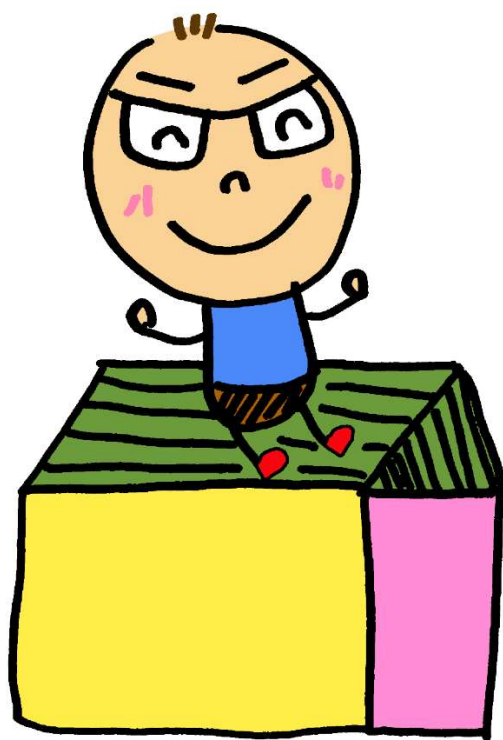


数学 A

06 図形の性質



< 講義ノート >

図形の性質

<平面図形>

1 三角形

- (1) 基本事項
 - (i) 三角形の成立条件
 - (ii) 平行線と線分の比
 - (iii) 角の2等分線
 - (iv) 面積比
 - * (v) 中線定理
- (2) メネラウス & チェバの定理
- (3) 三角形の五心

2 円

- (1) 円周角の定理
- (2) 円に内接する四角形
- (3) 接弦定理
- (4) 方べきの定理
- (5) 2円の関係

<空間図形>

1 直線と平面

- (1) 位置関係
- (2) 三垂線の定理

2 多面体

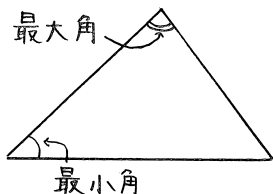
- (1) 正多面体
- (2) オイラーの多面体定理

1. 三角形

(1) 基本事項

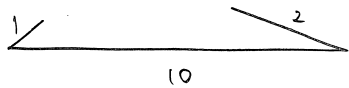
(i) 三角形の成立条件

準備 (三角形の角の大小)



{ 辺の長さが最大の向かいの角が最大角
辺の長さが最小の向かいの角が最小角

例 3 辺の長さが、1, 2, 10 の三角形 (?)



3 辺の長さが a, b, c の三角形が成立する条件は

$$\begin{aligned} a + b &> c \rightarrow c < a + b \\ b + c &> a \rightarrow a - b < c \\ c + a &> b \rightarrow b - a < c \end{aligned} \quad \begin{aligned} &\nwarrow \text{かつ} \\ &\downarrow \\ &|a - b| < c \end{aligned}$$

三角形の成立条件: $|a - b| < c < a + b$

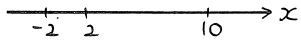
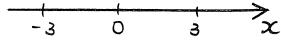
問 $\triangle ABC$ において、 $AB = 4, BC = 6, CA = x$ とするとき、

(1) x の値の範囲を求めよ。

(2) $\triangle ABC$ が鈍角三角形となるための x の値の範囲を求めよ。

解 (1) 三角形の成立条件により、 $\rightarrow$ (別解) $|x - 4| < 6 < x + 4$
 $|4 - 6| < x < 4 + 6$
 $\therefore 2 < x < 10 //$ $2 < x < 10 //$

$$\left(\begin{array}{l} |x|: \text{数直線上の } 0 \text{ からのキヨリ} \\ |x| < 3 \end{array} \right)$$



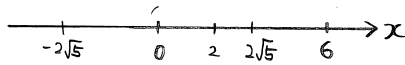
(2) (i) より, $2 < x < 10$... ①

① のもとで,

(i) $2 < x \leq 6$ のとき

$$4^2 + x^2 < 6^2 \Leftrightarrow x^2 < 20$$

$$\Leftrightarrow -2\sqrt{5} < x < 2\sqrt{5}$$



(ii) $6 < x < 10$ のとき

$$4^2 + 6^2 < x^2 \Leftrightarrow 52 < x^2$$

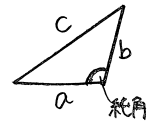
$$\Leftrightarrow x < -2\sqrt{13}, 2\sqrt{13} < x$$



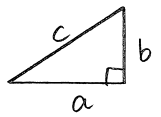
よって $2\sqrt{13} < x < 10$

(i), (ii) により,

$$2 < x < 2\sqrt{5}, 2\sqrt{13} < x < 10 //$$



$$a^2 + b^2 < c^2$$



$$a^2 + b^2 = c^2$$

余弦定理から

$$\cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$$

C は鈍角なので,

$$a^2 + b^2 - c^2 < 0$$

$$\therefore a^2 + b^2 < c^2$$

3 辺の長さが a, b, c の三角形 (最大辺 c) が鈍角三角形となるための条件は,

$$|a - b| < c < a + b$$

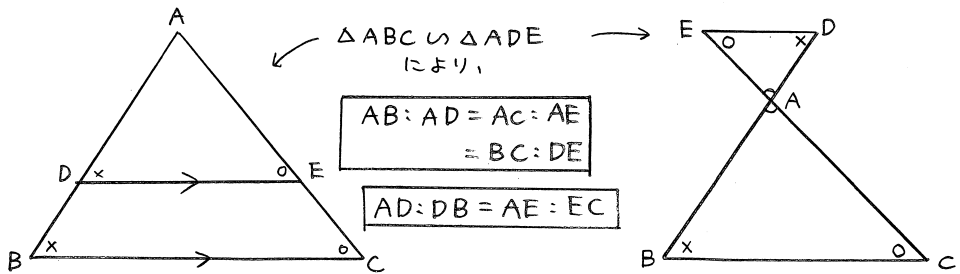
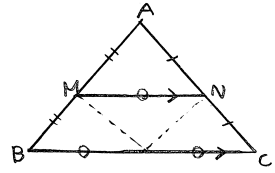
かつ

$$a^2 + b^2 < c^2$$

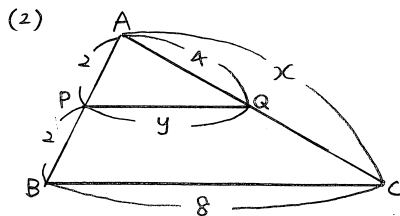
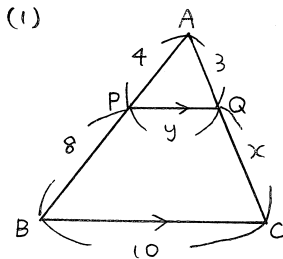
(ii) 平行線と線分の比

