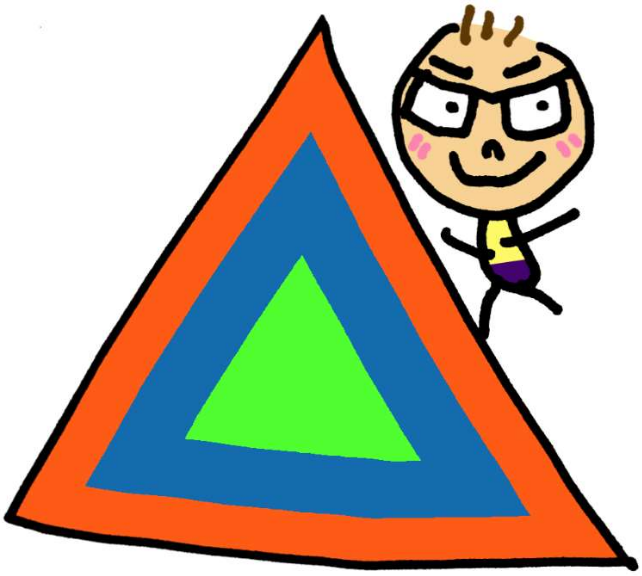
数学Ⅰ

03　図形と計量



＜講義ノート＞

図形と計量（三角比）

（前半）

１　**値**（２秒以内に）

２　**方程式**（値の逆バージョン）

３　**不等式**（単位円を書こう！）

４　**相互関係**（３つ）

５　**４５°以下の三角比に直す**

（後半）

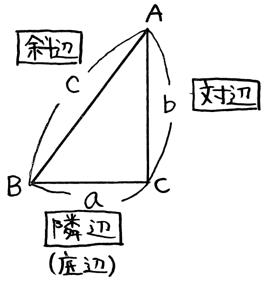
１　**正弦定理**

２　**余弦定理**

3　**三角形の面積**（３つの公式）

＜入試５頻出＞
①三角形のすべてを求める問題
②三角形の形状決定問題
③三角形の角の二等分線問題
④円に内接する四角形問題
⑤立体図形の問題

1. 値



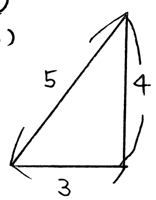
$$\sin\theta = \frac{(\text{対辺})}{(\text{斜辺})} = \frac{b}{c}$$

$$\cos\theta = \frac{(\text{隣辺})}{(\text{斜辺})} = \frac{a}{c}$$

$$\tan\theta = \frac{(\text{対辺})}{(\text{隣辺})} = \frac{b}{a}$$

例1

(1)



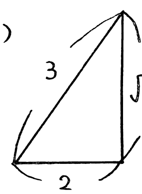
$\sin\theta = \frac{4}{5}$

$\cos\theta = \frac{3}{5}$

$\tan\theta = \frac{4}{3}$

$\sqrt{3^2+4^2} = 5$

(2)



$\sin\theta = \frac{2}{3}$

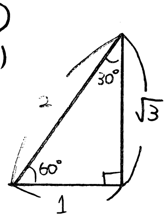
$\cos\theta = \frac{\sqrt{5}}{3}$

$\tan\theta = \frac{2}{\sqrt{5}} \left(= \frac{2\sqrt{5}}{5}\right)$

$\sqrt{3^2-2^2} = \sqrt{5}$

例2

(1)



$\sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\cos 60^\circ = \frac{1}{2}$

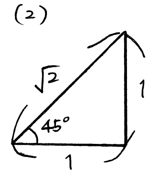
$\tan 60^\circ = \sqrt{3}$

$\sin 30^\circ = \frac{1}{2}$

$\cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\tan 30^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}}$

(2)

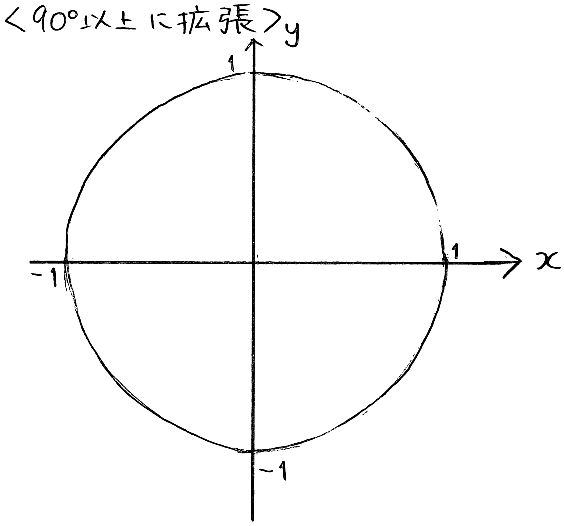


$\sin 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$\cos 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}}$

