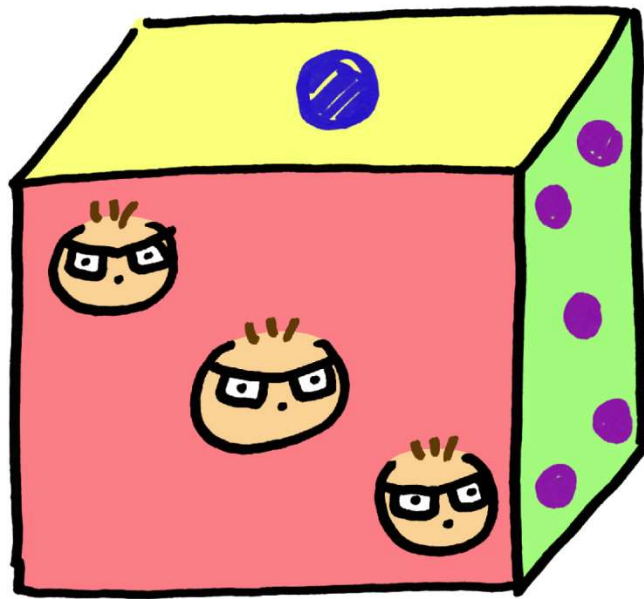


数学 A

05 場合の数と確率



<講義ノート>

場合の数と確率

<場合の数 編>

1 順列

- (1) 順列の基本
- (2) 条件付きの順列
- (3) 同じもののある順列
- (4) 円順列・数珠順列
- (5) 重複順列

2 組み合わせ

- (1) 組み合わせの基本
- (2) 重複組み合わせ

【頻出問題編】

- 道路問題
- 対角線問題
- 組分け問題

<確率 編>

3 確率

- (1) 確率の基本
- (2) 集合との融合
- (3) 独立試行
- (4) 反復試行
- (5) 条件つき確率
- (6) 期待値

【頻出問題編】

- さいころ
- じゃんけん
- くじ
- 点の移動

(数列(数B)融合)

- 最大確率
- 確率と漸化式

1. 順列

(1) 順列の基本

場所を用意する。

例 A, B, C, D, E の 5 人 いる。

(1) この 5 人を 1 列に並べる方法は何通りあるか？

(2) この 5 人の中から 3 人を選んで 1 列に並べる方法は何通りあるか？

解)

(1) 

$$5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120 \text{ (通り)} //$$

(2) 

$$5 \times 4 \times 3 = 60 \text{ (通り)} //$$

例)

$$(1) 4! = 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$$

$$(2) 7! = 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 5040$$

$$(3) {}_6P_2 = 6 \times 5 = 30$$

$$(4) {}_7P_4 = 7 \times 6 \times 5 \times 4 = \frac{7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3!}{3!} = \frac{7!}{3!}$$

$$(5) {}_8P_3 = 8 \times 7 \times 6 = \frac{8 \times 7 \times 6 \times 5!}{5!} = \frac{8!}{5!}$$

まとめ

自然数 n に対して

$$n! = n \times (n-1) \times (n-2) \times \cdots \times 2 \times 1$$

$${}_nP_r = n \times (n-1) \times (n-2) \times \cdots \times \{n-(r-1)\} = \frac{n!}{(n-r)!}$$

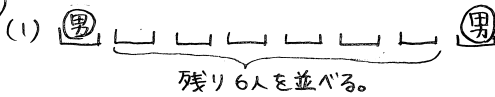
(2) 条件付きの順列

条件の部分から考える。

(例1) 男子5人、女子3人がいる。次の並び方は何通りあるか答えよ。

- (1) 男子が両端にくるように8人が1列に並ぶ。
- (2) 女子3人が隣り合うように8人が1列に並ぶ。
- (3) 女子3人が他のどの女子とも隣り合わないように8人が1列に並ぶ。

解)



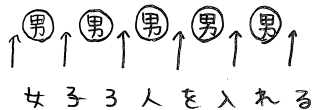
$$\begin{aligned} 5 \times 4 \times 6! &= 20 \times 720 \\ &= 14400 \text{ (通り)} // \end{aligned}$$

(2) 「隣り合う」 $\Rightarrow$ 1つにまとめて考える。



$$\begin{aligned} \text{女子3人をひとつにまとめて考えると、} 6! \times 3! &= 720 \times 6 \\ &= 4320 \text{ (通り)} // \end{aligned}$$

(3) 「隣り合わない」 $\Rightarrow$ 後でバラバラに入れる。



先に男子を並べ、後から女子を入れていくので

$$\begin{aligned} 5! \times 6 \times 5 \times 4 &= 120 \times 120 \\ &= 14400 \text{ (通り)} // \end{aligned}$$

例2 5個の数字 0, 1, 2, 3, 4 から異なる 3 個の数字を選んで
3桁の整数を作る。次の数はいくつできるか。

(1) 3桁の整数

(2) 偶数

(3) 3の倍数

解)

(1) $\square \square \square$
 $4 \times 4 \times 3 = 48 \text{ (個)} //$

(2) (i) - の位が 0 のとき

$\square \square \square$
 $4 \times 3 \times 1 = 12 \text{ (個)}$

(ii) - の位が 0 ではないとき

$\square \square \square$
 $3 \times 3 \times 2 = 18 \text{ (個)}$

(i), (ii) より

$12 + 18 = 30 \text{ (個)} //$

(3) ただし 3 の倍数となる 3 個の数字の組は

(0, 1, 2), (0, 2, 4), (1, 2, 3), (2, 3, 4)

$4 + 4 + 3! + 3! = 20 \text{ (個)} //$

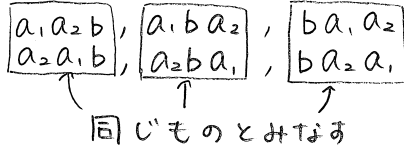
(3) 同じもののある順列

同じものとみなす!!