準備 (中点連結定理)

三角形の2辺の中点を結ぶ線分は
底辺に平行で、
その長さは底辺の長さの半分に等しい。



(例) 次の図の $\triangle ABC$ において、 $PQ \parallel BC$ とする。 x, y を求めよ。



解)

(1) $AP:PB = AQ:QC$ より
 $4:8 = 3:x$
 $\therefore 4x = 8 \times 3$
 $x = 6 //$

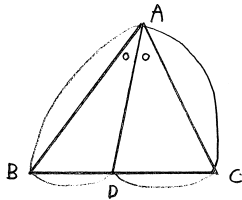
$AP:AB = PQ:BC$ から
 $4:12 = y:10$
 $\therefore 12y = 4 \times 10$
 $y = \frac{10}{3} //$

(2) $AP:AB = AQ:AC$ より
 $2:4 = 4:x$
 $\therefore 2x = 4 \times 4$
 $x = 8 //$

$AP:PQ = AB:BC$ より
 $2:y = 4:8$
 $\therefore 4y = 2 \times 8$
 $y = 4 //$

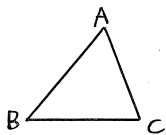
(iii) 角の二等分線 と線分の比

① 内角の二等分線



$$BA : AC = BD : DC$$

証明



BAの延長と、Cを通り
ADに平行な直線との交点をPとすると、

$$\begin{cases} \angle BAD = \angle BPC \text{ (同位角)} \\ \angle DAC = \angle ACP \text{ (錯角)} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \text{したがって、} \angle ACP &= \angle DAC \\ &= \angle BAD \\ &= \angle APC \end{aligned}$$

$$\text{よって、} AC = AP \quad \dots \text{①}$$

($\triangle BAD \sim \triangle BPC$ により)

$$BA : AP = BD : DC$$

① から、 $BA : AC = BD : DC$ (証明終)

①例) $\triangle ABC$ において $AB=6$, $BC=5$, $CA=4$
であるとき、 $\angle A$ の二等分線とBCとの交点をD、
 $\angle A$ の外角の二等分線とBCの延長との交点
をEとする。このとき、DEの長さを求めよ。

解)

$$BD : DC = BA : AC$$

$$= 6 : 4$$

$$= 3 : 2$$

また、

$$BE : EC = BA : AC$$

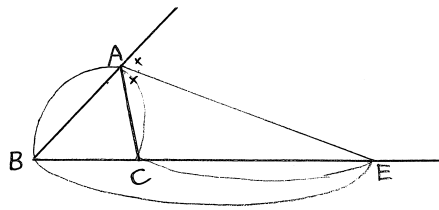
$$= 3 : 2 \quad \text{から}$$

$$(5 + EC) \times 2 = EC \times 3$$

$$\Leftrightarrow 10 + 2 \times EC = 3 \times EC$$

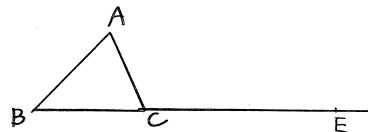
$$\Leftrightarrow EC = 10$$

② 外角の二等分線



$$BA : AC = BE : EC$$

証明



BAの延長線上に、
 $\triangle ACE \equiv \triangle AQE$ となる点Qをとると

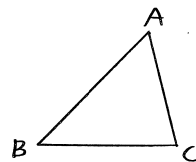
(QはAEに関するCの対称点)

EAは、 $\angle BEQ$ の二等分線なので、

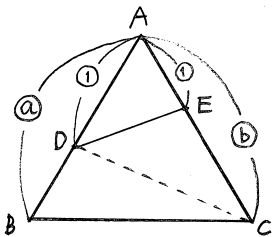
$$BE : EQ = BA : AQ$$

$$\therefore BA : AC = BE : EC \quad (\text{証明終})$$

$$\begin{array}{r} 3.5 \\ 5 \overline{) 17.5} \\ \underline{15} \\ 25 \\ \underline{20} \\ 50 \\ \underline{50} \\ 0 \end{array}$$



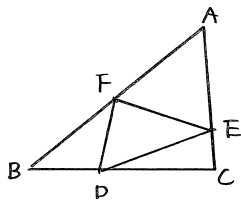
(iv) 面積比



左図で、面積に関して

$$\begin{aligned} (\triangle ABC) &= a(\triangle ADC) + b(\triangle ADE) \\ &= ab(\triangle ADE) \end{aligned}$$

- 例) 右図において、 $AE = AF = FB = DC = 3$,
 $BD = 2$, $CE = 1$ である。
 $\triangle ABC$ と $\triangle DEF$ の面積比を求めよ。



解)

$\triangle ABC$ の面積を S とする。

$\triangle AEF$, $\triangle BDF$, $\triangle CDE$ の面積をそれぞれ
 $(\triangle AEF)$, $(\triangle BDF)$, $(\triangle CDE)$ のように表すと、

$$(\triangle AEF) = \frac{3}{6} \times \frac{3}{4} S = \frac{3}{8} S$$

$$(\triangle BDF) = \frac{2}{5} \times \frac{3}{8} S = \frac{1}{5} S$$

$$(\triangle CDE) = \frac{3}{5} \times \frac{1}{4} S = \frac{3}{20} S$$

$$\text{よって、} (\triangle DEF) = S - \left(\frac{3}{8} S + \frac{1}{5} S + \frac{3}{20} S \right)$$

$$= S - \frac{15 + 8 + 6}{40} S$$

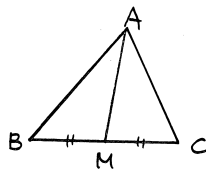
$$= \left(1 - \frac{29}{40} \right) S = \frac{11}{40} S$$

$$\text{したがって、} (\triangle ABC) : (\triangle DEF) = S : \frac{11}{40} S$$

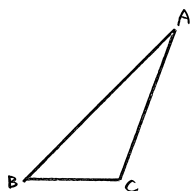
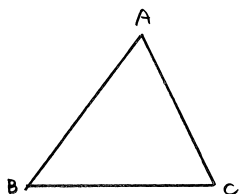
$$= 40 : 11 //$$

