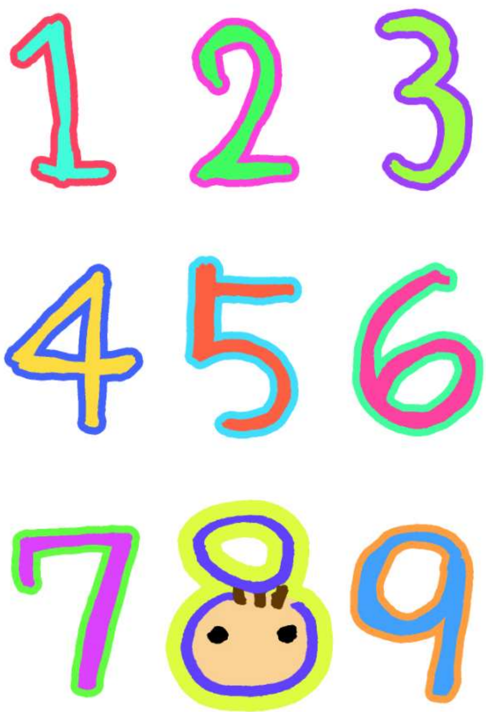
数学 A

07 数学と人間の活動



＜講義ノート＞

―　数学と人間の活動　―

１　基本事項

（１）約数、倍数、素因数

（２）最大公約数と最小公倍数

（３）ユークリッドの互除法

（４）ｎ進法

（５）合同式

２　整数解方程式

（０）基本

（１）２元１次不定方程式（ａｘ＋ｂｙ＝ｃ型）

（２）２元２次不定方程式（ｘｙ＋ａｘ＋ｂｙ＋ｃ＝０型）

（３）絞り込み（実数条件＆大小関係）

３　倍数証明

（１）剰余類

（２）２大証明法

1.基本事項

(1)約数・倍数・素因数

(i)約数・倍数

2つの整数a, bについて、ある整数kを用いて

$a = bk$と表されるとき、$\begin{cases} b\text{はaの約数} \\ a\text{はbの倍数} \end{cases}$ であるという

(ii)素因数

素数である因数

素数	因数
2以上の自然数で1とそれ自身以外に正の約数をもたない数	整数がいくつかの整数の積で表されるとき、積を作る1つ1つの整数

例) 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17

素数でない数を「合成数」という。(6, 15など)

例) $36 = 2 \times 3 \times 6 = 2^2 \times 3^2$

$\boxed{\text{素因数分解}}$ (自然数を、素数だけの積に分解すること)

例1

(1) 144 の正の約数の個数を求めよ。

(2) 144 の正の約数の総和を求めよ。

解)

(1) 144を素因数分解すると、$144 = 2^4 \times 3^2$

よって約数は $5 \times 3 = 15$(個)〃

$\left(\begin{array}{l} 2^a + 3^b + 5^c \text{の約数は、} \\ \quad (a+1)(b+1)(c+1) \text{個} \end{array} \right)$

(2) 求める総和は、$(2^0 + 2^1 + 2^2 + 2^3 + 2^4)(3^0 + 3^1 + 3^2)$

$= (1 + 2 + 4 + 8 + 16)(1 + 3 + 9)$

$= 31 \times 13 = 403$〃

例2

(1) $20! = 20 \times 19 \times 18 \times 17 \times 16 \times 15 \times 14 \times 13 \times 12 \times 11 \times 10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1$

1から20までの自然数の中に、3の倍数は6個。

3^2の倍数は2個。

したがって、$20!$が3^nで割り切れるような自然数nの最大値は

$6 + 2 = 8$〃

(2) $150! = 150 \times 149 \times 148 \times \cdots\cdots \times 3 \times 2 \times 1$