例1 3つの文字 a, a, b を1列に並べる方法は何通り?

(解1) aab, aba, baa の3通り,

(解2) a_1, a_2, b を1列に並べる方法は $3! = 6$ 通り



これを a_1 と a_2 の並び順 $2!$ であって $\frac{3!}{2!} = 3$ 通り //

例2 a, a, a, b, b, c を1列に並べる方法は何通りか?

解) $a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, c$ を1列に並べる方法は $6!$ 通り

このうち $\begin{cases} a_1, a_2, a_3 \text{ の並び順 } 3! \text{ 通り} \\ b_1, b_2 \text{ の並び順 } 2! \text{ 通り} \end{cases}$ は無視して

求める順列の総数は

$$\frac{6!}{3!2!} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{2} = 60 \text{ (通り)} //$$

まとめ

n 個のものを1列に並べるのに、 n 個のもののうち
 p 個が同じ、 q 個が同じ、 r 個が同じ、... のとき
並べ方の総数は、

$$\frac{n!}{p!q!r!\dots\dots} \text{ 通り } (p+q+r+\dots=n)$$

問 YOKOHAMA の 8 文字について

(1) 8 文字を1列に並べる方法は全部で何通りあるか?

(2) (1) の並べ方のうち、Y が M より左にあるような並べ方は何通りあるか?

解) (1) $\frac{8!}{2!2!} = 10080 \text{ (通り)} //$ (2) $\frac{8!}{2!2!2!} = 5040 \text{ (通り)} //$

(4) 円順列・数珠順列

↓
「1つを固定」 「裏返して、円順列として元と異なるときのみ、2でわる」

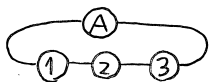
例 4つの球(A)(B)(C)(D)について。

(1) これらを円形に並べる方法は何通りあるか？

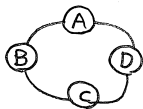
(2) 糸を通して首飾りを作る方法は何通りあるか？

解)

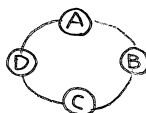
(1) (A)を固定して考えると (2) (1)の6通りのうち、例えば



$3! = 6$ 通り //



と



は円順列としては2通りだが
首飾りとしては1通り。

よって $\frac{6}{2} = 3$ 通り //

問 赤球1個，青球2個，白球5個ある。

(1) これらを1列に並べる方法は何通りあるか。

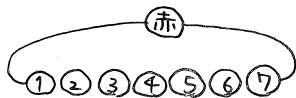
(2) これらを丸く円形に並べる方法は何通りあるか。

(3) これらの球に糸を通して首輪を作る方法は何通りあるか。

解)

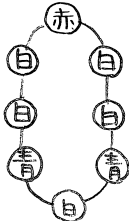
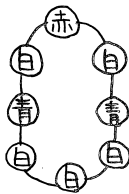
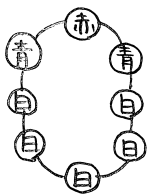
(1) $\frac{8!}{2!5!} = \frac{8 \times 7 \times 6}{2 \times 1} = 168$ (通り) //

(2) (赤)を固定して考えると



$\frac{7!}{2!5!} = \frac{7 \times 6}{2 \times 1} = 21$ (通り) //

(3) (2)の21通りのうち



の3通りは、裏返しても円順列として元と同じ。

残りの $21 - 3 = 18$ 通りは裏返すと円順列として元と異なるので、

$\frac{18}{2} + 3 = 12$ (通り) //

(5) 重複順列

基本は n^r

④ 1, 2, 3 の数字を用いて、4桁の数字はいくつできるか？

解)

$$\begin{array}{cccc} \boxed{1} & \boxed{2} & \boxed{3} & \boxed{1} \\ 3 \times 3 \times 3 \times 3 & = & 3^4 & \\ & = & 81 \text{ (個)}, & \end{array}$$

⑤ 0, 1, 2, 3, 4, 5 の 6 個の数字から重複を許して、4桁の整数をつくるとき、4でも5でも割り切れないものはいくつできるか。

解)

まず、4桁の整数は $\boxed{1} \boxed{2} \boxed{3} \boxed{4}$
 $5 \times 6 \times 6 \times 6 = 1080 \text{ (個)}$

このうち、4でも5でも割り切れないものについて。

$$5 \times 6 \times 9 + 5 \times 6 \times 6 \times 2 - 5 \times 6 \times 3 = 540 \text{ (個)}$$

$$\text{したがって、} 1080 - 540 = 540 \text{ (個)}.$$

2. 組み合わせ

(1) 組み合わせの基本

並べて並べない!

例 A, B, C, D, E, F の 6 人について考える。

(1) この 6 人の中から 3 人選んで 1 列に並べる方法は何通りあるか?

(2) この 6 人の中から 3 人選ぶ方法は何通りあるか?