(v) 中線定理

$$\triangle ABC \text{ の辺 } BC \text{ の中点 を } M \text{ とすると,}$$
$$AB^2 + AC^2 = 2(AM^2 + BM^2)$$



証明



$AB \geq AC$ のときを示せば十分。

(i) $AB = AC$ のとき

$$AB^2 + AC^2 = 2AB^2$$
$$= 2(AM^2 + BM^2) \text{ 成立。}$$

(ii) $AB > AC$ のとき

A から BC (またはその延長) に下した垂線の足を H とすると、

$$AB^2 = AH^2 + BH^2 = AH^2 + (BM + MH)^2$$

$$AC^2 = AH^2 + CH^2 = AH^2 + (CH - MH)^2$$

$$\begin{aligned} \text{辺々たして } AB^2 + AC^2 &= 2AH^2 + 2BM^2 + 2MH^2 \\ &= 2(AH^2 + MH^2) + 2BM^2 \\ &= 2(AM^2 + BM^2) \end{aligned}$$

(i)(ii) より、 $AB^2 + AC^2 = 2(AM^2 + BM^2)$ (証明終)

(例) $\triangle ABC$ において、辺 BC, CA, AB の長さをそれぞれ a, b, c とする。

辺 BC の中点を M、線分 BM の中点を D とするとき、AM, AD の長さをそれぞれ a, b, c を用いて表せ。

解)

$\triangle ABC$ について中線定理より、

$$AB^2 + AC^2 = 2(AM^2 + BM^2)$$

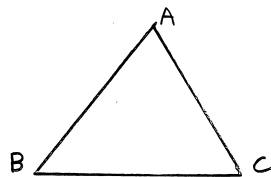
$$\therefore c^2 + b^2 = 2\left\{AM^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2\right\}$$

$$= 2 \times AM^2 + \frac{a^2}{2}$$

$$\Leftrightarrow 2 \times AM^2 = b^2 + c^2 - \frac{a^2}{2}$$
$$= \frac{2b^2 + 2c^2 - a^2}{2}$$

$$\Leftrightarrow AM^2 = \frac{2b^2 + 2c^2 - a^2}{4}$$

$$\therefore AM = \frac{\sqrt{2b^2 + 2c^2 - a^2}}{2}$$



また、 $\triangle ABM$ について中線定理より

$$AB^2 + AM^2 = 2(AD^2 + BD^2)$$

$$\therefore c^2 + \frac{2b^2 + 2c^2 - a^2}{4} = 2\left\{AD^2 + \left(\frac{a}{4}\right)^2\right\}$$
$$= 2AD^2 + \frac{a^2}{8}$$

$$\Leftrightarrow 8c^2 + 2(2b^2 + 2c^2 - a^2) = 16AD^2 + a^2$$

$$\Leftrightarrow 16 \times AD^2 = 4b^2 + 12c^2 - 3a^2$$

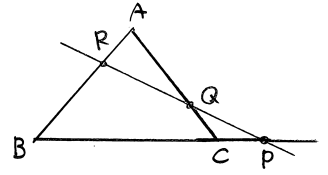
$$\Leftrightarrow AD^2 = \frac{4b^2 + 12c^2 - 3a^2}{16}$$

$$\therefore AD = \frac{\sqrt{4b^2 + 12c^2 - 3a^2}}{4}$$

(2) メネラウス & チェバの定理

メネラウスの定理

$\triangle ABC$ の辺 BC, CA, AB またはその延長が
三角形の頂点を通らない 1 直線とそれぞれ Q, R で
交わるとき、 $\frac{BP}{PC} \times \frac{CQ}{QA} \times \frac{AR}{RB} = 1$ が成り立つ。



(i) 直線が辺 BC の延長および、

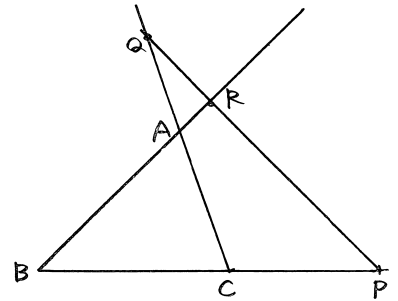
辺 AC, AB とそれぞれ点 Q, R で交わるとき

頂点 A, B, C から直線 PQ に

垂線 AL, BM, CN を下ろすと、

これら 3 つの垂線は互いに平行だから、

$$\begin{cases} \triangle BMP \sim \triangle CNP & \therefore \frac{BP}{CP} = \frac{BM}{CN} \\ \triangle CNQ \sim \triangle ALQ & \therefore \frac{CQ}{AQ} = \frac{CN}{AL} \\ \triangle ALR \sim \triangle BMR & \therefore \frac{AR}{BR} = \frac{AL}{BM} \end{cases}$$



辺々かけると

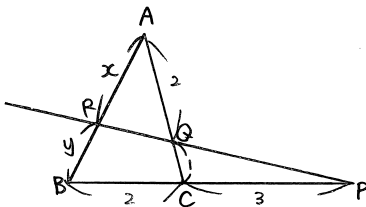
$$\frac{BP}{CP} \times \frac{CQ}{AQ} \times \frac{AR}{BR} = \frac{BM}{CN} \times \frac{CN}{AL} \times \frac{AL}{BM} = 1$$

$$\therefore \frac{BP}{CP} \times \frac{CQ}{AQ} \times \frac{AR}{BR} = 1 \quad (\text{証明終})$$