1から150までの自然数の中に、5の倍数は30個

5^2の倍数は6個

5^3の倍数は1個

よって、$30 + 6 + 1 = 37$(個)〃

(2) 最大公約数と最小公倍数

公約数の中で最大のもの ← 公約数

2つ以上の整数に共通な約数

例 28と42の公約数は、1, 2, 7, 14

公倍数の中で最小のもの ← 公倍数

2つ以上の整数に共通な倍数

例 28と42の公倍数は、84, 168, 252, 336…

「互いに素」

2つの整数 a, b の最大公約数が1であるとき，a と b は互いに素であるという

例 14と15は互いに素である。

性質 2つの自然数 a, b の最大公約数を G, 最小公倍数を L とする。
$a = Ga'$, $b = Gb'$ であるとすると,

$$\begin{cases} \circ\ a' \text{と} b' \text{は互いに素} \\ \circ\ L = Ga'b' = a'b = ab' \\ \circ\ ab = LG \end{cases}$$

例 $a = 28$, $b = 42$ とすると

$G = 2 \times 7 = 14$

$L = (2 \times 7) \times 2 \times 3 = 84$

問 和が184, 最大公約数が23である2つの自然数の組をすべて求めよ。

解) 2つの自然数を a, b $(a \leqq b)$ とおく。

題意より，$a + b = 184$ …①

また、$a = 23a'$, $b = 23b'$ ($a' \leqq b'$, a'とb'は互いに素) とおくと、

①から $23a' + 23b' = 184$

$\therefore a' + b' = 8$

したがって，$(a', b') = (1, 7), (3, 5)$

よって，$(a, b) = (23 \times 1, 23 \times 7), (23 \times 3, 23 \times 5)$

$= (23, 161), (69, 115)$ //

(3) ユークリッドの互除法

互除法の原理

2つの整数 a, b について
a を b で割ったときの余りを r とすると、
　$r \neq 0$ のとき
　　a と b の最大公約数は、b と r の最大公約数に等しい
　$r = 0$ のとき
　　a と b の最大公約数は b である。

ユークリッドの互除法　**2つの正の整数 a, b の最大公約数を求める**

① a を b で割ったときの余りを r とする。
② $r = 0$ ならば、b が a と b の最大公約数である。
　$r > 0$ ならば、a を b に、b を r に置き換えて ① に戻る。

例 2つの数 966 と 667 の最大公約数を求める。

$$966 = 667 \times 1 + 299$$
$$667 = 299 \times 2 + 69$$
$$299 = 69 \times 4 + 23$$
$$69 = 23 \times 3 + 0$$

996 と 667 の最大公約数は 23

(3) ユークリッドの互除法（証明）

問 自然数 a を自然数 b で割った余りを r とする。($r>0$)
a と b の最大公約数は、b と r の最大公約数と一致することを証明せよ。

証明

a, b の最大公約数を G とすると、

$a = Ga'$, $b = Gb'$ （a' と b' は互いに素な自然数）と表せる。

このとき、a を b で割った商を q とすると、$a = bq + r$ から、

$$r = a - bq$$
$$= Ga' - Gb'q$$
$$= G(a' - b'q)$$

よって G は r の約数。

したがって、G は b と r の公約数となる。

G が b と r の最大公約数であることを示す。

b' と $a' - b'q$ が互いに素になることを示す。

b' と $a' - b'q$ が1より大きい公約数 k をもつとすると、

$b = kl$, $a' - b'q = km$ （l, m：自然数）

と表せるが、

$$a' = b'q + km$$
$$= klq + km$$
$$= k(lq + m)$$

となり、a' も k でわりきれてしまう。

これは、a' と b' が互いに素であることに反する。

よって、b' と $a' - b'q$ が互いに素、つまり、

a と b の最大公約数 G は、

b と r の最大公約数である。（証明終）

(4) n進法

位取りの基礎をnとして表す方法。

例 7903の各位の数は 0〜9

2進数の各位の数は 0か1

$$7903 = 7\times10^3 + 9\times10^2 + 0\times10^1 + 3\times10^0$$

$$\begin{aligned}
23_{(10)} &= 1\times2^4 + 7 \\
&= 1\times2^4 + 0\times2^3 + 7 \\
&= 1\times2^4 + 0\times2^3 + 1\times2^2 + 1\times2^1 + 1\times2^0 \\
&= 10111_{(2)}
\end{aligned}$$