解)

(1) $\square \square \square$

$$6 \times 5 \times 4 = 120 \text{ 通り}$$

$$(2) \frac{6 \times 5 \times 4}{3!} = \frac{6 \times 5 \times 4}{3 \times 2 \times 1} = 20 \text{ 通り}$$

$$(1) {}^nC_3 = \frac{7 \times 6 \times 5}{3 \times 2 \times 1} = \frac{{}^7P_3}{3!} = \frac{7!}{3!4!}$$

$$(2) {}^5C_2 = \frac{5 \times 4}{2 \times 1} = \frac{{}^5P_2}{2!} = \frac{5!}{2!3!}$$

$$(3) {}^8C_5 = \frac{8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4}{5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1} = \frac{{}^8P_5}{5!} = \frac{8!}{5!2!} = {}^8C_3$$

まとめ

異なる n 個のものから r 個取り出して 1 組としたものを、「 n 個のものから r 個取る組み合わせ」といい「 nC_r 」と表すことにする。

$$\begin{aligned} {}^nC_r &= \frac{{}^nP_r}{r!} \\ &= \frac{n!}{r!(n-r)!} = {}^nC_{n-r} \end{aligned}$$

例 A 組 5 人, B 組 4 人の各組から 3 人ずつ 6 人のメンバーを選ぶ方法は何通りあるか?

解)

$$\begin{aligned} {}^5C_3 \times {}^4C_3 &= {}^5C_2 \times {}^4C_1 \\ &= \frac{5 \times 4}{2 \times 1} \times \frac{4}{1} \\ &= 40 \text{ (通り)} \end{aligned}$$

(2)重複組み合わせ

準備 (整数解方程式)

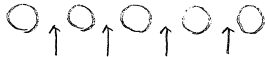
例) 方程式 $x + y + z = 5$ をみたす整数 x, y, z の組について。

(1) $x \geq 1, y \geq 1, z \geq 1$ となる組はいくつあるか。

(2) $x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0$ となる組はいくつあるか。

解)

(1) $x + y + z = 5 \quad (x \geq 1, y \geq 1, z \geq 1)$



4ヶ所のうち、

2ヶ所に仕切り

$${}^4C_2 = \frac{4 \times 3}{2 \times 1} = 6 \text{ (組)} //$$

(2) $x + y + z = 5 \quad (x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0)$



5つの0と2本の1の並べ方の総数と同じ。

$$\frac{7!}{5!2!} = \frac{7 \times 6}{2 \times 1} = 21 \text{ (組)} //$$

問) かき、りんご、みかんが店頭にたくさんある。

全部で5個買うとき、買い方は何通りあるか。

解)

かき x 個、りんご y 個、みかん z 個買うとすると、

$$x + y + z = 5 \quad (x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0)$$

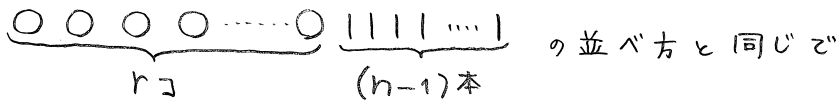
この整数解の組の個数が、買い方の通り数と一致する。

上の例)の(2)と同じで21通り。

まとめ

異なる n 種類のものの中から重複を許して r 個取る組み合わせの総数

$$x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_n = r \quad (x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \dots, x_n \geq 0)$$



$$\frac{(r+n-1)!}{r!(n-1)!} = \frac{(n+r-1)!}{r!(n-1)!} = {}^{n+r-1}C_r \text{ 通り}$$

上の問)では、 ${}^3H_5 = 3+5-1 {}^5C_3$

$$= {}^7C_3$$

$$= {}^7C_2$$

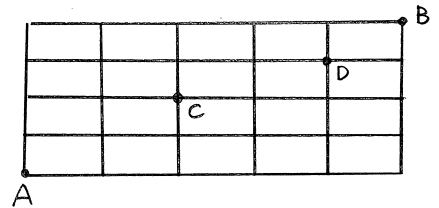
$$= \frac{7 \times 6}{2 \times 1} = 21 \text{ (通り)} //$$

< 頻出問題編 >

■ 道路問題

「同じもののある順列」でも「組み合わせ」でも。

④ 右図のような道をもつ町がある。
次の場合の最短経路は何通りあるか。



- (1) A から B まで
- (2) A から, C が, D を通って B まで
- (3) A から, C または D を通って B まで

解)

(1) (解1) 同じもののある順列

⑤ ⑥ ⑦ ⑧ ⑨ の並べ方の総数と同じで、

$$\frac{9!}{5!4!} = \frac{9 \times 8 \times 7 \times 6}{4 \times 3 \times 2 \times 1} = 126 \text{ (通り)}。$$

(解2) 組み合わせ

9 回の移動のうち、どの 4 回を「縦」にするか考え、
(どの 5 回を「横」にするか)

$${}^9C_4 = \frac{9 \times 8 \times 7 \times 6}{4 \times 3 \times 2 \times 1} = 126 \text{ (通り)}。$$

(9C5)

(2) A → C → D → B

$${}^4C_2 \times {}^3C_1 \times {}^2C_1 = 6 \times 3 \times 2 \\ = 36 \text{ (通り)}。$$

(3) A から B までの最短経路のうち

C, D, C が, D を通る経路を $h(C)$, $h(D)$, $h(C \cap D)$ のように表すと、

$$\begin{aligned} h(C \cup D) &= h(C) + h(D) - h(C \cap D) \\ &= {}^4C_2 \times {}^5C_2 + {}^7C_3 \times {}^2C_1 - 36 \\ &= 6 \times 10 + 35 \times 2 - 36 \\ &= 60 + 70 - 36 \\ &= 94 \text{ (通り)}。 \end{aligned}$$