(ii) 直線が辺 BC, CA, AB の延長とそれぞれ点 P, Q, R で交わるとき

(i) と同様に考え、(i) と同様の関係式が導かれる。(証明終)

例) $x = y$ を求めよ。



解) メネラウスの定理より、

$$\frac{BP}{PC} \times \frac{CQ}{QA} \times \frac{AR}{RB} = 1$$

$$\therefore \frac{x}{y} = \frac{6}{5} \text{ より}$$

$$x : y = 6 : 5 //$$

チェバの定理

$\triangle ABC$ の3頂点 A, B, C と

三角形の辺上または、その延長上にない点 O とを結ぶ直線が
対辺 BC, CA, AB またはその延長と交わるとき、

交点をそれぞれ P, Q, R とすると、 $\frac{BP}{PC} \times \frac{CQ}{QA} \times \frac{AR}{RB} = 1$ が成り立つ。

(i) O が $\triangle ABC$ の内部の点のとき、

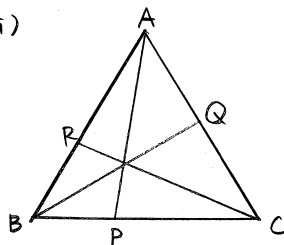
辺と面積比の関係について、

$$\frac{BP}{PC} = \frac{(\triangle OAB)}{(\triangle OCA)}$$

$$\frac{CQ}{QA} = \frac{(\triangle OBC)}{(\triangle OAB)}$$

$$\frac{AR}{RB} = \frac{(\triangle OCA)}{(\triangle OBC)}$$

(i)



辺々かけて

$$\frac{BP}{PC} \times \frac{CQ}{QA} \times \frac{AR}{RB} = \frac{(\triangle OAB)}{(\triangle OCA)} \times \frac{(\triangle OBC)}{(\triangle OAB)} \times \frac{(\triangle OCA)}{(\triangle OBC)}$$

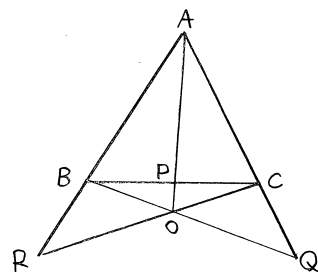
$$= 1$$

(ii) O が $\triangle ABC$ の外部の点のとき

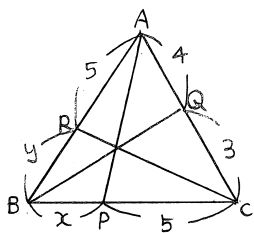
(i) と同様のことが成立。

(i)(ii) より、定理が示された。

(証明終)



例) $x=y$ を求めよ。



解)

チェバの定理により、

$$\frac{BP}{PC} \times \frac{CQ}{QA} \times \frac{AR}{RB} = 1$$

$$\therefore \frac{x}{y} = \frac{4}{3}$$

$$\therefore x=y=4=3 //$$

メネラウスの定理の逆

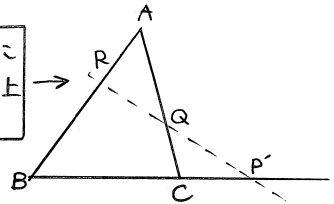
$\triangle ABC$ の辺 BC, CA, AB またはその延長上にそれぞれ点 P, Q, R があり、この3点のうちの1個または3個が辺の延長上にあるとする。
このとき、 $\frac{BP}{PC} \times \frac{CQ}{QA} \times \frac{AR}{RB} = 1$ が成り立つならば、

3点 P, Q, R は1直線上にある。

証明

2点 Q, R はそれぞれ辺 CA, AB 上にあるか、または CA, AB の延長上にあるとする。

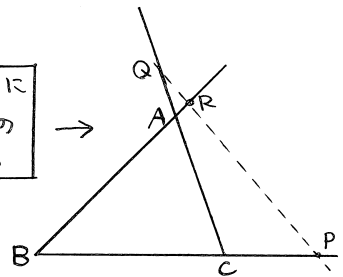
Q, R がともに
辺 CA, AB 上
にある



直線 QR と辺 BC との交点を P' とすると、メネラウスの定理より、

$$\frac{BP'}{P'C} \times \frac{CQ}{QA} \times \frac{AR}{RB} = 1 \quad \dots \textcircled{1}$$

Q, R がともに
辺 CA, AB の
延長上にある



また、仮定から、

$$\frac{BP}{PC} \times \frac{CQ}{QA} \times \frac{AR}{RB} = 1 \quad \dots \textcircled{2}$$

①, ② より、

$$\frac{BP}{PC} = \frac{BP'}{P'C}$$

つまり $BP:PC = BP':P'C$ が成り立ち、
 P, P' はともに辺 BC の延長上にあるから、 P と P' は一致する。
よって、3点 P, Q, R は一直線上にある。(証明終)

チェバの定理の逆

$\triangle ABC$ の辺 BC, CA, AB またはその延長上に、

それぞれ点 P, Q, R があり、この3点のうち1個または3個が
辺上にあるとする。

BQ と CR が交わり、かつ $\frac{BP}{PC} \times \frac{CQ}{QA} \times \frac{AR}{RB} = 1$ が成り立つならば、

3 直線 AP, BQ, CR は 1 点で交わる。

証明

点 Q, R はともに辺上にあるか、
ともに延長上にあるとすると、
点 P は辺 BC 上の点である。

2 直線 BQ, CR の交点を O とすると、

O は $\angle BAC$ の内部にあるから、
直線 AO は辺 BC と交わる。

その交点を P' とすると、チェバの定理により

$$\frac{BP'}{P'C} \times \frac{CQ}{QA} \times \frac{AR}{RB} = 1 \quad \dots \textcircled{1}$$

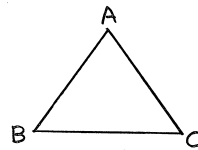
また、仮定から、

$$\frac{BP}{PC} \times \frac{CQ}{QA} \times \frac{AR}{RB} = 1 \quad \dots \textcircled{2}$$

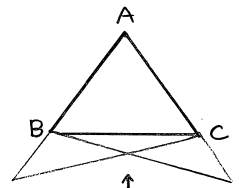
①, ② より $\frac{BP}{PC} = \frac{BP'}{P'C}$, つまり $BP = PC = BP' = P'C$