例1 10進法で表された数263.128を5進法で表せ。

解)

$$\begin{aligned}
263.128 &= 2\times5^3 + 13.128 \\
&= 2\times5^3 + 0\times5^2 + 13.128 \\
&= 2\times5^3 + 0\times5^2 + 2\times5^1 + 3.128 \\
&= 2\times5^3 + 0\times5^2 + 2\times5^1 + 3\times5^0 + 0.128 \\
&= 2\times5^3 + 0\times5^2 + 2\times5^1 + 3\times5^0 + 0\times5^{-1} + 0.128 \\
&= 2\times5^3 + 0\times5^2 + 2\times5^1 + 3\times5^0 + 0\times5^{-1} + 3\times5^{-2} + 1\times5^{-3} \\
&= 2023.031_{(5)}
\end{aligned}$$

例2 自然数Nを3進法と5進法で表すと、いずれも2桁の数となり各位の数字の並び方がちょうど逆になった。Nを10進法で表せ。

解)

自然数Nを3進法で表したとき、$ab_{(3)}$となるとすると

Nを5進法で表したとき、$ba_{(5)}$となる。

ただし、aとbは整数で、$1 \leqq a \leqq 2$, $1 \leqq b \leqq 2$ …①

ここで、$N = a\times3^1 + b\times3^0 = b\times5^1 \times a\times5^0$

$$\therefore 3a + b = 5b + a$$

$$\Leftrightarrow a = 2b$$

①の範囲で考えると、$a = 2$, $b = 1$

よって、$N = 3\times2 + 1$

$= 7$ //

(5)合同式

$a-b$ が m の倍数であるとき、a, b は m を法として、合同であるといい、

$\boxed{a \equiv b \pmod{m}}$ と表す。

このような式を「合同式」という。

例 $a=28$, $b=13$ とすると、$28-13=15$ (5の倍数) なので、
$28 \equiv 13 \pmod{5}$ となる。

$\begin{cases} \text{。} a-b \text{ が } m \text{ の倍数。} \\ \text{。} a, b \text{ をそれぞれ } m \text{ で割った余りが等しい。} \end{cases}$

合同式の性質

$a \equiv b \pmod{m}$
$c \equiv d \pmod{m}$ のとき $\begin{cases} a+c \equiv b+d \pmod{m} \\ a-c \equiv b-d \pmod{m} \\ ac \equiv bd \pmod{m} \end{cases}$

証明 (文字はすべて整数とする)

$\begin{cases} a = ma'+p \\ b = mb'+p \end{cases}$

$\begin{cases} c = mc'+q \\ d = md'+q \end{cases}$

とあると、

$\begin{cases} a+c = m(a'+c')+p+q \\ b+d = m(b'+d')+p+q \end{cases}$

よって、
$a+c \equiv b+d \pmod{m}$
(証明終)

同様に考えて、
$a-c \equiv b-d \pmod{m}$
(証明終)

次に、

$ac = (ma'+p)(mc'+q)$
$\quad = m(ma'c'+a'q+c'p)+pq$

$bd = (mb'+p)(md'+q)$
$\quad = m(mb'd'+b'q+d'p)+pq$

よって、
$ac \equiv bd \pmod{m}$
(証明終)

例1　22^{100} を7で割った余りは?

解) 準備

$a \equiv b \pmod{m}$ のとき

$a \equiv b \pmod{m}$ なので

$a^2 \equiv b^2 \pmod{m}$

同様に考えて.

$a^3 \equiv b^3 \pmod{m}$

nは自然数

$$\boxed{\begin{array}{l} a \equiv b \pmod{m} \text{のとき} \\ a^n \equiv b^n \pmod{m} \end{array}}$$

$22 \equiv 1 \pmod{7}$ より.

$22^{100} \equiv 1^{100} \pmod{7}$

$1^{100} = 1$

よって. 22^{100} を7で割った余りは1 〃

例2　53^{100} の一の位の数字は?