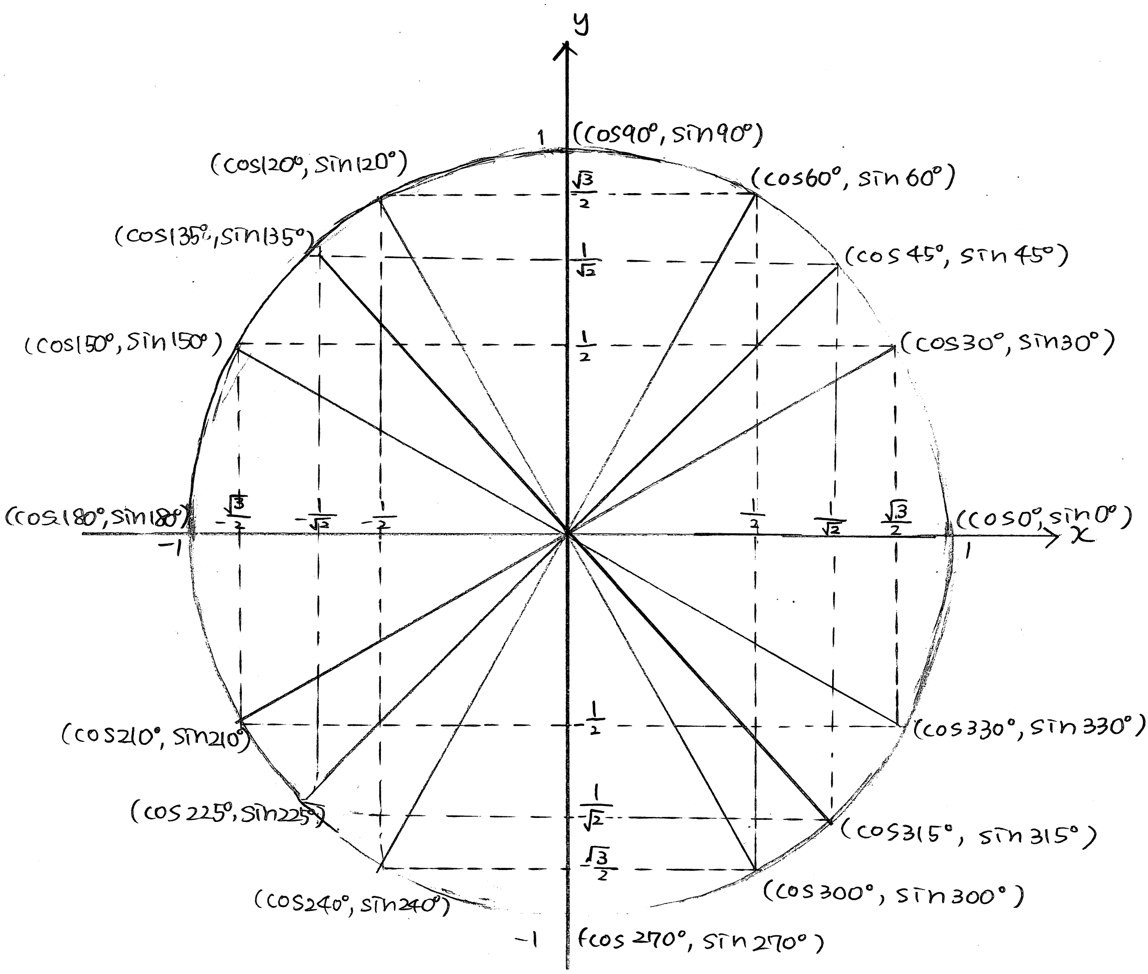
$\tan 45^\circ = 1$

＜90°以上に拡張＞



単位円において

$\boxed{\begin{array}{l}\cos\theta\text{は}x\text{座標}\\ \sin\theta\text{は}y\text{座標}\\ \tan\theta\text{は傾き}\end{array}}$



y
x
1
-1
(cos90°, sin90°)
(cos120°, sin120°)
(cos60°, sin 60°)
(cos135°, sin135°)
(cos 45°, sin 45°)
(cos150°, sin150°)
(cos30°, sin30°)
(cos180°, sin180°)
(cos 0°, sin 0°)
(cos210°, sin210°)
(cos330°, sin 330°)
(cos 225°, sin225°)
(cos315°, sin 315°)
(cos240°, sin240°)
(cos 300°, sin 300°)
(cos 270°, sin 270°)

2. 方程式

例 $0° \leqq \theta \leqq 360°$ のとき、次の方程式を解け。

(1) $\cos\theta = \frac{\sqrt{3}}{2} \rightsquigarrow \theta = 30°,\ 330°$ //

(2) $\sin\theta = \frac{1}{2} \rightsquigarrow \theta = 30°,\ 150°$ //

(3) $\tan\theta = \sqrt{3} \rightsquigarrow \theta = 60°,\ 240°$ //

(4) $\cos\theta = -\frac{1}{2} \rightsquigarrow \theta = 120°,\ 240°$ //

(5) $\sin\theta = -\frac{1}{\sqrt{2}} \rightsquigarrow \theta = 225°,\ 315°$ //

(6) $\tan\theta = -1 \rightsquigarrow \theta = 135°,\ 315°$ //

(7) $\cos\theta = -1 \rightsquigarrow \theta = 180°$ //

(8) $\sin\theta = 1 \rightsquigarrow \theta = 90°$ //

(9) $\tan\theta = -\frac{1}{\sqrt{3}} \rightsquigarrow \theta = 150°,\ 330°$ //

(10) $\cos\theta = \frac{1}{\sqrt{2}} \rightsquigarrow \theta = 45°,\ 315°$ //

(11) $\sin\theta = -1 \rightsquigarrow \theta = 270°$ //

(12) $\tan\theta = 0 \rightsquigarrow \theta = 0°$、$180°$ //

(13) $\cos\theta = 1 \rightsquigarrow \theta = 0°$ //

(14) $\sin\theta = 0 \rightsquigarrow \theta = 0°,\ 180°$ //

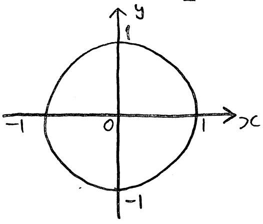
(15) $\tan\theta$ がない $\rightsquigarrow \theta = 90°,\ 270°$ //

(16) $\cos\theta = 0 \rightsquigarrow \theta = 90°,\ 270°$ //

3. 不等式 （特に$\tan\theta$は）単位円を書こう！

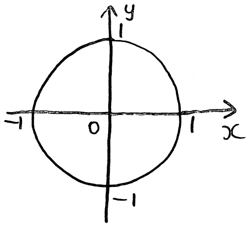
例 $0° \leqq \theta \leqq 180°$のとき、次の不等式を解け。

(1) $\sin\theta > \frac{\sqrt{3}}{2}$



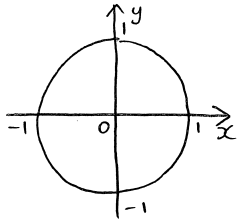
$60° < \theta < 120°$ //

(2) $\cos\theta \geqq -\frac{1}{\sqrt{2}}$



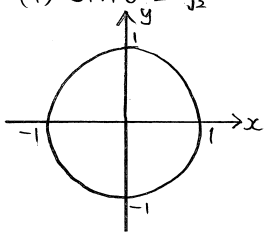
$0° \leqq \theta \leqq 135°$ //

(3) $\tan\theta \geqq \sqrt{3}$



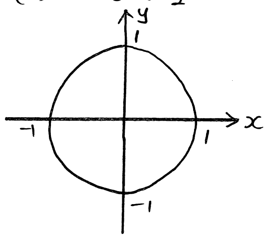
$60° \leqq \theta < 90°$ //

(4) $\sin\theta \leqq \frac{1}{\sqrt{2}}$



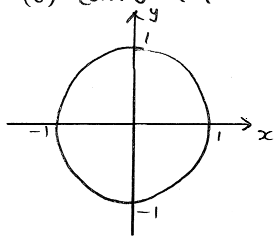
$0° \leqq \theta \leqq 45°,\ 135° \leqq \theta \leqq 180°$ //