が成り立ち P と P' はともに辺 BC 上にあるので、 P' は P に一致する。

したがって、3 直線 AP, BQ, CR は 1 点で交わる。(証明終)



Q, R がともに
辺 CA, AB 上にある。



Q, R がともに
辺 CA, AB の
延長上にある。

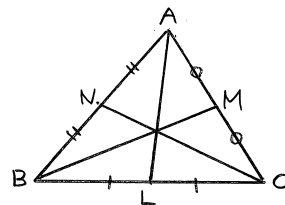
(3) 三角形の五心

三角形の3つの中線は1点で交わり、
その点は各中線を $2:1$ の比に内分する。 $\rightarrow$ その点は「重心」

証明

$\triangle ABC$ において、辺 BC , CA , AB の中点を
それぞれ L , M , N とすると、

$$\frac{BL}{LC} \times \frac{CM}{MA} \times \frac{AN}{NB} = \frac{1}{1} \times \frac{1}{1} \times \frac{1}{1} = 1$$



フェバの定理の逆より、

中線 AL , BM , CN は1点で交わる。(証明終)

また、この中線の交点を G とし、 $\triangle ABL$ と直線 CN にメネラウスの定理
を用いると、

$$\frac{AN}{NB} \times \frac{BC}{CL} \times \frac{LG}{GA} = 1 \quad \therefore \frac{LG}{GA} = \frac{1}{2}$$

よって、 $AG:GL = 2:1$

同様にして、 $BG:GM = 2:1$, $CG:GN = 2:1$

したがって、点 G は各中線を $2:1$ の比に内分する。(証明終)

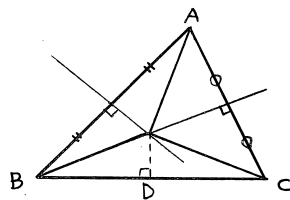
三角形の各辺の垂直二等分線は1点で交わり、
その点は3つの頂点から等距離にある。 $\rightarrow$ その点は「外心」

証明

$\triangle ABC$ において、辺 AB 、 AC の
垂直二等分線の交点を O とすると、

$$OA = OB \quad \text{かつ} \quad OC = OA$$

よって、 $OA = OB = OC$ ①



次に、 O から BC に垂線 OD を下ろすと、

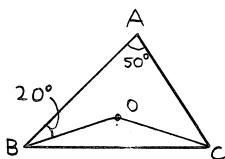
①より、 $OB = OC$ であるから、 OD は辺 BC の垂直二等分線である。

したがって、各辺の垂直二等分線は1点 O で交わり、

(①により) O は3つの頂点から等距離にある。(証明終)

④ 次の図において、点 O は $\triangle ABC$ の外心とする。

このとき、 $\angle OCB$ を求めよ。



解) $\angle OCB = \alpha$ とする。

$OA = OB = OC$ であることも利用して、

$$(20^\circ + 30^\circ) + (20^\circ + \alpha) + (30^\circ + \alpha) = 180^\circ$$

$$\therefore 100^\circ + 2\alpha = 180^\circ$$

$$\alpha = 40^\circ //$$

三角形の各頂点から対辺またはその延長に下ろした3つの垂線は1点で交わる。 $\rightarrow$ その点は「垂心」

証明

$\triangle ABC$ の頂点、 A, B, C から

対辺 BC, CA, AB またはその延長に下ろした垂線を、それぞれ AP, BQ, CR とする。

$\triangle CAR$ と $\triangle BAQ$ について

$\angle CAR = \angle BAQ$ かつ $\angle CRA = \angle BQA = 90^\circ$ により、 $\triangle CAR \sim \triangle BAQ$

よって $CA : AR = BA : AQ$ から $\frac{AR}{AQ} = \frac{AC}{AB}$... ①

同様にして、 $\triangle ABP \sim \triangle CBR, \triangle BCQ \sim \triangle ACP$ から

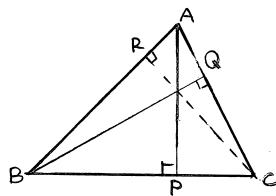
$$\frac{BP}{BR} = \frac{BA}{BC} \text{ ... ②}, \quad \frac{CQ}{CP} = \frac{CB}{CA} \text{ ... ③}$$

①, ②, ③ より

$$\frac{AR}{AQ} \times \frac{BP}{BR} \times \frac{CQ}{CP} = \frac{AC}{AB} \times \frac{BA}{BC} \times \frac{CB}{CA} = 1$$

$$\therefore \frac{BP}{PC} \times \frac{CQ}{QA} \times \frac{AR}{RB} = 1$$

チェバの定理の逆により、垂線 AP, BQ, CR は1点で交わる (証明終)

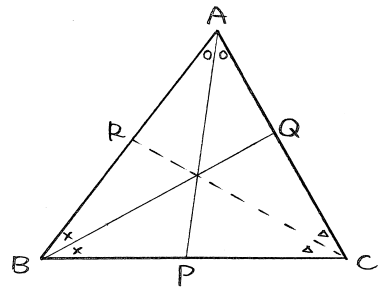


三角形の3つの内角の二等分線は $\rightarrow$ その点は「内心」
1点で交わる。

証明

$\triangle ABC$ において、 $\angle A, \angle B, \angle C$ の二等分線と対辺との交点を、それぞれ P, Q, R とすると、

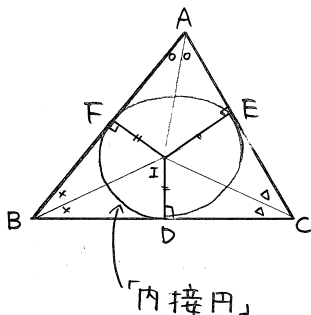
$$\begin{cases} BA:AC = BP:PC & \therefore \frac{BP}{PC} = \frac{BA}{AC} \\ AB:BC = AQ:QC & \therefore \frac{CQ}{QA} = \frac{BC}{AB} \\ BC:CA = BR:RA & \therefore \frac{AR}{RB} = \frac{CA}{BC} \end{cases}$$