解) $53 \equiv 3 \pmod{10}$ から.

$53^{100} \equiv 3^{100} \pmod{10}$

$= (3^4)^{25}$

$= 81^{25}$

$= 1^{25} \pmod{10}$

$= 1$

よって. 53^{100} の一の位の数字は1 〃

2. 整数解方程式

(0) 基本

例 $xy=21$ をみたす正の整数 x, y の組をすべて求めよ。

解) $(x, y)=(1, 21), (3, 7), (7, 3), (21, 1)$ //

例' $\dfrac{3}{x-1}$ が整数となるような、整数 x の値をすべて求めよ。

解) $\dfrac{3}{x-1}$ が整数となるのは、$x-1$ が3の約数となるときである。

($\because$ $x-1$ は整数)

つまり、$x-1=1, 3, -1, -3$

$\therefore x=2, 4, 0, -2$ //

まずは、「約数の数えあげ」

例1 $\sqrt{n^2+15}$ が自然数となるような、自然数 n をすべて求めよ。

$n=1$ のとき $\sqrt{1^2+15}=\sqrt{16}=4$

解) $\sqrt{n^2+15}=m$ (自然数) とおく。

$\therefore n^2+15=m^2 \iff m^2-n^2=15$

$\iff (m+n)(m-n)=15$

$m+n$ と $m-n$ は正の整数で かつ、$m+n>m-n$ だから、

$(m+n, m-n)=(5, 3), (15, 1)$

したがって、$\begin{cases} m+n=5 \\ m-n=3 \end{cases}$ または、$\begin{cases} m+n=15 \\ m-n=1 \end{cases}$

$m=4, n=1$　　$m=8, n=7$

よって、$n=1, 7$ //

例2 (1) $x^2-xy-2y^2-2x-5y-3$ を因数分解せよ。

(2) $x^2-xy-2y^2-2x-5y-6=0$ の整数解 x, y の組をすべて求めよ。

解) (1) $x^2-xy-2y^2-2x-5y-3$

$=x^2-(y+2)x-2y^2-5y-3$

$=x^2-(y+2)x-(2y^2+5y+3)$

$=x^2-(y+2)x-(y+1)(2y+3)$

$=(x+y+1)\{x-(2y+3)\}$

$=(x+y+1)(x-2y-3)$ //

(2) $x^2-xy-2y^2-2x-5y-6=0$

$\iff x^2-xy-2y^2-2x-5y-3=3$

$\iff \underbrace{(x+y+1)(x-2y-3)}_{\text{整数}}=3$

$x+y+1$, $x-2y-3$ は整数なので、

$(x+y+1, x-2y-3)=(1, 3), (3, 1)$

$(-1, -3), (-3, -1)$

$\therefore (x+y, x-2y)=(0, 6), (2, 4), (-2, 0), (-4, 2)$

$x+y$	0	2	-2	-4
$x-2y$	6	4	0	2
x	2			
y	-2	$\cancel{-\frac{2}{3}}$	$\cancel{-\frac{2}{3}}$	-2

したがって、$(x, y)=(2, -2), (-2, -2)$ //

(1) 2元1次不定方程式

$Ax + By = C$ 型

⇒成り立つものを1つ入れる

例 次の2元1次不定方程式の整数解をすべて求めよ。

(1) $2x - 3y = 1$

(2) $83x + 29y = 1$

(3) $76x + 31y = 3$

解)

(1)

$$
\begin{array}{rl}
 & 2x - 3y = 1 \\
-) & 2\cdot 2 - 3\cdot 1 = 1 \\
\hline
 & 2\cdot(x-2) - 3\cdot(y-1) = 0
\end{array}
$$

$\Leftrightarrow \ 2(x-2) = 3(y-1)$

よって、$\begin{cases} x-2 = 3k \\ y-1 = 2k \end{cases}$

$\therefore \begin{cases} x = 3k+2 \\ y = 2k+1 \end{cases}$ // (k：整数)

