 1$$

$$= (x - 1)^2 + (y - 1)^2 \geq 0$$

したがって、 $x^2 + y^2 \geq 2(x + y - 1)$ □

(等号は $x = y = 1$ のとき成立)

(2) $a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca$ を示す。

$$\begin{aligned}(\text{左辺}) - (\text{右辺}) &= a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca \\&= \frac{1}{2} (2a^2 + 2b^2 + 2c^2 - 2ab - 2bc - 2ca) \\&= \frac{1}{2} (a^2 - 2ab + b^2 + b^2 - 2bc + c^2 + c^2 - 2ca + a^2) \\&= \frac{1}{2} \{ (a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2 \} \geq 0\end{aligned}$$

よって、 $a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca$ $\blacksquare$
(等号は $a = b = c$ のとき)

例2 [方法2] の練習

次の不等式が成り立つことを証明せよ。($a > 0$ 、 $b > 0$)

$$\sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}} \geq \frac{a + b}{2}$$

証明

$$\sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}} \geq \frac{a + b}{2} \text{ を示す。}$$

$$\begin{aligned}(\text{左辺})^2 - (\text{右辺})^2 &= \frac{a^2 + b^2}{2} - \left(\frac{a + b}{2}\right)^2 \\&= \frac{a^2 + b^2}{2} - \frac{a^2 + 2ab + b^2}{4} \\&= \frac{2(a^2 + b^2) - (a^2 + 2ab + b^2)}{4} \\&= \frac{a^2 - 2ab + b^2}{4} \\&= \frac{(a - b)^2}{4} \geq 0\end{aligned}$$

$$\text{よって、} \left(\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} \right)^2 \geq \left(\frac{a+b}{2} \right)^2$$

$a > 0$ 、 $b > 0$ だから、

$$\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} > 0, \quad \frac{a+b}{2} > 0$$

$$\text{なので、} \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} \geq \frac{a+b}{2} \quad \square$$

(等号は $a=b$ のとき成立)

$A > 0, B > 0$ のとき、 $A \geq B \iff A^2 \geq B^2$

[方法3] 相加・相乗平均の関係を利用する。

↓

$$\begin{aligned} &A > 0, B > 0 \text{ のとき、} \\ &\frac{A+B}{2} \geq \sqrt{AB} \\ &\text{相加平均} \quad \quad \text{相乗平均} \\ &(\text{等号は } A=B \text{ のとき成立}) \end{aligned}$$

 $\Leftrightarrow A+B \geq 2\sqrt{AB}$

証明(その1) [方法1]で。

$$\begin{aligned} (\text{左辺}) - (\text{右辺}) &= \frac{A+B}{2} - \sqrt{AB} \\ &= \frac{A+B-2\sqrt{AB}}{2} \\ &= \frac{(\sqrt{A}-\sqrt{B})^2}{2} \geq 0 \end{aligned}$$

$$\text{よって、} \frac{A+B}{2} \geq \sqrt{AB} \quad (\text{等号は } A=B \text{ のとき})$$

証明(その2)

$$\begin{aligned} (\text{左辺})^2 - (\text{右辺})^2 &= \left(\frac{A+B}{2}\right)^2 - (\sqrt{AB})^2 \\ &= \frac{A^2 + 2AB + B^2}{4} - AB \\ &= \frac{A^2 + 2AB + B^2 - 4AB}{4} \\ &= \frac{A^2 - 2AB + B^2}{4} \\ &= \frac{(A-B)^2}{4} \geq 0 \end{aligned}$$

$$\text{よって、} \left(\frac{A+B}{2}\right)^2 \geq (\sqrt{AB})^2$$

$A > 0, B > 0$ から、

$$\frac{A+B}{2} > 0, \sqrt{AB} > 0$$

なので、 $\frac{A+B}{2} \geq \sqrt{AB}$ (等号は $A = B$ のとき)

