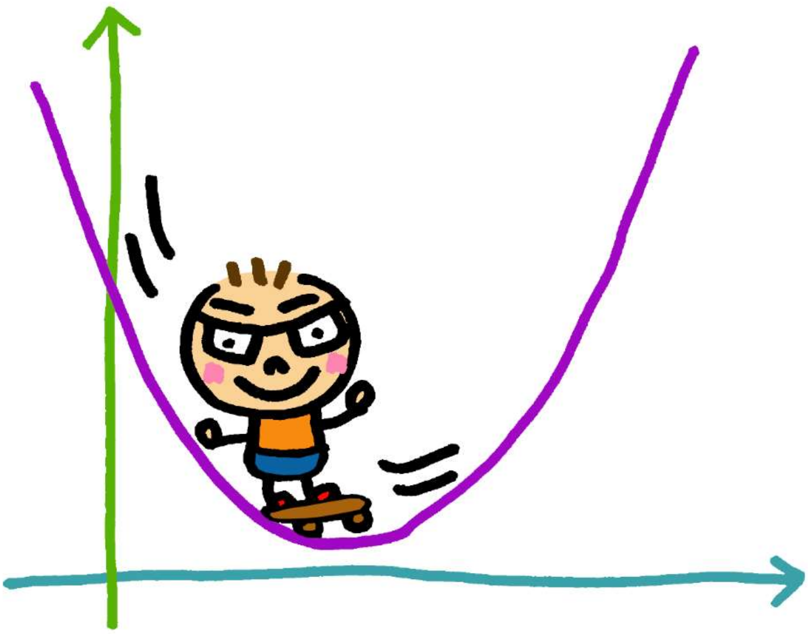
# 数学 I

# 02　2 次関数



＜講義ノート＞

## ２次関数

### １　２次関数のグラフ

（１）平行移動

（２）対称移動

### ２　２次関数の最大最小

（１）基本

（２）条件付き　　　（文字消去　置き換え）

（３）文字場合分け　（グラフが動く　区間が動く）

（４）２変数無関係

### ３　２次関数の決定

（１）２次関数を作る

（２）符号決定

### ４　２次方程式

（１）基本

（２）２次関数とｘ軸との関係

（３）解の配置

### ５　２次不等式

（１）基本

（２）係数決定

（３）整数値の個数

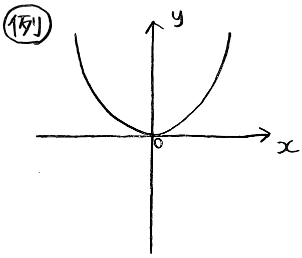
（４）絶対不等式

# 1. 2次関数のグラフ

## (1) 平行移動

### 準備（$y=ax^2$ のグラフ）

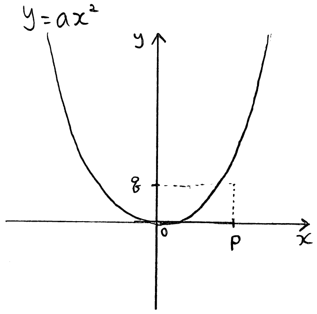
例




$y=x^2$

$\boxed{y=ax^2\ (a \neq 0)\ のグラフ}$

- $a>0$：下に凸，$a<0$：上に凸
- $|a|$ が大きいほど、せまくなる
- 頂点が原点にある
- 左右対称である




$y=ax^2$ のグラフを
$x:+p$，$y:+q$ すると
$y=a(x-p)^2+q$
頂点 $(p, q)$，軸 $x=p$

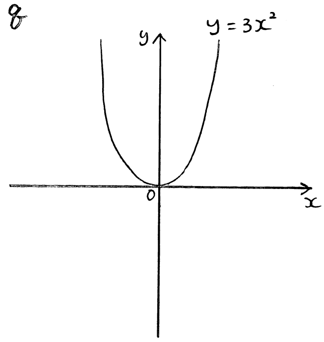
$X=x+p$，$Y=y+q$
$x=X-p$　　$y=Y-q$

$y=ax^2$ に代入

$Y-q=a(X-p)^2$
$\therefore\ Y=a(X-p)^2+q$

例1　$y=3x^2$ のグラフを $x$ 軸正方向に2
$y$ 軸正方向に $-4$ 平行移動すると

$y=3(x-2)^2-4$
頂点 $(2, -4)$，軸 $x=2$




例2　2次関数 $y=2x^2-4x+5$ …①
のグラフをどのように平行移動すれば
2次関数 $y=2x^2+8x+13$ …②
のグラフになるか？

解）①について

$y=2(x-p)^2+q$ 形へ。
平方完成

$x^2$の係数で
前の2つの項をくくる

$x$の係数の
半分の2乗をたしてひく

平方の部分
以外を整理する

$$\begin{aligned}
y &= 2x^2-4x+5\\
&= 2(x^2-2x)+5\\
&= 2(x^2-2x+1^2-1^2)+5\\
&= 2\{(x-1)^2-1\}+5\\
&= 2(x-1)^2+3
\end{aligned}$$