(2) $83x + 29y = 1$

準備（特殊解を探す！）

$\begin{cases} 83 = 29\times 2 + 25 \\ 29 = 25\times 1 + 4 \\ 25 = 4\times 6 + 1 \\ 4 = 1\times 4 + 0 \end{cases}$ により、

$$
\begin{aligned}
1 &= 25 - 4\times 6 \\
&= 25 - (29 - 25\times 1)\times 6 \\
&= 25\times 7 - 29\times 6 \\
&= (83 - 29\times 2)\times 7 - 29\times 6 \\
&= 83\times 7 + 29\times(-20)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{array}{rl}
 & 83x + 29y = 1 \\
-) & 83\times 7 + 29\times(-20) = 1 \\
\hline
 & 83(x-7) + 29(y+20) = 0
\end{array}
$$

$\Leftrightarrow 83(x-7) = -29(y+20)$

$\therefore \begin{cases} x = 29k + 7 \\ y = -83k - 20 \end{cases}$ // (k：整数)

(3) $76x + 31y = 3$

準備（特殊解を探す！）

（仮に、$76x + 31y = 1$ の特殊解を）

$\begin{cases} 76 = 31\times 2 + 14 \\ 31 = 14\times 2 + 3 \\ 14 = 3\times 4 + 2 \\ 3 = 2\times 1 + 1 \end{cases}$ により、

$$
\begin{aligned}
1 &= 3 - 2\times 1 \\
&= 3 - (14 - 3\times 4)\times 1 \\
&= 3\times 5 - 14\times 1 \\
&= (31 - 14\times 2)\times 5 - 14\times 1 \\
&= 31\times 5 - (76 - 31\times 2)\times 11 \\
&= 76\times(-11) + 31\times 27
\end{aligned}
$$

$\therefore 3 = 76\times(-33) + 31\times 81$

$$
\begin{array}{rl}
 & 76x + 31y = 3 \\
-) & 76\times(-33) + 31\times 81 = 3 \\
\hline
 & 76(x+33) + 31(y-81) = 0
\end{array}
$$

$\Leftrightarrow 76(x+33) = -31(y-81)$

$\begin{cases} x = 31k - 33 \\ y = -76k + 81 \end{cases}$ // (k：整数)

$$
\begin{aligned}
3 &= 31 - 14\times 2 \\
&= 31 - (76 - 31\times 2)\times 2 \\
&= 76\times(-2) + 31\times 5
\end{aligned}
$$

(別解)

$$
\begin{array}{rl}
 & 76x + 31y = 3 \\
-) & 76\times(-2) + 31\times 5 = 3 \\
\hline
 & 76(x+2) + 31(y-5) = 0
\end{array}
$$

$\Leftrightarrow 76(x+2) = -31(y-5)$

$\begin{cases} x = 31k - 2 \\ y = -76 + 5 \end{cases}$ // (k：整数)

(2) 2元2次不定方程式

$xy+Ax+By+C=0$ 型

⇒無理矢理因数分解!