⑨ $a > 0, b > 0$ のとき、次の不等式を示せ。

$$(1) \left(a + \frac{1}{b}\right)\left(b + \frac{1}{a}\right) \geq 4$$

$$(2) \left(a + \frac{1}{b}\right)\left(b + \frac{4}{a}\right) \geq 9$$

証明 (1) $\left(a + \frac{1}{b}\right)\left(b + \frac{1}{a}\right) \geq 4$ を示す。

$a > 0, b > 0$ なので、相加・相乗平均の関係により、

$$\begin{cases} a + \frac{1}{b} \geq 2\sqrt{a \times \frac{1}{b}} & (\text{等号は } a = \frac{1}{b}, \text{つまり } ab = 1 \text{ のとき}) \\ b + \frac{1}{a} \geq 2\sqrt{b \times \frac{1}{a}} & (\text{等号は } b = \frac{1}{a}, \text{つまり } ab = 1 \text{ のとき}) \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \text{よって、} \left(a + \frac{1}{b}\right)\left(b + \frac{1}{a}\right) &\geq 2\sqrt{\frac{a}{b}} \times 2\sqrt{\frac{b}{a}} \quad (\text{等号は } ab = 1 \text{ のとき}) \\ &= 4 \end{aligned}$$

(1)の別証明 (左辺) $= ab + a \times \frac{1}{a} + b \times \frac{1}{b} + \frac{1}{b} \times \frac{1}{a}$

$$= ab + \frac{1}{ab} + 2$$

$$\geq 2\sqrt{ab \times \frac{1}{ab}} + 2 \quad (\text{相加・相乗平均の関係より})$$

$$= 4 \quad (\text{等号 } ab = \frac{1}{ab}, \text{つまり } ab = 1 \text{ のとき})$$

$$\text{よって、} \left(a + \frac{1}{b}\right)\left(b + \frac{1}{a}\right) \geq 4$$

(2) $(a + \frac{1}{b})(b + \frac{4}{a}) \geq 9$ を示す。

証明①

$$\begin{aligned}(\text{左辺}) &= ab + a \times \frac{4}{a} + \frac{1}{b} \times b + \frac{1}{b} \times \frac{4}{a} \\&= ab + \frac{4}{ab} + 5 \\&\geq 2\sqrt{ab \times \frac{4}{ab}} + 5 \text{ (相加・相乗平均の関係により)} \\&= 9 \text{ (等号は } ab = \frac{4}{ab} \text{、つまり } ab = 2 \text{ のとき)}\end{aligned}$$

したがって、 $(a + \frac{1}{b})(b + \frac{4}{a}) \geq 9$ $\square$

証明②

相加・相乗平均の関係により、

$$\begin{cases} a + \frac{1}{b} \geq 2\sqrt{a \times \frac{1}{b}} \text{ (等号は } a = \frac{1}{b} \text{、つまり } ab = 1 \text{ のとき)} \\ b + \frac{4}{a} \geq 2\sqrt{b \times \frac{4}{a}} \text{ (等号は } a = \frac{4}{b} \text{、つまり } ab = 4 \text{ のとき)} \end{cases}$$

$$\begin{aligned}\therefore (a + \frac{1}{b})(b + \frac{4}{a}) &\geq 2\sqrt{\frac{a}{b}} \times 2\sqrt{\frac{4b}{a}} \\&= 8 \quad \swarrow (a + \frac{1}{b})(b + \frac{4}{a}) > 8\end{aligned}$$

相加・相乗平均の関係を使うときは

必ず **等号成立** 条件を調べよ!