(5) $\cos\theta < \frac{\sqrt{3}}{2}$



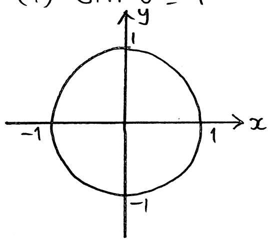
$30° < \theta \leqq 180°$ //

(6) $\tan\theta < 1$



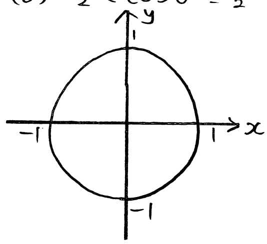
$0° \leqq \theta < 45°,\ 90° < \theta \leqq 180°$ //

(7) $\sin\theta \geqq 1$



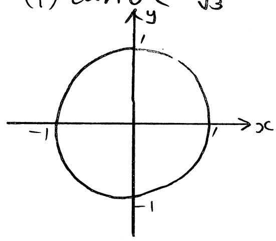
$\theta = 90°$ //

(8) $-\frac{1}{2} < \cos\theta \leqq \frac{\sqrt{3}}{2}$



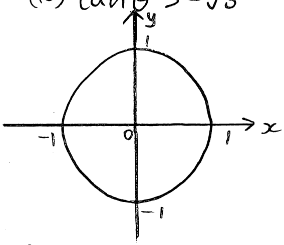
$30° \leqq \theta < 120°$ //

(9) $\tan\theta < -\frac{1}{\sqrt{3}}$



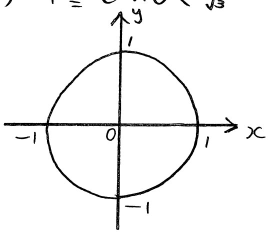
$90° < \theta < 150°$ //

(10) $\tan\theta > -\sqrt{3}$



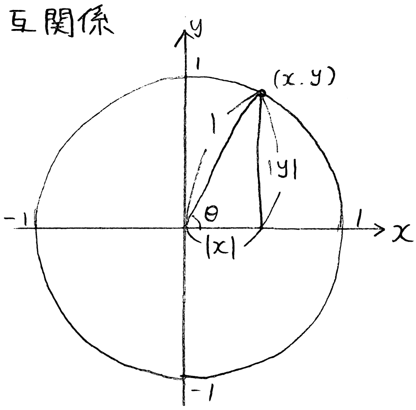
$0° \leqq \theta < 90°,\ 120° < \theta \leqq 180°$ //

(11) $-1 \leqq \tan\theta < \frac{1}{\sqrt{3}}$



$0° \leqq \theta < 30°,\ 135° \leqq \theta \leqq 180°$ //

4. 相互関係



$$\begin{cases} \cos\theta = x \\ \sin\theta = y \\ \tan\theta = \dfrac{y}{x} \end{cases}$$

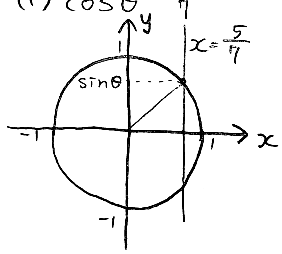
$$\boxed{\begin{array}{l} \tan\theta = \dfrac{\sin\theta}{\cos\theta} \\ \cos^2\theta + \sin^2\theta = 1 \\ 1 + \tan^2\theta = \dfrac{1}{\cos^2\theta} \end{array}}$$

例1 $\sin\theta$，$\cos\theta$，$\tan\theta$ のうち，1つが次のように与えられたとき，他の2つの値を求めよ。ただし，$0° \leqq \theta \leqq 180°$ とする。

(1) $\cos\theta = \frac{5}{7}$　　(2) $\sin\theta = \frac{5}{13}$　　(3) $\tan\theta = -\frac{4}{3}$

解)

(1) $\cos\theta = \frac{5}{7}$



$\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$ より

$$\sin^2\theta = 1 - \cos^2\theta = 1 - \left(\frac{5}{7}\right)^2 = \frac{24}{49}$$

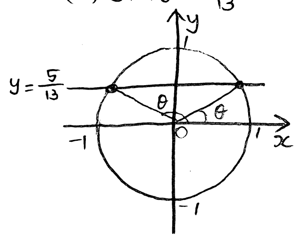
$$\therefore \sin\theta = \pm\frac{2\sqrt{6}}{7}$$

$0° \leqq \theta \leqq 180°$ では $\sin\theta \geqq 0$

したがって，$\sin\theta = \frac{2\sqrt{6}}{7}$ //

また，
$$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{\frac{2\sqrt{6}}{7}}{\frac{5}{7}} = \frac{2\sqrt{6}}{5} \ //$$

(2) $\sin\theta = \frac{5}{13}$



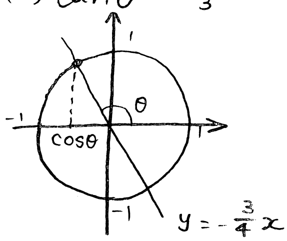
$\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$ より

$$\cos^2\theta = 1 - \sin^2\theta = 1 - \left(\frac{5}{13}\right)^2 = \frac{144}{169}$$

$$\therefore \cos\theta = \pm\frac{12}{13} \ //$$

また，
$$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{\frac{5}{13}}{\pm\frac{12}{13}} = \pm\frac{5}{12} \ //$$

(3) $\tan\theta = -\frac{4}{3}$



$1 + \tan^2\theta = \frac{1}{\cos^2\theta}$ より

$$1 + \left(-\frac{4}{3}\right)^2 = \frac{1}{\cos^2\theta}$$

$$\frac{25}{9} = \frac{1}{\cos^2\theta}$$

$$\therefore \cos^2\theta = \frac{9}{25}$$

$$\cos\theta = \pm\frac{3}{5}$$

ここで $\tan\theta < 0$ から

$90° < \theta < 180°$

したがって $\cos\theta < 0$

$$\cos\theta = -\frac{3}{5} \ //$$

$$\sin\theta = \tan\theta\cos\theta = \left(-\frac{4}{3}\right) \times \left(-\frac{3}{5}\right) = \frac{4}{5} \ //$$