辺々かけて

$$\frac{BP}{PC} \times \frac{CQ}{QA} \times \frac{AR}{RB} = \frac{BA}{AC} \times \frac{BC}{AB} \times \frac{CA}{BC} = 1$$

チェバの定理の逆より、 $\triangle ABC$ の3つの内角の二等分線 AP, BQ, CR は1点で交わる。(証明終)

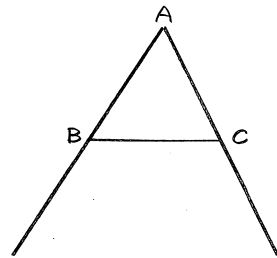


$\triangle IBD \equiv \triangle IBF$ より
 $ID = IF$
 $\triangle ICD \equiv \triangle ICE$ より
 $ID = IE$
よって $ID = IE = IF$

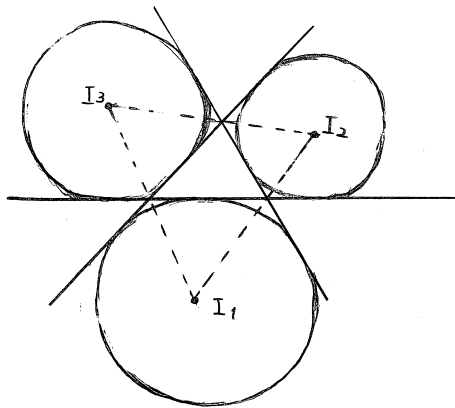
三角形の1つの頂点における内角の二等分線と、
他の2つの頂点における外角の二等分線は1点で交わる。 → その点は「傍心」

証明

$\triangle ABC$ において、頂点 B, C における
外角の二等分線の交点を I_1 とし、
 I_1 から辺 BC, CA, AB または、その延長に
それぞれ垂線 I_1D, I_1E, I_1F を下ろす。
このとき $I_1D = I_1F$ かつ、 $I_1D = I_1E$
により、 $I_1E = I_1F$



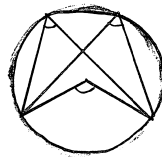
$\triangle AI_1E \cong \triangle AI_1F$ となることから、 $\angle I_1AE = \angle I_1AF$
したがって、 AI_1 は $\angle A$ の二等分線である。(証明終)



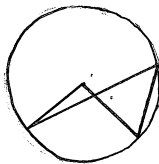
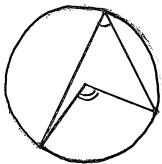
2. 円

(1) 円周角の定理

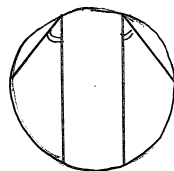
1つの弧に対する円周角の大きさは一定であり、その弧に対する中心角の半分である。



説明

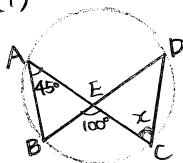


また、 $\left\{ \begin{array}{l} \circ 1つの円で等しい円周角に対する弧は等しい \\ \circ 1つの円で等しい弧に対する円周角は等しい \end{array} \right.$



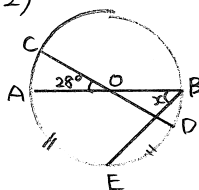
例) x を求めよ。

(1)



解) 円周角の定理より,
 $\angle BDC = 45^\circ$
 $\triangle CDE$ について
 $x + 45^\circ = 100^\circ$
 $\therefore x = 55^\circ$

(2)



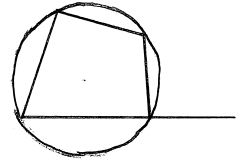
$\widehat{AE} = \widehat{ED}$

解) $\angle AOE = \angle EOD = 2x$ から
 $28^\circ + 2x + 2x = 180^\circ$
 $\Leftrightarrow 4x = 152^\circ$
 $\Leftrightarrow \therefore x = 38^\circ$

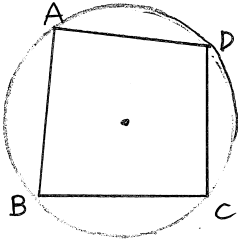
(2) 円に内接する四角形

円に内接する四角形では

- 対角の和は 180° である。
- 外角は、それと隣り合う内角の対角に等しい。



説明

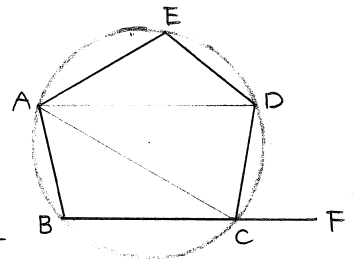


$$2x + 2y + 2z + 2w = 360^\circ$$

$$\Leftrightarrow x + y + z + w = 180^\circ$$

$$\begin{cases} (x+w) + (y+z) = 180^\circ \\ (x+y) + (z+w) = 180^\circ \end{cases}$$

- ④ 右図のように円に内接する五角形 ABCDE があり、点 F は辺 BC の延長上にある。
AB = DC, $\angle CAB = 50^\circ$, $\angle BCA = 37^\circ$ のとき
次の角の大きさを求めよ。



- (1) $\angle CDA$ (2) $\angle DCF$ (3) $\angle DEA$

解)

$$(1) \triangle ABC \text{ について、 } \angle ABC = 180^\circ - (50^\circ + 37^\circ) = 93^\circ$$

四角形 ABCD は円に内接するので、

$$\angle CDA = 180^\circ - 93^\circ = 87^\circ //$$

$$(2) AB = CD \text{ により、 } \angle CAD = \angle ACB = 37^\circ$$

四角形 ABCD は円に内接するので、

$$\angle DCF = \angle BAD = 50^\circ + 37^\circ = 87^\circ //$$

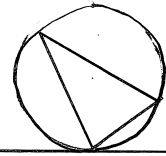
$$(3) \angle ACD = 180^\circ - (37^\circ + 87^\circ) = 180^\circ - 124^\circ = 56^\circ$$