5. 有名不等式の利用

27

(1) 相加・相乗平均の関係

$A > 0, B > 0$ のとき、			
$\frac{A+B}{2} \geq \sqrt{AB}$	$\Longleftrightarrow$	$A+B \geq 2\sqrt{AB}$	
相加平均			相乗平均
(等号は $A=B$ のとき成立)			

① 例 $x > 0$ とする。

(1) $x + \frac{4}{x}$ の最小値を求めよ。

(2) $\frac{x}{x^2+4}$ の最大値を求めよ。

解) (1) $x > 0, \frac{4}{x} > 0$ だから、

相加相乗平均の関係より、

$$\begin{aligned} x + \frac{4}{x} &\geq 2\sqrt{x \times \frac{4}{x}} \\ &= 4 \end{aligned}$$

等号は $x = \frac{4}{x}$ つまり $x^2 = 4$ $x > 0$ から $x = 2$ のとき。

したがって、 $x = 2$ のとき最小値 4 //

$$\begin{aligned} (2) \quad \frac{x}{x^2+4} &= \frac{1}{x + \frac{4}{x}} \\ &\leq \frac{1}{4} \quad (\text{等号は } x = 2 \text{ のとき}) \end{aligned}$$

$x = 2$ のとき、最大値 $\frac{1}{4}$ //

(2) コーシー・シュワルツの不等式

a, b, c, x, y, z は実数とする。

$$(a^2+b^2)(x^2+y^2) \geq (ax+by)^2$$

等号は $a:b = x:y$ のとき

$$(a^2+b^2+c^2)(x^2+y^2+z^2) \geq (ax+by+cz)^2$$

等号は $a:b:c = x:y:z$ のとき

証明 (1つめのみ)

$(a^2+b^2)(x^2+y^2) \geq (ax+by)^2$ を示す。

$$\begin{aligned}(\text{左辺}) - (\text{右辺}) &= (a^2+b^2)(x^2+y^2) - (ax+by)^2 \\&= a^2x^2 + b^2x^2 + a^2y^2 + b^2y^2 - (a^2x^2 + 2abxy + b^2y^2) \\&= b^2x^2 - 2abxy + a^2y^2 \\&= (bx - ay)^2 \geq 0\end{aligned}$$

等号は $bx - ay = 0$ 、すなわち $a:b = x:y$ のとき。

よって、 $(a^2+b^2)(x^2+y^2) \geq (ax+by)^2$ ■

④ (例) $(a^2+b^2)(x^2+y^2) \geq (ax+by)^2$ が成り立つことを利用して、

(1) $3x+2y=1$ のとき、 x^2+y^2 の最小値を求めよ。

(2) $x^2+y^2=1$ のとき、 $2x+3y$ の最大値を求めよ。

解) $(a^2+b^2)(x^2+y^2) \geq (ax+by)^2 \dots ①$

(1) ①で $a=3$ 、 $b=2$ とすると、

$$(3^2+2^2)(x^2+y^2) \geq (3x+2y)^2$$

$$\text{よって、} 13(x^2+y^2) \geq 1^2$$

$$\Leftrightarrow x^2+y^2 \geq \frac{1}{13}$$

等号は $x:y = 3:2$ のとき。

$x=3k$ 、 $y=2k$ ($k \neq 0$) として $3x+2y=1$ に代入。

$$3 \times 3k + 2 \times 2k = 1 \quad \therefore k = \frac{1}{13}$$

したがって、 $x = \frac{3}{13}$ 、 $y = \frac{2}{13}$ のとき 最小値 $\frac{1}{13}$ //

(2) ①で $a=2$ 、 $b=3$ とすると、

$$(2^2+3^2)(x^2+y^2) \geq (2x+3y)^2$$

$$\Leftrightarrow (2x+3y)^2 \leq 13$$

$$\Leftrightarrow |2x+3y| \leq \sqrt{13}$$

$$\Leftrightarrow -\sqrt{13} \leq 2x+3y \leq \sqrt{13}$$

等号は $x:y = 2:3$ のとき。

$x=2k$ 、 $y=3k$ ($k \neq 0$) として、

$$x^2+y^2=1 \text{ に代入。} (2k)^2+(3k)^2=1$$

$$13k^2=1, \quad k = \pm \frac{1}{\sqrt{13}}$$

$x = \frac{2\sqrt{13}}{13}$ 、 $y = \frac{3\sqrt{13}}{13}$ のとき、最大値 $\sqrt{13}$ //