■ 対角線問題

辺を除くのを忘れずに。

④ 正八角形 ABCDEFGH について。

(1) 対角線の本数を求めよ。

(2) この正八角形の 3 つの頂点を結んでできる三角形はいくつあるか？

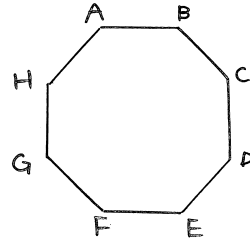
(3) (2) の三角形のうち、正八角形と辺を共有しないものはいくつあるか？

解

$$(1) 8C_2 - 8 = 28 - 8 \\ = 20 \text{ (本) } //$$

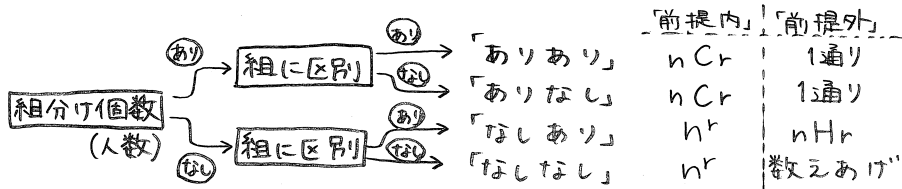
$$(2) 8C_3 = \frac{8 \times 7 \times 6}{3 \times 2 \times 1} \\ = 56 \text{ (個) } //$$

$$(3) 56 - 4 \times 8 - 8 = 56 - 32 - 8 \\ = 16 \text{ (個) }$$



■ 組分け問題

大前提 分けるもの(人)に区別がある。



- 例1 6人を2人ずつ A, B, Cの3組に分ける方法は?
 例2 6人を2人ずつ 3組に分ける方法は?
 例3 6人を A, B, Cの3組に分ける方法は?(0人の組OK)
 例4 6人を A, B, Cの3組に分ける方法は?(0人の組が×)
 例5 6人を 3組に分ける方法は?

例1 = $6C_2 \times 4C_2 (\times 2C_2) = 90$ (通り) //

例2 = $\frac{90}{3!} = 15$ (通り) //

例3 = $3^6 = 729$ (通り) //

例4 = $3^6 - 3C_2 (2^6 - 2) - 3 = 540$ (通り) //

例5 = $\frac{540}{3!} = 90$ (通り) //

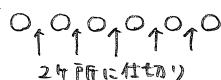
以下、机かんに区別はしないものとする。

- 例6 机かん6個を、2個ずつ A, B, Cの3組に分ける方法は? → 1通り //
 例7 机かん6個を2個ずつ 3組に分ける方法は? → 1通り //
 例8 机かん6個を A, B, Cの3組に分ける方法は?(0の組OK)
 例9 机かん6個を A, B, Cの3組に分ける方法は?(0の組が×)
 例10 机かん6個を 3組に分ける方法は? →
 (1, 1, 4), (1, 2, 3), (2, 2, 2) の3通り //

例8 = $A + B + C = 6$ ($A \geq 0, B \geq 0, C \geq 0$)

${}_3H_6 = 3+6-1 C_6$
 $= 8C_6 = 8C_2 = 28$ (通り) //

例9 = $A + B + C = 6$ ($A \geq 1, B \geq 1, C \geq 1$)



${}_5C_2 = 10$ (通り) //

3. 確率

(1) 確率の基本

ある試行において、起こりうる結果が N 通りあり、
各結果からなる根元事象は同様に確からしいとする。

(※1)

(※2)

この試行における全事象 U は、 $n(U) = N$ 個の根元事象からなる。
ここで、事象 A が $n(A) = a$ 個の根元事象からなるとき
事象 A の起こる確率 $P(A)$ は、

$$P(A) = \frac{\text{事象 } A \text{ の起こる場合の数}}{\text{起こりうるすべての場合の数}}$$
$$= \frac{n(A)}{n(U)} = \frac{a}{N}$$

(※1) 根元事象

それ以上細かく分けることのできない事象で、
1 個の要素だけからなる集合で表される事象

(※2) 同様に確からしい

ある試行において起こりうるすべての結果に対しこ
どの結果も同じ程度に起こることが期待できるとき
その試行の 1 つの結果からなる根元事象は
同様に確からしいという

(例) 男子 5 人、女子 6 人が 1 列に並ぶとき、次の各問に答えよ。

(1) 特定の男女 2 人が隣り合う確率を求めよ。

(2) 男子どうしが隣り合わない確率を求めよ。

解) 男子 5 人、女子 6 人の計 11 人の順列は、全部で $11!$ 通り。

(1) (男女)(男男男男女女女女女)

$$\frac{10! \times 2!}{11!} = \frac{2}{11} //$$

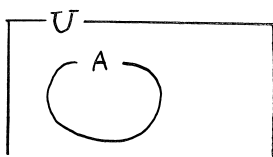
(2) (女)(女)(女)(女)(女)(女)(男)(男)(男)(男)(男)
↑ ↑ ↑ ↑ ↑ ↑ ↑
男子 5 人をバラバラに入れる

$$\frac{6! \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3}{11!} = \frac{6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3}{11 \times 10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}$$
$$= \frac{1}{22} //$$

(2) 集合との融合

(i) 余事象の確率

Aの余事象 「Aが起こらない」という事象 $\bar{A}$



$$P(\bar{A}) = 1 - P(A)$$

基本性質

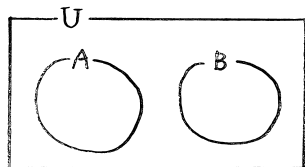
- 任意の事象 A に対して $0 \leq P(A) \leq 1$
- 全事象 U の確率: $P(U) = 1$
- 空事象 $\emptyset$ の確率: $P(\emptyset) = 0$