四角形 ACDE は円に内接するので

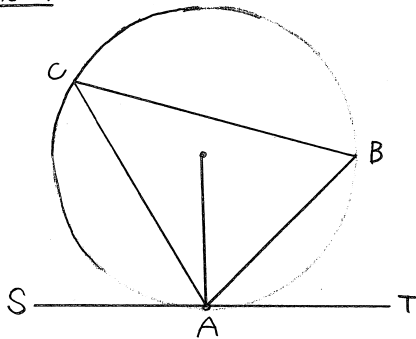
$$\angle DEA = 180^\circ - 56^\circ = 124^\circ //$$

(3) 接弦定理

円の接線とその接点を通る弦のつくる角は
その角の内部にある弧に対する円周角に等しい。



説明

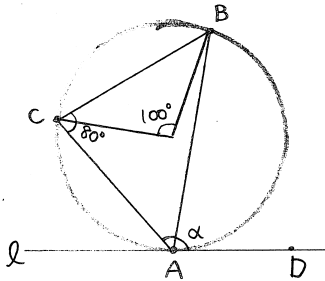


$$2x + 2y + 2z = 180^\circ$$

$$\Leftrightarrow x + y + z = 90^\circ$$

$$\begin{cases} y + z = 90^\circ - x \\ x + y = 90^\circ - z \end{cases}$$

例) $\angle \alpha$ の大きさを求めよ。



解) 接弦定理より, $\angle BAD = \angle ACB$
 $= 80^\circ$

$$\begin{aligned} \therefore \angle \alpha &= \angle BAC + \angle BAD \\ &= 50^\circ + 80^\circ \\ &= 130^\circ \end{aligned}$$

(4) 方べきの定理

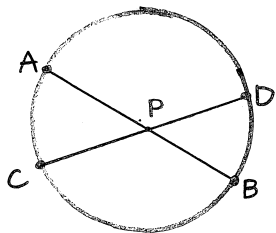
点Pを通る2直線が

円Oとそれぞれ2点A, Bと2点C, Dで交わるとき

$$PA \cdot PB = PC \cdot PD$$

証明

(i) 点Pが円Oの内部にあるとき



証明

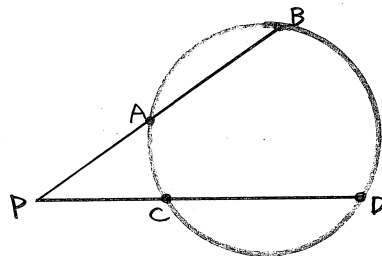
$\triangle PAC \sim \triangle PDB$ であることから、

$$PA \cdot PB = PC \cdot PD$$

$$\therefore PA \times PB = PC \times PD$$

(証明終)

(ii) 点Pが円Oの外部にあるとき



証明

$\triangle PAC \sim \triangle PDB$ であることから

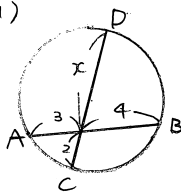
(i) と同様にして

$$PA \times PB = PC \times PD \quad (\text{証明終})$$

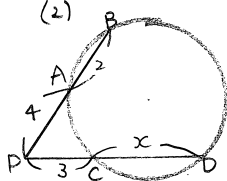
さらに、Pから円の接線をひき、
その接点をTとすると、
接弦定理より、 $\angle PTC = \angle PDT$
 $\therefore \triangle PCT \sim \triangle PTD$
よって、 $PC \cdot PT = PT \cdot PD$
 $\therefore PC \times PD = PT^2$

(例) 次の図において、xの値を求めよ。

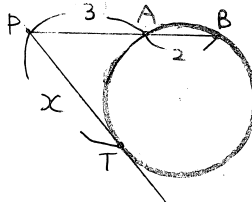
(1)



(2)



(3)



(T: 接点)

解)

(1) 方べきの定理より

$$3 \times 4 = 2 \times x$$

$$\therefore x = 6 //$$

(2) 方べきの定理より

$$4 \times 6 = 3 \times (3 + x)$$

$$\Leftrightarrow 24 = 9 + 3x$$

$$\Leftrightarrow 3x = 15$$

$$\Leftrightarrow x = 5 //$$

(3) 方べきの定理より、

$$3 \times 5 = x^2$$

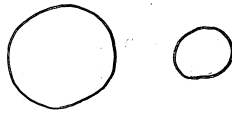
$$x^2 = 15 \text{ から}$$

$$x = \sqrt{15} //$$

(5) 2 円の関係

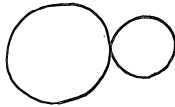
r_1, r_2 : 半径 ($r_1 > r_2$)

- (i) 互いに外にある
 $r_1 + r_2 < d$

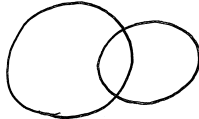


d : 中心間の距離

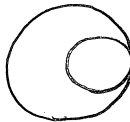
- (ii) 外接する
 $r_1 + r_2 = d$



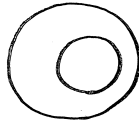
- (iii) 2 点で交わる
 $r_1 - r_2 < d < r_1 + r_2$



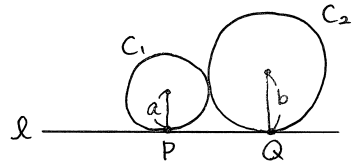
- (iv) 内接する
 $r_1 - r_2 = d$



- (v) 一方が他方を含む
 $r_1 - r_2 > d$



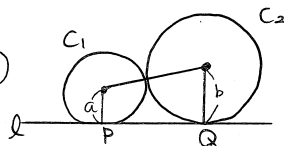
- ⑦ 図のように、直線 l と半径 a, b ($0 < a < b$) の 2 個の円 C_1, C_2 が互いに接している。
 l と C_1, C_2 との接点をそれぞれ P, Q とする。
このとき、 PQ の長さを a, b で表せ。