例2 $\sin\theta + \cos\theta = \frac{1}{2}$ …… ① のとき、次の式の値を求めよ。
ただし $0° \leqq \theta \leqq 180°$ とする。

(1) $\sin\theta\cos\theta$　　(2) $\sin^3\theta + \cos^3\theta$　　(3) $\sin\theta - \cos\theta$　　(4) $\tan\theta$

解)
(1) ① の両辺を2乗

$$(\sin\theta + \cos\theta) = \frac{1}{4}$$
$$\Leftrightarrow \sin^2\theta + 2\sin\theta\cos\theta + \cos^2\theta = \frac{1}{4}$$
$$\Leftrightarrow 1 + 2\sin\theta\cos\theta = \frac{1}{4}$$
$$\Leftrightarrow 2\sin\theta\cos\theta = -\frac{3}{4}$$
$$\Leftrightarrow \sin\theta\cos\theta = -\frac{3}{8}\ /\!/$$

まとめ直すと、

$$\begin{cases} \sin\theta + \cos\theta = \frac{1}{2} & \cdots\cdots ① \\ \sin\theta\cos\theta = -\frac{3}{8} & \cdots\cdots ② \end{cases}$$

(2) $\sin^3\theta + \cos^3\theta$

$$= \begin{cases} (\sin\theta + \cos\theta)^3 - 3\sin\theta\cos\theta(\sin\theta + \cos\theta) \\ (\sin\theta + \cos\theta)(\sin^2\theta - \sin\theta\cos\theta + \cos^2\theta) \end{cases}$$

$$= \frac{1}{2}\left\{1 - \left(-\frac{3}{8}\right)\right\} \quad (①, ② より)$$
$$= \frac{11}{16}\ /\!/$$

(3) $(\sin\theta - \cos\theta)^2 = \sin^2\theta - 2\sin\theta\cos\theta + \cos^2\theta$
$$= 1 - 2\sin\theta\cos\theta$$
$$= 1 - 2 \times \left(-\frac{3}{8}\right) \quad (② より)$$
$$= \frac{7}{4}$$

$\therefore \sin\theta - \cos\theta = \pm\frac{\sqrt{7}}{2}$

ここで、② について　$\sin\theta\cos\theta = -\frac{3}{8} < 0$

から　$\cos\theta < 0$　$(90° < \theta < 180°)$

よって　$\sin\theta - \cos\theta = \frac{\sqrt{7}}{2}\ /\!/$　…③

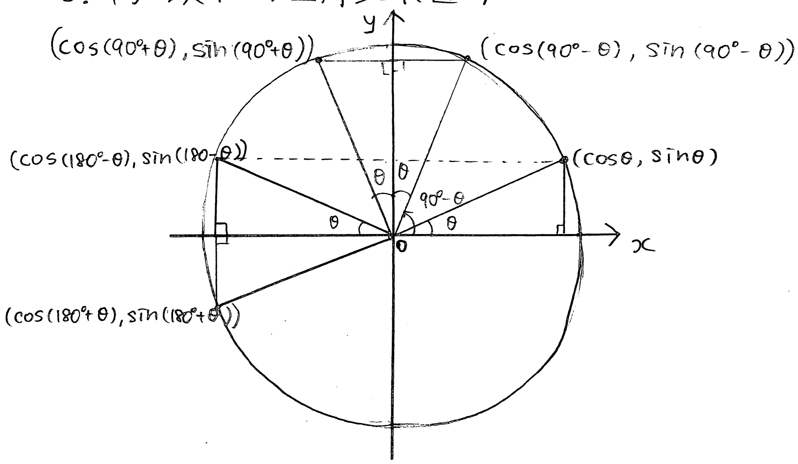
(4)
$$\begin{cases} \sin\theta + \cos\theta = \frac{1}{2} & \cdots ① \\ \sin\theta - \cos\theta = \frac{\sqrt{7}}{2} & \cdots ③ \end{cases}$$

$\frac{①+③}{2}$　$\sin\theta = \frac{1+\sqrt{7}}{4}$

$\frac{①-③}{2}$　$\cos\theta = \frac{1-\sqrt{7}}{4}$

$$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$$
$$= \frac{\frac{1+\sqrt{7}}{4}}{\frac{1-\sqrt{7}}{4}}$$
$$= \frac{(1+\sqrt{7})^2}{1-7}$$
$$= -\frac{8+2\sqrt{7}}{6} = \frac{-4+\sqrt{7}}{3}\ /\!/$$

5. 45°以下の三角比に直す



90° − θ

$$\cos(90^\circ-\theta) = \sin\theta$$
$$\sin(90^\circ-\theta) = \cos\theta$$
$$\tan(90^\circ-\theta) = \frac{\sin(90^\circ-\theta)}{\cos(90^\circ-\theta)} = \frac{1}{\tan\theta}$$

例

$$\cos 70^\circ = \sin 20^\circ$$
$$\sin 80^\circ = \cos 10^\circ$$
$$\tan 75^\circ = \frac{1}{\tan 15^\circ}$$

90° + θ

$$\cos(90^\circ+\theta) = -\sin\theta$$
$$\sin(90^\circ+\theta) = \cos\theta$$
$$\tan(90^\circ+\theta) = \frac{\sin(90^\circ+\theta)}{\cos(90^\circ+\theta)} = -\frac{1}{\tan\theta}$$

例

$$\cos 100^\circ = -\sin 10^\circ$$
$$\sin 110^\circ = \cos 20^\circ$$
$$\tan 110^\circ = -\frac{1}{\tan 20^\circ}$$

180° − θ

$$\cos(180^\circ-\theta) = -\cos\theta$$
$$\sin(180^\circ-\theta) = \sin\theta$$
$$\tan(180^\circ-\theta) = \frac{\sin(180^\circ-\theta)}{\cos(180^\circ-\theta)} = -\tan\theta$$