(例1) 次の2元2次不定方程式の整数解をすべて求めよ。

(1) $xy+3x-5y=17$

(2) $3xy-2x+y=2$

解)(1) $xy+3x-5y-17=0$

$\Leftrightarrow x(y+3)-5y-17=0$

$\Leftrightarrow x(y+3)-5(y+3)-2=0$

$\Leftrightarrow (x-5)(y+3)=2$

x, yは整数だから、$x-5$、$y+3$も整数で、かつ2の約数である。

$(x-5, y+3)=(1,2),(2,1),(-1,-2),(-2,-1)$

よって. $(x,y)=(6,-1),(7,-2),(4,-5),(3,-4)$ //

(2) $3xy-2x+y-2=0$

$\Leftrightarrow x(3y-2)+y-2=0$

$\Leftrightarrow 3x(3y-2)+3y-6=0$

$\Leftrightarrow 3x(3y-2)+(3y-2)-4=0$

$\Leftrightarrow (3x+1)(3y-2)=4$

x, yは整数だから、$3x+1$, $3y-2$も整数で、かつ4の約数である。

なおかつ、3で割って1余る整数なので$(3x+1, 3y-2)=(1,4),(4,1),(-2,-2)$

$(3x, 3y)=(0,6),(3,3),(-3,0)$

$\therefore (x,y)=(0,2),(1,1),(-1,0)$ //

(例2) $\frac{5}{x}+\frac{1}{2y}=1$ を満たす正の整数x, yの組をすべて求めよ。

解) $\frac{5}{x}+\frac{1}{2y}=1$ の両辺に$2xy$をかけて.

$10y+x=2xy$

$\Leftrightarrow 2xy-x-10y=0$

$\Leftrightarrow x(2y-1)-10y=0$

$\Leftrightarrow x(2y-1)-5(y-1)-5=0$

$\Leftrightarrow (x-5)(2y-1)=5$

x, yは正の整数なので、$x-5$, $2y-1$も整数で、

$(x-5, 2y-1)=(5,1),(1,5)$

$\therefore (x,y)=(10,1),(6,3)$ //

(3) 絞り込み

(i) 実数条件で絞り込み

例 次の方程式を満たす整数x, yの組をすべて求めよ。

$$10x^2-4xy+y^2-13x+2y-5=0$$

解) 与えられた方程式は.

$$y^2-2(2x-1)y+10x^2-13x-5=0$$

これをyの2次方程式とみなし、判別式をDとすると、$D \geqq 0$

$$\frac{D}{4}=(2x-1)^2-(10x^2-13x-5)$$
$$=-6x^2+9x+6 \geqq 0$$
$$\therefore 2x^2-3x-2 \leqq 0$$
$$\Leftrightarrow (2x+1)(x-2) \leqq 0$$
$$\Leftrightarrow -\frac{1}{2} \leqq x \leqq 2$$

よって、xの候補は. 0, 1, 2　これらを①に代入。

(i) $x=0$のとき. ①は. $y^2+2y-5=0$　$y=-1\pm\sqrt{6}$　不適。

(ii) $x=1$のとき ①は. $y^2-2y-8=0$　より. $(y+2)(y-4)=0$

$$\therefore y=-2, 4$$

(iii) $x=2$のとき. ①は $y^2-6y+9=0$ より. $(y-3)^2=0$

$$\therefore y=3$$

(i), (ii), (iii) より. $(x, y)=(1,-2), (1,4), (2,3)$ //

(3) 絞り込み

(ii) 大小関係で絞り込み

例 正の整数 x, y, z が
$$\frac{3}{x}+\frac{2}{y}+\frac{1}{z}=2,\quad x\leqq y\leqq z$$
を満たす。このとき、x, y, z の組をすべて求めよ。

- - - - - - - -

解) $x\leqq y\leqq z$ より、$\frac{1}{z}\leqq\frac{1}{y}\leqq\frac{1}{x}$

このとき、$2=\frac{3}{x}+\frac{2}{y}+\frac{1}{z}\leqq\frac{3}{x}+\frac{2}{x}+\frac{1}{x}=\frac{6}{x}$ から、

$2\leqq\frac{6}{x} \Leftrightarrow (1\leqq)\, x\leqq 3$

$x=1$ だと、$\frac{3}{x}+\frac{2}{y}+\frac{1}{z}=2 \cdots$ ① を満たさないので、x の候補は、2と3

(i) $x=2$ のとき、

① は $\frac{2}{y}+\frac{1}{z}=\frac{1}{2}$

$\therefore \frac{1}{2}=\frac{2}{y}+\frac{1}{z}\leqq\frac{2}{y}+\frac{1}{y}=\frac{3}{y}$ から、