解)

$$\begin{aligned} PQ^2 + (b-a)^2 &= (a+b)^2 \text{ より} \\ PQ^2 &= (a+b)^2 - (b-a)^2 \\ &= a^2 + 2ab + b^2 - (b^2 - 2ab + a^2) \\ &= 4ab \end{aligned}$$

$$\therefore PQ = 2\sqrt{ab} //$$



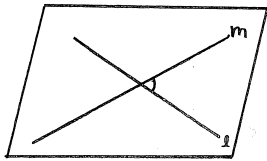
<空間図形>

1. 直線と平面

(i) 位置関係

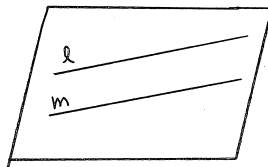
(i) 2直線

(ア) 1点で交わる



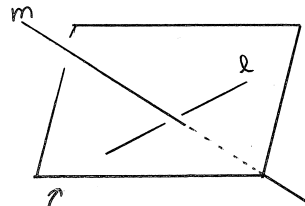
↑
1つの平面上にある

(イ) 平行である



↑

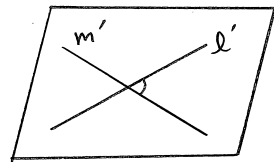
(ウ) ねじれの位置にある



↑
1つの平面上にない

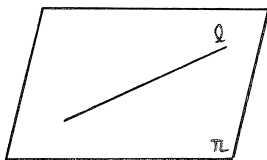
l と m のなす角が直角のとき、
「 l と m は垂直である」といい、
 $l \perp m$ と書く。

$l \parallel l'$
 $m \parallel m'$



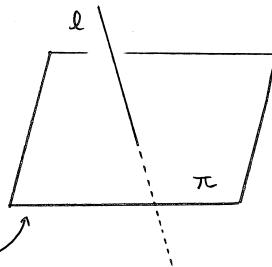
(ii) 直線と平面

(ア) 直線が平面に含まれる
(l が π 上にある)

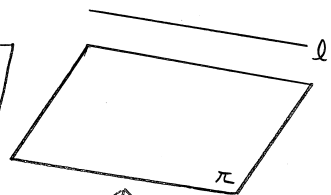


↑
 l と π は共有点をもつ

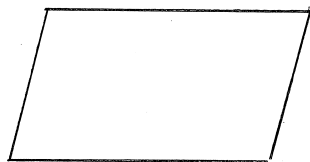
(イ) 1点で交わる



(ウ) 平行である



↑
 l と π は共有点をもたない



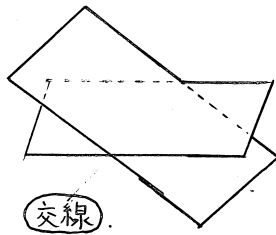
直線 l が、平面 π 上のすべての直線に
垂直であるとき、直線 l は

「垂直である」
「直交する」 } といふ

$l \perp \pi$ とかく。

(iii) 2 平面

(ア) 交わる

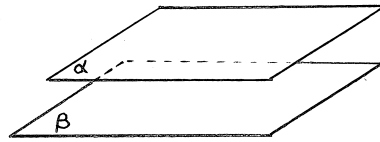


(交線)

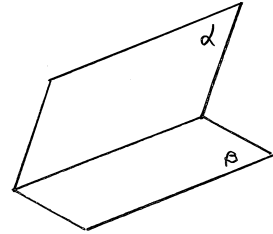
→ 「2 平面のなす角」

交わる 2 平面の交線上の点から
各平面上で、交線に垂直にひいた
2 直線のなす角。

(イ) 平行である



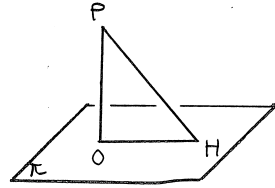
$\alpha \parallel \beta$



2 平面 α, β のなす角が 90° のとき、
 α と β は { 「垂直である」といって $\alpha \perp \beta$ と書く。
「直交する」

(2) 三垂線の定理

平面 π 上の直線 l , 直線 l 上の点 H
直線 l 上にない平面上 π 上の点 O
平面 π 上にない点 P があるとき



- (1) $OP \perp \pi$, $OH \perp l$ ならば $PH \perp l$
- (2) $OP \perp \pi$, $PH \perp l$ ならば $OH \perp l$
- (3) $PH \perp l$, $OH \perp l$, $OH \perp OP$ ならば $OP \perp \pi$

証明

- (1) 「 $OP \perp \pi$, $OH \perp l$ ならば $PH \perp l$ 」を示す。

$OP \perp \pi$ により、 $OP \perp l$ よって、 l は平面 OHP に垂直である。
 PH は平面 OHP 上にあるので、 $PH \perp l$ (証明終)

- (2) 「 $OP \perp \pi$, $PH \perp l$ ならば $OH \perp l$ 」を示す。

$OP \perp \pi$ により、 $OP \perp l$ よって l は平面 OHP に垂直である。
 OH は平面 OHP 上にあるので、 $OH \perp l$ (証明終)

- (3) 「 $PH \perp l$, $OH \perp l$, $OH \perp OP$ ならば $OP \perp \pi$ 」を示す。

$PH \perp l$, $OH \perp l$ より、 l は平面 OHP に垂直である。
よって、 $l \perp OP$... ②

①, ②より OP は l と OH を含む平面 π と垂直である。
つまり、 $OP \perp \pi$ (証明終)

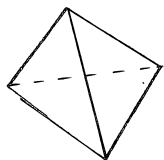
2. 多面体

(1) 正多面体

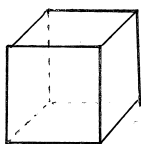
(ア) 各面はすべて合同な正多角形

(イ) 各頂点に集まる面の数はすべて等しい

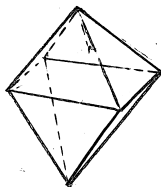
正四面体



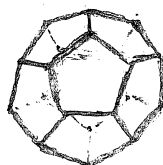
正六面体



正八面体



正十二面体



正二十面体



面の形

→ 正三角形

正方形

正三角形

正五角形

正三角形

各頂点に
集まる面の数

3

3

4

3

5

面の形が正三角形(1つの内角 60°) → 1つの頂点のまわり3コか4コか5コ

" 正方形(1つの内角 90°) →

" 3コ

" 正五角形(1つの内角 108°) →

" 3コ

(2) オイラーの多面体定理

凸多面体の頂点の数を v , 辺の数を e , 面の数を f とすると,

$$f - e + v = 2$$

正四面体 正六面体 正八面体 正十二面体 正二十面体

f	4	6	8	12	20
e	6	12	12	30	30
v	4	8	6	20	12