例

$$\cos 170^\circ = -\cos 10^\circ$$
$$\sin 160^\circ = \sin 20^\circ$$
$$\tan 160^\circ = -\tan 20^\circ$$

180° + θ

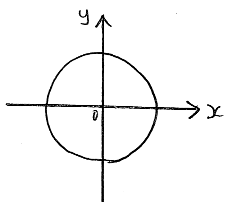
$$\cos(180^\circ+\theta) = -\cos\theta$$
$$\sin(180^\circ+\theta) = -\sin\theta$$
$$\tan(180^\circ+\theta) = \frac{\sin(180^\circ+\theta)}{\cos(180^\circ+\theta)} = \tan\theta$$

例

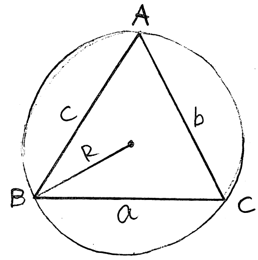
$$\cos 200^\circ = -\cos 20^\circ$$
$$\sin 195^\circ = -\sin 15^\circ$$
$$\tan 190^\circ = \tan 10^\circ$$

例

$$\cos 250^\circ = \cos 110^\circ = -\sin 20^\circ$$

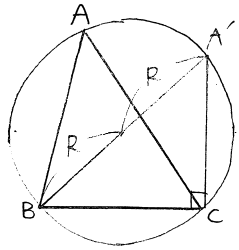


1. 正弦定理



$\triangle ABC$ において，$BC=a$，$CA=b$，$AB=c$ とし，
外接円の半径を R とすると

$$\boxed{\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R}$$



証明

右の図のような $\triangle ABC$ と $\triangle A'BC$ を考える。
（直角三角形）

まず，円周角の定理から，$A=A'$ …①
$\angle BAC=\angle BA'C$

また，$\angle A'CB=90^\circ$ であることから，$A'B=2R$
により，$\triangle A'BC$ について，$\sin A'=\dfrac{a}{2R}$ …②

①,② から $\sin A=\dfrac{a}{2R}$　　$\therefore 2R\sin A=a$　（$0^\circ<A<180^\circ$ より）

$0^\circ<A<180^\circ$ から $\sin A>0$ なので，

$$\frac{a}{\sin A}=2R$$

B, C についても同様に考えて，$\dfrac{b}{\sin B}=2R$，$\dfrac{c}{\sin C}=2R$

したがって，$\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}=2R$　　（証明終）

例 $\triangle ABC$ について，次の各問いに答えよ。（$BC=a$，$CA=b$，$AB=c$ とする）

(1) $a=4$，$A=45^\circ$，$B=30^\circ$ のとき，b を求めよ。

(2) $a=3$，$A=30^\circ$ のとき，外接円の半径 R を求めよ。

解)

(1) 正弦定理により

$$\frac{4}{\sin 45^\circ}=\frac{b}{\sin 30^\circ}$$

$$\therefore b=\frac{4}{\sin 45^\circ}\times\sin 30^\circ$$

$$=4\sqrt{2}\times\frac{1}{2}$$

$$=2\sqrt{2}$$ //

(2) 正弦定理により

$$\frac{3}{\sin 30^\circ}=2R$$

$$\therefore 2R=\frac{3}{\frac{1}{2}}$$

$$=6$$

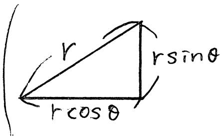
$$R=3$$ //

2.余弦定理

$\triangle ABC$において、$BC=a, CA=b, AB=c$とすると、

$$\begin{cases} a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A \Leftrightarrow \cos A = \dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc} \\ b^2 = c^2 + a^2 - 2ca\cos B \Leftrightarrow \cos B = \dfrac{c^2+a^2-b^2}{2ca} \\ c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C \Leftrightarrow \cos C = \dfrac{a^2+b^2-c^2}{2ab} \end{cases}$$

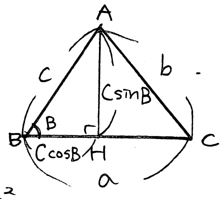
$\boxed{\text{3辺1角の関係式}}$

(


$\begin{cases} \cos\theta = \dfrac{x}{r} \rightsquigarrow x = r\cos\theta \\ \sin\theta = \dfrac{y}{r} \rightsquigarrow y = r\sin\theta \end{cases}$)

<u>証明</u>

$\triangle ABC$においてAから、辺BC(もしくはその延長)におろした垂線の足をHとする。



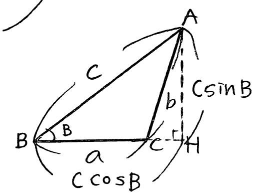
$\triangle AHC$について、

$$(c\sin B)^2 + (a - c\cos B)^2 = b^2$$

$$\Leftrightarrow c^2(\sin^2 B + \cos^2 B) + a^2 - 2ac\cos B = b^2$$

$$\Leftrightarrow b^2 = c^2 + a^2 - 2ca\cos B$$

(証明終)



例 $\triangle ABC$について、次の問いに答えよ。($BC=a, CA=b, AB=c$とする)

(1) $b=3$, $c=2$, $A=60^\circ$のとき、aを求めよ。

(2) $a=\sqrt{5}$, $b=\sqrt{2}$, $c=3$のとき、Aを求めよ。

解)(1)余弦定理により、

$$a^2 = 3^2 + 2^2 - 2\times3\times2\cos 60^\circ$$
$$= 9 + 4 - 6$$
$$= 7$$

$$a = \sqrt{7} \,/\!/$$

(2)余弦定理より

$$\cos A = \frac{\sqrt{2}^2 + 3^2 - \sqrt{5}^2}{2\times\sqrt{2}\times3}$$

$$= \frac{2+9-5}{6\sqrt{2}}$$

$$= \frac{6}{6\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$0^\circ < A < 180^\circ$で考えて、$A = 45^\circ \,/\!/$

(正弦定理・余弦定理の応用)