(ii) 和事象の確率 (確率の加法定理)

AとBの和事象 「AまたはBが起こる」という事象 $A \cup B$

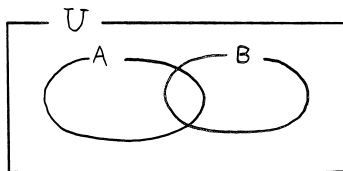
(ア) AとBが排反のとき

$$A \cap B = \emptyset$$



$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

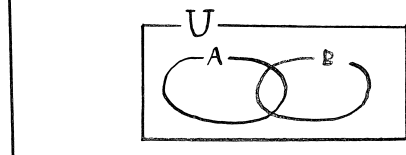
(イ) AとBが排反でないとき



$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

積事象

AとBの積事象 「AもBもともに起こる」という事象 $A \cap B$



例 1から10までの番号のついた10枚のカードから3枚のカードを同時にひく。
このとき、1または2のカードをひく確率を求めよ。

(解1) 余事象

余事象は「1も2も含まない」

$$\begin{aligned} & \therefore 1 - \frac{{}^8C_3}{{}^{10}C_3} \\ & = 1 - \frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{10 \cdot 9 \cdot 8} \\ & = 1 - \frac{7}{15} = \frac{8}{15} \end{aligned}$$

(解2) 和事象

ひいた3枚の中に

- ① が含まれている、という事象をA
- ② が含まれている、という事象をB

$$\begin{aligned} P(A \cup B) &= P(A) + P(B) - P(A \cap B) \\ &= \frac{1 \times {}^9C_2}{{}^{10}C_3} + \frac{1 \times {}^9C_2}{{}^{10}C_3} - \frac{1 \times 1 \times {}^8C_1}{{}^{10}C_3} \\ &= \frac{9C_2 + 9C_2 - 8C_1}{{}^{10}C_3} \\ &= \frac{36 + 36 - 8}{120} \\ &= \frac{64}{120} = \frac{8}{15} \end{aligned}$$

(3) 独立試行

2つの試行 S, T について、それぞれの試行の結果が、他方の試行の結果と無関係であるとき、 S と T は独立な試行であるという。
(2つの試行が独立でないとき、2つの試行は「従属」であるという)

独立な試行 S, T を行ったとき、
試行 S の結果、事象 A が起こり、かつ、試行 T の結果事象 B が起こる確率は
 $P(A) \times P(B)$ である。

⑨ A, B, C の3人が標的に向かって球を投げるとき、それぞれが的に当てる確率は $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}$ である。このとき、

(1) 3人とも的に当てる確率を求めよ。

(2) 少なくとも1人が的に当てる確率を求めよ。

解)

$$(1) \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{24} //$$

(2) 余事象は「3人とも的に当たらない」

$$1 - (1 - \frac{1}{2}) \times (1 - \frac{1}{3}) \times (1 - \frac{1}{4}) = 1 - \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} \times \frac{3}{4} \\ = \frac{3}{4} //$$

(4) 反復試行

① 例 1つのさいころを4回ふる。4回のうち2回だけ偶数の目が出る確率を求めよ。

解

$$\left. \begin{array}{ccccccc} \textcircled{偶} & \textcircled{偶} & \textcircled{奇} & \textcircled{奇} & (\frac{1}{2})^2 \times (\frac{1}{2})^2 \\ \textcircled{偶} & \textcircled{奇} & \textcircled{偶} & \textcircled{奇} & (\frac{1}{2})^2 \times (\frac{1}{2})^2 \\ \textcircled{偶} & \textcircled{奇} & \textcircled{奇} & \textcircled{偶} & (\frac{1}{2})^2 \times (\frac{1}{2})^2 \end{array} \right\} {}^4C_2 = 6 \text{通り}$$

これらが ${}^4C_2 (=6)$ 通りであるので

$$\begin{aligned} {}^4C_2 \times (\frac{1}{2})^2 \times (\frac{1}{2})^2 &= 6 \times \frac{1}{4} \times \frac{1}{4} \\ &= \frac{3}{8} \text{ //} \end{aligned}$$

まとめ

1回の試行で事象Aが起こる確率をPとする。

これをn回繰り返して行くと、ちょうどr回事象Aが起こる確率は

$${}_nC_r \times P^r \times (1-P)^{n-r}$$

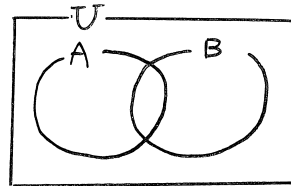
(5) 条件付き確率

一つの試行における2つの事象A, Bについて。

事象Aが起こったとして、そのときに事象Bの起こる確率を、
「Aが起こったときのBが起こる条件付き確率」といい、 $P_A(B)$ で表す。

$$P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} \quad (P(A) \neq 0)$$

$$\begin{aligned} P_A(B) &= \frac{n(A \cap B)}{n(A)} \\ &= \frac{\frac{n(A \cap B)}{n(U)}}{\frac{n(A)}{n(U)}} \end{aligned}$$



例1 1個のさいころを投げるとき、出た目が偶数であるという事象をA
出た目が3の倍数であるという事象をBとすると、次の確率を求めよ。

(1) $P(A \cap B)$

(2) $P(A \cup B)$

(3) $P_A(B)$

解)

(1) $P(A \cap B) = \frac{1}{6} //$

(3) $P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$

$$= \frac{\frac{1}{6}}{\frac{3}{6}} = \frac{1}{3} //$$

(2) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

$$\begin{aligned} &= \frac{3}{6} + \frac{2}{6} - \frac{1}{6} \\ &= \frac{4}{6} = \frac{2}{3} // \end{aligned}$$

乗法定理

2つの事象A, Bがともに起こる確率 $P(A \cap B)$ は

$$P(A \cap B) = P(A) \times P_A(B)$$

例2 10本中3本当たりのくじがある。

A, Bがこの順にこのくじをひくとき(非復元抽出)

AもBも当たる確率を求めよ。

解)

$$P(A \cap B) = \frac{3}{10} \times \frac{2}{9} = \frac{1}{15} //$$

(6) 期待値

- (例) 1等の賞金 1000円のくじ10本
2等の賞金 500円のくじ20本
3等の賞金 200円のくじ20本のくじがある。
このくじを1本500円で買う?