$\frac{1}{2}\leqq\frac{3}{y}$ より $y\leqq 6$ ①$'$ をみたす $\frac{1}{z}(>0)$ が存在するには、

$5\leqq y$ が必要なので y の候補は、5と6

- $y=5$ とすると、①$'$ から、$\frac{1}{z}=\frac{1}{2}-\frac{2}{5}=\frac{1}{10}$ $\therefore z=10$
- $y=6$ とすると、①$'$ から、$\frac{1}{z}=\frac{1}{2}-\frac{2}{6}=\frac{1}{6}$ $\therefore z=6$

(ii) $x=3$ のとき、

① は、$\frac{2}{y}+\frac{1}{z}=1$

$\therefore 1=\frac{2}{y}+\frac{1}{z}\leqq\frac{2}{y}+\frac{1}{y}=\frac{3}{y}$ から、

$1\leqq\frac{3}{y}$ より、$y\leqq 3$ $x\leqq y$ なので、y の候補は 3

$y=3$ のとき、①$''$ より、$\frac{1}{z}=1-\frac{2}{3}=\frac{1}{3}$ $\therefore z=3$

(i), (ii) より、$(x, y, z)=(2, 5, 10), (2, 6, 6), (3, 3, 3)$ //

3、倍数証明

(1)剰余類

例 nを整数とする。n^2を3で割ると、余りは0か1であることを示せ。

kを整数とするとき、
nは、$3k$，$3k+1$，$3k+2$ のいずれかで表せる。

(i) $n=3k$のとき、
$n^2=(3k)^2=3\cdot3k^2$ から、
n^2は、3で割り切れる。(3で割った余り0)

(ii) $n=3k+1$ のとき、
$n^2=(3k+1)^2=3(3k^2+2k)+1$
n^2を3でわった余りは1

(iii) $n=3k+2$のとき、
$n^2=(3k+2)^2=3(3k^2+4k+1)+1$
n^2を3でわった余りは1.

(i)〜(iii)により、n^2を3で割った余りは、0か1である。(証明終)

(2) 2大証明法

例 a, b, c を自然数とする。
$a^2+b^2=c^2$ のとき、a, b の少なくとも1つは3の倍数となることを示せ。

証明

a も b も3の倍数でないと仮定する。
このとき、a^2, b^2 を3で割った余りは、ともに1となるので、
a^2+b^2 を3で割った余りは2となる。
一方、c^2 を3で割った余りは、0または1となる。
$a^2+b^2=c^2$ であるから、この左辺と右辺をそれぞれ
3で割った余りは同じとなることに矛盾する。
よって、a, b の少なくとも1つは3の倍数となる。 (証明終)

(2) 2大証明法

例 すべての自然数 n について、9^n+4^{n+1} は5の倍数であることを証明せよ。

証明　数学的帰納法で示す。

(i) $n=1$ のとき、$9^1+4^{1+1}=9+16$
$=25$ は5の倍数。よって成立。

(ii) $n=k\,(\geqq 1)$ のとき、9^k+4^{k+1} が5の倍数、つまり、
$9^k+4^{k+1}=5l$ （l：自然数）…①
と仮定する。

（目標：$9^{k+1}+4^{(k+1+1)}$ が5の倍数であることを示す。）

このとき、$n=k+1$ として、
$$\begin{aligned}9^{k+1}+4^{(k+1)+1}&=9^k\times 9+4^{k+2}\\&=(5l-4^{k+1})\times 9+4^{k+2}\quad(①より)\\&=5l\times 9-9\times 4^{k+1}+4\times 4^{k+1}\\&=45l-5\times 4^{k+1}\end{aligned}$$
よって、$n=k+1$ のときも5の倍数となり、成立。
(i), (ii) から、すべての自然数 n について、9^n+4^{n+1} は5の倍数である。
（証明終）

証明（合同式の利用）

$9\equiv 4 \pmod 5$ により、$9^n\equiv 4^n$
よって、
$$\begin{aligned}9^n+4^{n+1}&\equiv 4^n+4^{n+1} \pmod 5\\&=4^n+4\times 4^n\\&=5\times 4^n\\&\equiv 0 \pmod 5\end{aligned}$$

したがって、9^n+4^{n+1} は5の倍数である。（証明終）