3辺の比に関すること。

①正弦定理の応用

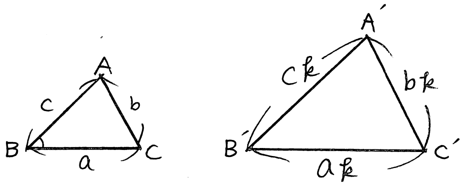
$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$$

$$\begin{cases} a = 2R\sin A \\ b = 2R\sin B \\ c = 2R\sin C \end{cases}$$

$\boxed{\sin A : \sin B : \sin C = a : b : c}$

$$a : b : c = 2R\sin A : 2R\sin B : 2R\sin C$$

②余弦定理の応用



$(k > 1)$

$\boxed{\text{3辺の比から 1つの角のcosの値が求まる。}}$

$$\cos B = \cos B'$$

例 $\triangle ABC$において、$\sin A : \sin B : \sin C = 8 : 7 : 13$のとき
最大角の大きさを求めよ。

解) $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$とおくと, 正弦定理より

$$a : b : c = 8 : 7 : 13$$

cが最大辺なので, 最大角はC

$$a = 8k, \ b = 7k, \ c = 13k \quad (k > 0) \text{ とおくと}$$

余弦定理より,

$$\cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$$

$$= \frac{(8k)^2 + (7k)^2 - (13k)^2}{2 \times 8k \times 7k}$$

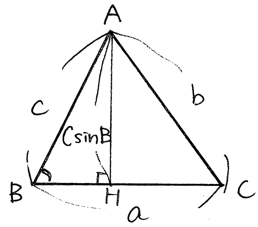
$$= \frac{-56k^2}{112k^2} = -\frac{1}{2} \qquad \text{よって } C = 120^\circ$$

3. 三角形の面積

① 2辺とその間の角 利用

△ABCの面積をSとすると、

$$S = \begin{cases} \frac{1}{2} bc \sin A \\ \frac{1}{2} ca \sin B \\ \frac{1}{2} ab \sin C \end{cases}$$



例1 次の△ABCの面積Sを求めよ。

$a = 5,\ c = 6,\ B = 60^\circ$

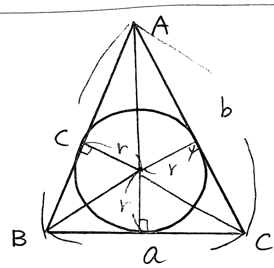
解)

$$S = \frac{1}{2} \times 6 \times 5 \times \sin 60^\circ$$
$$= 15 \times \frac{\sqrt{3}}{2}$$
$$= \frac{15\sqrt{3}}{2}$$ //

---

② 3辺と内接円の半径 利用

△ABCの面積をS、
内接円の半径をrとすると、

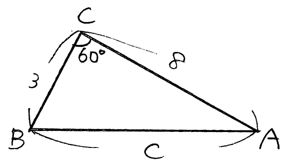


$$S = \frac{r}{2}(a + b + c)$$

面積を利用して、内接円の半径
を求めることの方が多い。

例2 次の△ABCの内接円の半径rを求めよ。

$a = 3,\ b = 8,\ c = 60^\circ$



解)

△ABCの面積をSとすると、

$$S = \frac{1}{2} \times 3 \times 8 \times \sin 60^\circ$$
$$= 12 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 6\sqrt{3}$$

ここで、余弦定理により

$$c^2 = 3^2 + 8^2 - 2 \times 3 \times 8 \times \cos 60^\circ$$
$$= 9 + 64 - 24$$
$$= 49 \qquad \therefore c = 7$$

$S = \frac{r}{2}(a + b + c)$ に代入して、

$$6\sqrt{3} = \frac{r}{2}(3 + 8 + 7)$$
$$= 9r$$

$$\therefore r = \frac{6\sqrt{3}}{9} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$ //

③ 3辺 利用（ヘロンの公式）

△ABCの面積をSとし，
$s=\dfrac{a+b+c}{2}$ とすると

$$S=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

$$S^2=\frac{1}{4}b^2c^2\sin^2A$$
$$=\frac{1}{4}b^2c^2(1-\cos^2A)$$
$$=\frac{1}{4}b^2c^2(1+\cos A)(1-\cos A)$$
$$=\frac{1}{4}b^2c^2\left(1+\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\right)\left(1-\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\right)$$
$$=\frac{1}{4}b^2c^2\times\frac{2bc+b^2+c^2-a^2}{2bc}\times\frac{2bc-b^2-c^2+a^2}{2bc}$$
$$=\frac{1}{16}\{(2bc+b^2+c^2)-a^2\}\{a^2-(b^2-2bc+c^2)\}$$
$$=\frac{1}{16}\{(b+c)^2-a^2\}\{a^2-(b-c)^2\}$$
$$=\frac{1}{16}(b+c+a)(b+c-a)(a+b-c)\{a-(b-c)\}$$
$$=\frac{1}{2^4}(a+b+c)\{(a+b+c)-2a\}\{(a+b+c)-2b\}\{(a+b+c)-2c\}$$
$$=\frac{a+b+c}{2}\times\left(\frac{a+b+c}{2}-a\right)\times\left(\frac{a+b+c}{2}-b\right)\times\left(\frac{a+b+c}{2}-c\right)$$

例3 次の△ABCの面積Sを求めよ。
$a=5$，$b=6$，$c=7$

解1）$s=\dfrac{5+6+7}{2}=9$ とすると

$$S=\sqrt{9(9-5)(9-6)(9-7)}$$
$$=\sqrt{9\times4\times3\times2}$$
$$=6\sqrt{6}$$ //

解2）$S=\frac{1}{2}bc\sin A$で
余弦定理により，

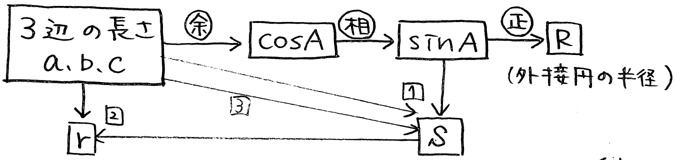
$$\cos A=\frac{6^2+7^2-5^2}{2\times6\times7}$$
$$=\frac{60}{84}=\frac{5}{7}$$

$$\therefore \sin A=\sqrt{1-\left(\frac{5}{7}\right)^2}$$
$$=\frac{2\sqrt{6}}{7}$$

よって，$S=\frac{1}{2}bc\sin A$
$$=\frac{1}{2}\times6\times7\times\frac{2\sqrt{6}}{7}$$
$$=6\sqrt{6}$$ //