解) $1000 \times 10 + 500 \times 20 + 200 \times 20 = 24000$ (円)
1本の価値は $24000 \div 50 = 480$ (円)

まとめ

一般に、ある試行において、変数 X が
 $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ のいずれかの値をとり、
各値をとる確率がそれぞれ $p_1, p_2, p_3, \dots, p_n$ であるならば

$$m = x_1 p_1 + x_2 p_2 + x_3 p_3 + \dots + x_n p_n$$

を X の「期待値」という。

- (例1) 箱の中に10点、20点、30点、40点、50点のカードが
それぞれ2枚、3枚、3枚、1枚、1枚入っている。
カードを箱から1枚取り出すときの得点の期待値を求めよ。

解) 表にまとめると、
右のようになる。

点数	10	20	30	40	50
確率	$\frac{2}{10}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$

よって得点の期待値は

$$10 \times \frac{2}{10} + 20 \times \frac{3}{10} + 30 \times \frac{3}{10} + 40 \times \frac{1}{10} + 50 \times \frac{1}{10}$$

$$= \frac{20 + 60 + 90 + 40 + 50}{10} = 26 \text{ (点)}$$

例2

1から6までの数字の中から、重複しないように3つの数字を無作為に選んだとき、その中の最大の数字を X とする。

X の期待値を求めよ。

解) X のとりうる値は 3, 4, 5, 6

$$X=3 \text{ となる確率は } \frac{{}_3C_3}{{}_6C_3} = \frac{1}{20}$$

$$X=4 \text{ となる確率は } \frac{{}_4C_2}{{}_6C_3} = \frac{3}{20}$$

$$X=5 \text{ となる確率は } \frac{{}_5C_2}{{}_6C_3} = \frac{6}{20}$$

$$X=6 \text{ となる確率は } \frac{{}_6C_2}{{}_6C_3} = \frac{10}{20}$$

求める期待値は、

$$\begin{aligned} 3 \times \frac{1}{20} + 4 \times \frac{3}{20} + 5 \times \frac{6}{20} + 6 \times \frac{10}{20} &= \frac{3 + 12 + 30 + 60}{20} \\ &= \frac{105}{20} \\ &= \frac{21}{4} // (= 5.25 //) \end{aligned}$$

○最大確率

$\frac{P_{n+1}}{P_n} > 1$ の間, 確率 P_n は増加する。

$\left\{ \begin{array}{l} \sim \text{が} n \text{ 回起こる確率} \\ \sim \text{が} n \text{ 番となる確率} \end{array} \right.$ など。

① 1枚の硬貨を繰り返し投げ、表が4回出たところで硬貨投げを終了する。終了するまでに硬貨を投げた回数が n となる確率を P_n ($n \geq 4$) とする。

(1) P_4 と P_5 を求めよ。

(2) P_n を n を用いて表せ。

(3) $\frac{P_{n+1}}{P_n}$ を n を用いて表せ。

(4) P_n を最大にする n の値をすべて求めよ。

また, そのときの P_n を求めよ。

解) (1) P_4 は、硬貨を4回投げるとき、4回続けて表が出る確率。

$$\therefore P_4 = \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{1}{16} //$$

P_5 は、硬貨を5回投げるとき、5回目に4回目の表が出る確率。

①②③④⑤
 表3回, 裏1回 表

$$P_5 = \{ {}_4C_3 \times \left(\frac{1}{2}\right)^3 \times \frac{1}{2} \} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{8} //$$

(2) P_n は、硬貨を n 回投げるとき、 n 回目に4回目の表が出る確率。

($n \geq 4$)

①②③④...④⑤
 表3回, 裏($n-4$)回 表

$$\begin{aligned}
 P_n &= \{ {}_{n-1}C_3 \times \left(\frac{1}{2}\right)^3 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n-4} \} \times \frac{1}{2} \\
 &= \frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{3 \times 2 \times 1} \times \left(\frac{1}{2}\right)^{3+(n-4)+1} \\
 &= \frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{3 \times 2^{n+1}} //
 \end{aligned}$$

(3) (2) より, $n \geq 4$ のとき

$$\begin{aligned}
 \frac{P_{n+1}}{P_n} &= \frac{\frac{n(n-1)(n-2)}{3 \times 2^{n+2}}}{\frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{3 \times 2^{n+1}}} \\
 &= \frac{n}{2(n-3)} //
 \end{aligned}$$

$$(4) \frac{P_{n+1}}{P_n} > 1 \Leftrightarrow \frac{n}{2(n-3)} > 1$$

$$\Leftrightarrow n > 2(n-3)$$

$$\Leftrightarrow n < 6$$

$$\begin{cases} n \leq 5 \text{ のとき, } P_n < P_{n+1} \\ n = 6 \text{ のとき, } P_n = P_{n+1} \\ n \geq 7 \text{ のとき, } P_n > P_{n+1} \end{cases}$$

よって $P_4 < P_5 < P_6 = P_7 > P_8 > P_9 \dots$

したがって、最大にする n の値は 6, 7 //

$$\text{このとき } P_6 = \frac{5 \times 4 \times 3}{3 \times 2^7} = \frac{5}{32} //$$

○確率と漸化式

漸化式を作り、解く！

- ① 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 の数字が書かれた 8 枚のカードの中から 1 枚取り出して元に戻すことを n 回行う。この n 回の試行で、数字 8 のカードが取り出される回数が奇数である確率を P_n とすると、 P_n を n の式で表せ。

解) $P_1 = \frac{1}{8}$

1 回目

2 回目

$$\begin{aligned} P_2 &= P_1 \times \frac{7}{8} + (1 - P_1) \times \frac{1}{8} \\ &= \frac{1}{8} \times \frac{7}{8} + \frac{7}{8} \times \frac{1}{8} \\ &= \frac{7}{32} \end{aligned}$$

n 回目

$(n+1)$ 回目

$$\begin{aligned} P_{n+1} &= P_n \times \frac{7}{8} + (1 - P_n) \times \frac{1}{8} \\ &= \frac{3}{4} P_n + \frac{1}{8} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{よって、} P_1 &= \frac{1}{8}, P_{n+1} = \frac{3}{4} P_n + \frac{1}{8} \\ &(\alpha = \frac{3}{4} \alpha + \frac{1}{8} \text{ より, } \alpha = \frac{1}{2}) \end{aligned}$$

$$\therefore P_{n+1} - \frac{1}{2} = \frac{3}{4} (P_n - \frac{1}{2})$$

$$\begin{aligned} P_n - \frac{1}{2} &= (P_1 - \frac{1}{2}) \times \left(\frac{3}{4}\right)^{n-1} \\ &= -\frac{3}{8} \times \left(\frac{3}{4}\right)^{n-1} \\ &= -\frac{1}{2} \times \left(\frac{3}{4}\right)^n \end{aligned}$$

$$P_n = \frac{1}{2} \left\{ 1 - \left(\frac{3}{4}\right)^n \right\} //$$

< 頻出問題編 >

さいころ

独立試行のかたまり (反復)

例 1つのさいころを5回投げるとき、次の問いに答えよ。

- (1) 奇数の目が出た確率を求めよ。
- (2) 出る目の積が2の倍数となる確率を求めよ。
- (3) 出る目の積が6の倍数となる確率を求めよ。
- (4) 出る目の最小値が2となる確率を求めよ。

解 1回につき $\begin{cases} \text{奇数の目が出る確率は } \frac{3}{6} = \frac{1}{2} \\ \text{偶数の目が出る確率は } \frac{3}{6} = \frac{1}{2} \end{cases}$

(1) 奇数の目が出た4回、偶数の目が出た1回出るので

$${}^5C_4 \times \left(\frac{1}{2}\right)^4 \times \frac{1}{2} = 5 \times \frac{1}{16} \times \frac{1}{2} = \frac{5}{32} //$$

(2) 5回のうち、少なくとも1回は偶数の目が出る。

$$1 - \left(\frac{1}{2}\right)^5 = \frac{31}{32} //$$

(3) 5回のうち「少なくとも1回は2の倍数の目」かつ
「少なくとも1回は3の倍数の目」

$\begin{cases} \text{事象A: 5回とも奇数の目が出る} \\ \text{事象B: 5回とも3の倍数でない目が出る} \end{cases}$

とし、それぞれの起こる確率を $P(A)$, $P(B)$ のように表すと、
求める確率は、 $P(\overline{A \cap B}) = P(\overline{A \cup B})$

$$= 1 - P(A \cup B)$$

$$= 1 - \{P(A) + P(B) - P(A \cap B)\}$$

$$= 1 - \frac{3^5 + 4^5 - 2^5}{6^5}$$

$$= 1 - \frac{1235}{7776} = \frac{6541}{7776} //$$

(4) 5回とも2~6の目が出るが、少なくとも1回は2の目が出る。

$$\text{よって、} \left(\frac{5}{6}\right)^5 - \left(\frac{4}{6}\right)^5 = \frac{3125 - 1024}{7776}$$

$$= \frac{2101}{7776} //$$

<頻出問題編>

■じゃんけん

「誰が勝つか?」と「どの手で勝つか?」

例1) A, B の2人でじゃんけんをする。

- (1) A が勝つ確率を求めよ。
- (2) B が勝つ確率を求めよ。
- (3) あいこになる確率を求めよ。

解)
$$\left. \begin{array}{l} (1) \frac{1 \times 3}{3^2} = \frac{1}{3} \text{ 〃} \\ (2) \frac{1 \times 3}{3^2} = \frac{1}{3} \text{ 〃} \end{array} \right\} \text{勝負がつく確率は } \frac{2C_1 \times 3}{3^2} = \frac{2}{3}$$

(3) $1 - \frac{1}{3} - \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$ 〃 (別解) $\frac{3}{3^2}$

例2) 3人でじゃんけんをする。

- (1) 1人が勝つ確率を求めよ。
- (2) 2人が勝つ確率を求めよ。
- (3) あいこになる確率を求めよ。

解)
$$(1) \frac{{}^3C_1}{3^3} = \frac{1}{3} \text{ 〃}$$
$$(2) \frac{{}^3C_2}{3^3} = \frac{1}{3} \text{ 〃}$$

(3) $1 - \frac{1}{3} - \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$ 〃 (別解) $\frac{3 + 3!}{3^3} = \frac{3 + 6}{27} = \frac{1}{3} \text{ 〃}$