＜入試5頻出＞

① 三角形のすべてを求める問題



$$S = \begin{cases} \frac{1}{2}bc\sin A = \frac{1}{2}ca\sin B = \frac{1}{2}ab\sin C & \boxed{1} \\ \frac{1}{2}r(a+b+c) & \boxed{2} \\ \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} & \boxed{3} \\ \quad (\text{ただし、} s = \frac{a+b+c}{2}) & \end{cases}$$

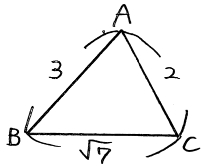
例 右図のように△ABCが与えられるとき、次の値をぞれぞれ求めよ。

(1) ∠Aの大きさ

(2) △ABCの面積 S

(3) △ABCの外接円の半径 R

(4) △ABCの内接円の半径 r



解)

(1) 余弦定理より

$$\cos A = \frac{2^2+3^2-\sqrt{7}^2}{2\times 2\times 3} = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}$$

(2) $S = \frac{1}{2}\times 2\times 3\times \sin 60^\circ$

$$= \frac{3\sqrt{3}}{2} \text{〃}$$

(3) 正弦定理より、

$$\frac{\sqrt{7}}{\sin 60^\circ} = 2R$$

$$\therefore R = \frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{7}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{\sqrt{21}}{3} \text{〃}$$

(4) $\frac{3\sqrt{3}}{2} = \frac{r}{2}(\sqrt{7}+2+3)$ より

$$(\sqrt{7}+5)r = 3\sqrt{3}$$

$$\therefore r = \frac{3\sqrt{3}}{5+\sqrt{7}} = \frac{3\sqrt{3}(5-\sqrt{7})}{(5+\sqrt{7})(5-\sqrt{7})} = \frac{\sqrt{3}(5-\sqrt{7})}{6} = \frac{5\sqrt{3}-\sqrt{21}}{6} \text{〃}$$

② 三角形の形状決定問題

辺の式に直す!

余弦定理
$$\begin{cases} \cos A = \dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc} \\ \cos B = \dfrac{c^2+a^2-b^2}{2ca} \\ \cos C = \dfrac{a^2+b^2-c^2}{2ab} \end{cases}$$

正弦定理
$$\begin{cases} \sin A = \dfrac{a}{2R} \\ \sin B = \dfrac{b}{2R} \\ \sin C = \dfrac{c}{2R} \end{cases}$$

$b=c \to$ 二等辺三角形
$a=b=c \to$ 正三角形
$a^2=b^2+c^2 \to$ 直角三角形

例 次の式が成り立つとき、△ABCはどんな三角形か。

$$CA^2 \times \sin A \cos B = BC^2 \times \sin B \cos A$$

解) $BC=a$, $CA=b$, $AB=c$とすると

$$b^2 \sin A \cos B = a^2 \sin B \cos A$$

正弦定理・余弦定理より

$$b^2 \times \frac{a}{2R} \times \frac{c^2+a^2-b^2}{2ca} = a^2 \times \frac{b}{2R} \times \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$$

$$\Leftrightarrow b^2(c^2+a^2-b^2) = a^2(b^2+c^2-a^2)$$
$$\Leftrightarrow b^2c^2+a^2b^2-b^4 = a^2b^2+a^2c^2-a^4$$
$$\Leftrightarrow (b^2-a^2)c^2-b^4+a^4=0$$
$$\Leftrightarrow -(a^2-b^2)c^2+a^4-b^4=0$$
$$\Leftrightarrow (a^2-b^2)\{-c^2+(a^2+b^2)\}=0$$
$$\Leftrightarrow (a+b)(a-b)(a^2+b^2-c^2)=0$$

$a-b=0$ または $a^2+b^2-c^2=0$

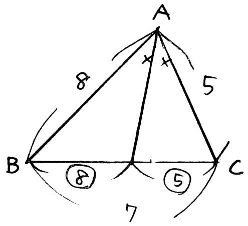
$\Leftrightarrow$ $a=b$ または $a^2+b^2=c^2$

よって、
$$\begin{cases} BC=CA\text{の二等辺三角形} \\ \quad\text{または} \\ \angle C=90^\circ\text{の直角三角形} \end{cases}$$ //

③三角形の角の二等分線問題

「∠Bを共有」と「面積の和」

例1 △ABCについて，AB＝8，AC＝5，BC＝7とする。∠Aの二等分線とBCとの交点をDとするとき，ADの長さを求めよ。



解）（∠Bを共有）

∠Bが $\begin{cases}\triangle ABC\text{の内角} \\ \text{かつ} \\ \triangle ABD\text{の内角}\end{cases}$ であることを利用する。

△ABCについて余弦定理により，

$$\cos B = \frac{8^2+7^2-5^2}{2\times 8\times 7} = \frac{88}{112} = \frac{11}{14}$$

ここで，BD：DC＝BA：AC＝8：5より

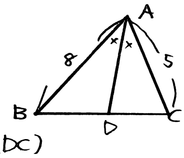
$$BD = 7\times\frac{8}{13} = \frac{56}{13}$$

△ABDについて余弦定理により，

$$AD^2 = 8^2 + \left(\frac{56}{13}\right)^2 - 2\times 8\times\frac{56}{13}\times\cos B$$
$$= 8^2\left\{1+\left(\frac{7}{13}\right)^2 - 2\times\frac{7}{13}\times\frac{11}{14}\right\}$$
$$= 8^2\times\frac{13^2+7^2-11\times 13}{13^2}$$
$$= 8^2\times\frac{13\times 2+49}{13^2}$$
$$= 8^2\times\frac{75}{13^2}$$

$$\therefore AD = \frac{40\sqrt{3}}{13} \quad //$$

例2 △ABCについて，AB＝8，AC＝5，∠A＝60°とする。∠Aの二等分線とBCとの交点をDとするとき，ADの長さを求めよ。



解）（面積の和）

面積について

（△ABC）＝（△ABD）＋（△ADC）

であることを利用する。

面積について

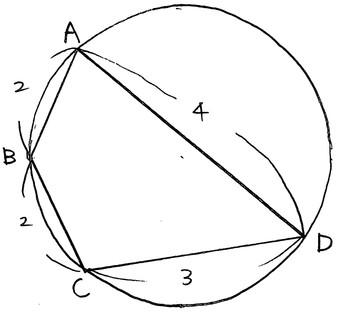
$$\frac{1}{2}\times 8\times 5\times\sin 60^\circ = \frac{1}{2}\times 8\times AD\times\sin 30^\circ + \frac{1}{2}\times 5\times AD\times\sin 30^\circ$$

$$\Leftrightarrow 10\sqrt{3} = 2AD + \frac{5}{4}AD = \frac{13}{4}AD$$

$$\Leftrightarrow AD = 10\sqrt{3}\times\frac{4}{13} = \frac{40\sqrt{3}}{13} \quad //$$