例3) 4人でじゃんけんをする。

- (1) 2人が勝つ確率を求めよ。
- (2) あいこになる確率を求めよ。

解)
$$(1) \frac{4C_2 \times 3}{3^4} = \frac{6}{3^3} = \frac{2}{9} \text{ 〃}$$
$$(2) 1 - \frac{(4C_1 + 4C_2 + 4C_3) \times 3}{3^4}$$
$$= 1 - \frac{14}{27}$$
$$= \frac{13}{27} \text{ 〃}$$

< 頻出問題編 >

くじ

基本 「従属試行」 応用 「くじの数だけ人を用意」(順列)

例 10本中3本当たりのくじがある。

1人1本ずつこのくじをひいていく。ただし、ひいたくじは戻さない。

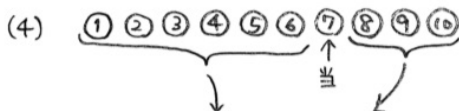
- (1) 1人目が当たる確率を求めよ。
- (2) 2人目が当たる確率を求めよ。
- (3) 3人目が当たる確率を求めよ。
- (4) 7人目が当たる確率を求めよ。

解)

$$(1) \frac{3}{10} //$$

$$(2) \frac{3}{10} \times \frac{2}{9} + \frac{7}{10} \times \frac{3}{9} = \frac{6+21}{90} \\ = \frac{27}{90} = \frac{3}{10} //$$

$$(3) \frac{3}{10} \times \frac{2}{9} \times \frac{1}{8} + \frac{3}{10} \times \frac{7}{9} \times \frac{2}{8} + \frac{7}{10} \times \frac{3}{9} \times \frac{2}{8} + \frac{7}{10} \times \frac{6}{9} \times \frac{3}{8} = \frac{6+42+42+126}{720} \\ = \frac{216}{720} = \frac{3}{10} //$$



これら9人のうち2人が当たる

$$\frac{1 \times 9C_2}{10C_3} = \frac{\frac{9 \cdot 8}{2 \cdot 1}}{\frac{10 \cdot 9 \cdot 8}{3 \cdot 2 \cdot 1}} = \frac{3}{10} //$$

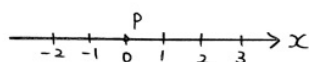
< 頻出問題編 >

■ 点の移動

行ったり来たりの反復試行!

- (例1) 数直線上の原点にある点Pを、1個のさいころを投げて、1か2の目が出たときは正の方向に1だけ進める。3か4の目が出たときは負の方向に1だけ進め、5か6の目が出たときはどちらにも進めないとする。このとき、
- (1) さいころを2回投げたとき、点Pが原点にある確率を求めよ。
 - (2) さいころを3回投げたとき、点Pが原点にある確率を求めよ。
 - (3) さいころを5回投げたとき、点Pが原点にある確率を求めよ。

解



正の方向への移動を $\oplus$ 、負の方向への移動を $\ominus$ 、進まないのを $\otimes$ と表す。

(1) 2回後に原点にいるのは $\oplus\ominus$ か $\otimes\otimes$

$$2C_1 \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} + \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{2}{9} + \frac{1}{9} = \frac{1}{3} //$$

(2) 3回後に原点にいるのは $\oplus\ominus\otimes$ か $\otimes\otimes\otimes$

$$3! \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} + \left(\frac{1}{3}\right)^3 = \frac{6}{27} + \frac{1}{27} = \frac{7}{27} //$$

(3) 5回後に原点にいるのは $\oplus\oplus\ominus\ominus\otimes$ か $\oplus\ominus\otimes\otimes\otimes$ か $\otimes\otimes\otimes\otimes\otimes$

$$\begin{aligned} \frac{5!}{2!2!1!} \left(\frac{1}{3}\right)^5 + \frac{5!}{1!1!3!} \left(\frac{1}{3}\right)^5 + \left(\frac{1}{3}\right)^5 &= \frac{30+20+1}{3^5} \\ &= \frac{51}{3^5} \\ &= \frac{17}{81} // \end{aligned}$$

(例2) 正六角形ABCDEFの頂点を動く点Pが点Aの位置にある。

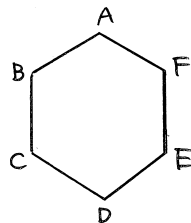
1個のさいころを投げて、3の倍数の目が出たときには、

Pは左回りに1個次の点に移り、他の目が出たときは、Pは右回りに1個次の点に進む。

(1) 3回投げたとき、点Pが点Bにある確率を求めよ。

(2) 4回投げたとき、点Pが点Aに戻る確率を求めよ。

(3) 6回投げたとき、点Pが点Aに戻る確率を求めよ。



解

(1) 左回りに2回、右回りに1回移動するので

$${}_3C_2 \times \left(\frac{1}{3}\right)^2 \times \frac{2}{3} = \frac{2}{9} //$$

(2) 左回りに2回、右回りに2回移動するので

$${}_4C_2 \times \left(\frac{1}{3}\right)^2 \times \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{8}{27} //$$

(3) 「左回りに6回」または「右回りに6回」

または「左回りに3回、右回りに3回」なので、

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{3}\right)^6 + \left(\frac{2}{3}\right)^6 + 6{}_3C_3 \times \left(\frac{1}{3}\right)^3 \times \left(\frac{2}{3}\right)^3 &= \frac{1+64+20 \times 8}{3^6} \\ &= \frac{225}{3^6} \\ &= \frac{25}{81} // \end{aligned}$$