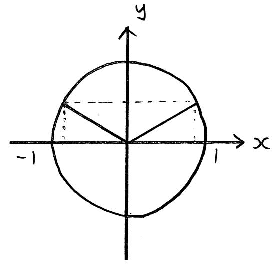
④円に内接する四角形問題

「余弦定理の連立」



㊞四角形ABCDは円に内接し，
$AB=2,\ BC=2,\ CD=3,\ DA=4$，
とする。次の値をそれぞれ求めよ。
(1) ACの長さ
(2) 外接円の半径
(3) 四角形ABCDの面積

解) $\angle ABC = B$と表すこととする。



(1) $\triangle ABC$，$\triangle ADC$について余弦定理より

$$\begin{cases} AC^2 = 2^2 + 2^2 - 2\times 2\times 2\times \cos B \\ AC^2 = 4^2 + 3^2 - 2\times 4\times 3\times \cos(180^\circ - B) \end{cases}$$

$$\begin{cases} AC^2 = 8 - 8\cos B & \cdots ① \\ AC^2 = 25 + 24\cos B & \cdots ② \end{cases}$$

② − ①　$0 = 17 + 32\cos B$　　$\therefore \cos B = -\frac{17}{32}$

①に代入　$AC^2 = 8(1-\cos B)$

$$= 8\left(1+\frac{17}{32}\right)$$

$$= 8\times\frac{32+17}{32}$$

$\therefore AC = \frac{7}{2}$ //

(2) $\cos^2 B + \sin^2 B = 1$ かつ $0^\circ < B < 180^\circ$ ($\sin B > 0$) より

$$\sin B = \pm\sqrt{1-\cos^2 B}$$

$$= \sqrt{1-\left(-\frac{17}{32}\right)^2}$$

$$= \sqrt{\frac{32^2-17^2}{32^2}}$$

$$= \sqrt{\frac{(32+17)(32-17)}{32^2}}$$

$$= \sqrt{\frac{49\times 15}{32^2}}$$

$$= \frac{7\sqrt{15}}{32}$$

外接円の半径をRとすると正弦定理により，

$$\frac{\frac{7}{2}}{\sin B} = 2R$$

$$\therefore 2R = \frac{\frac{17}{2}}{\frac{7\sqrt{15}}{32}}$$

$$= \frac{32}{2\sqrt{15}}$$

$$R = \frac{8}{\sqrt{15}} = \frac{8\sqrt{15}}{15}$$ //

(3) 求める面積をSとすると，

$$S = \frac{1}{2}\times 2\times 2\times \sin B + \frac{1}{2}\times 4\times 3\times \sin(180^\circ - B)$$

$$= 2\sin B + 6\sin B$$

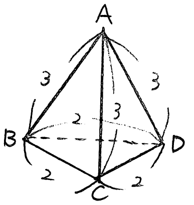
$$= 8\sin B$$

$$= 8\times\frac{7\sqrt{15}}{32}$$

$$= \frac{7\sqrt{15}}{4}$$ //

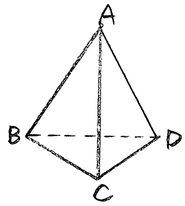
⑤立体図形の問題

平面に切って考える。



例 右図のように与えられた四面体の体積と、外接球の半径をそれぞれ求めよ。

解) Aから、底面BCDにおろした垂線の足をHとする。



△ABH, △ACH, △ADHについて

$$\begin{cases} AB = AC = AD \\ AH\text{は共通} \\ \angle AHB = \angle AHC = \angle AHD = 90^\circ \end{cases}$$

よって、$\triangle ABH \equiv \triangle ACH \equiv \triangle ADH$ $\therefore BH = CH = DH$

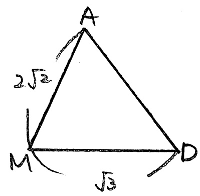
したがって、Hは△BCDの外心である。

正三角形においては、外心と重心は一致するので、Hは△BCDの重心である。BCの中点をMとすると、Hは△BCDの中線である、MD上にある。

また、$AM = \sqrt{3^2 - 1^2} = 2\sqrt{2}$, $MD = \sqrt{3}$であり、

Hが△BCDの重心であることから、

$$MH = \frac{1}{3} \times MD = \frac{\sqrt{3}}{3}$$



ここで、△AMHについて、三平方の定理から、

$$AH = \sqrt{(2\sqrt{2})^2 - \left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2} = \sqrt{8 - \frac{1}{3}} = \sqrt{\frac{23}{3}}$$

体積をVとすると、

$$V = \frac{1}{3} \times \left(\frac{1}{2} \times 2 \times 2 \times \sin 60^\circ\right) \times \sqrt{\frac{23}{3}} = \frac{2}{3} \times \frac{\sqrt{3}}{2} \times \sqrt{\frac{23}{3}} = \frac{\sqrt{23}}{3} \,//$$

次に外接球の半径をRとし、その中心をOとすると、△OHDについて三平方の定理から、

$$R^2 = \left(\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)^2 + \left(\sqrt{\frac{23}{3}} - R\right)^2$$

$$\therefore R^2 = \frac{4}{3} + \frac{23}{3} - 2\sqrt{\frac{23}{3}} + R^2$$

$$\Leftrightarrow 2 \times \sqrt{\frac{23}{3}} R = 9$$

$$\Leftrightarrow R = 9 \times \frac{1}{2} \times \sqrt{\frac{3}{23}} = \frac{9\sqrt{3}}{2\sqrt{23}} = \frac{9\sqrt{69}}{46} \,//$$