頂点 $(1, 3)$

②について

$$\begin{aligned}
y &= 2x^2+8x+13\\
&= 2(x^2+4x)+13\\
&= 2(x^2+4x+2^2-2^2)+13\\
&= 2\{(x+2)^2-4\}+13\\
&= 2(x+2)^2+5
\end{aligned}$$

頂点 $(-2, 5)$

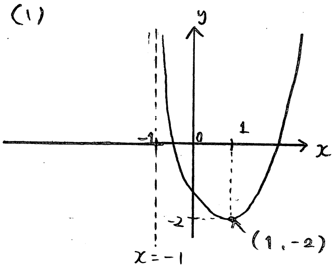
$x$ 軸正方向に $-3$
$y$ 軸正方向に $2$ //

(2) 対称移動

「頂点」と「$x^2$の係数」を調べる!

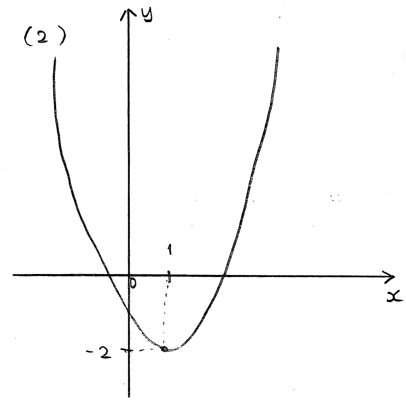
例1 放物線 $y=(x-1)^2-2$ を
(1) 直線 $x=-1$ に関して対称移動
(2) 直線 $y=2$ に関して対称移動

(1)




$y=(x+3)^2-2$

(2)

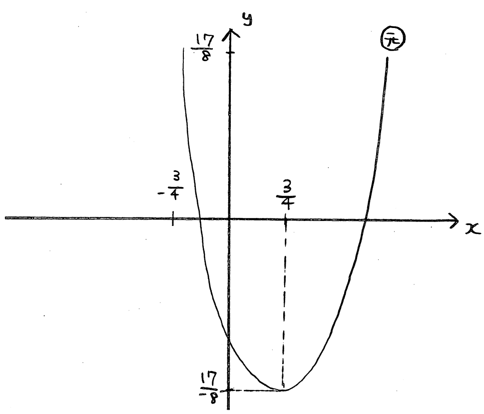



$y=-(x-1)^2+6$

例2 放物線 $y=2x^2-3x-1$ を次の直線または点に関して、それぞれ対称移動して得られる放物線の方程式を求めよ。

(1) x軸　　(2) y軸　　(3) 原点

解) 
$$
\begin{aligned}
y &= 2x^2-3x-1 \\
&= 2\left(x^2-\frac{3}{2}x\right)-1 \\
&= 2\left\{x^2-\frac{3}{2}x+\left(\frac{3}{4}\right)^2-\left(\frac{3}{4}\right)^2\right\}-1 \\
&= 2\left\{\left(x-\frac{3}{4}\right)^2-\frac{9}{16}\right\}-1 \\
&= 2\left(x-\frac{3}{4}\right)^2-\frac{17}{8}
\end{aligned}
$$
頂点 $\left(\frac{3}{4}, -\frac{17}{8}\right)$




| | (別解) |
|---|---|
| (1) $y=-2\left(x-\frac{3}{4}\right)^2+\frac{17}{8}$ $=-2x^2+3x+1$ // | $y$ を $-y$ に。 $-y=2x^2-3x-1$ $y=-2x^2+3x+1$ // |
| (2) $y=2\left(x+\frac{3}{4}\right)^2-\frac{17}{8}$ $=2x^2+3x-1$ // | $x$ を $-x$ に。 $y=2(-x)^2-3(-x)-1$ $=2x^2+3x-1$ // |
| (3) $y=-2\left(x+\frac{3}{4}\right)^2+\frac{17}{8}$ $=-2x^2-3x+1$ // | $x$ を $-x$, $y$ を $-y$ に。 $-y=2(-x)^2-3(-x)-1$ $=2x^2+3x-1$ $y=-2x^2-3x+1$ // |

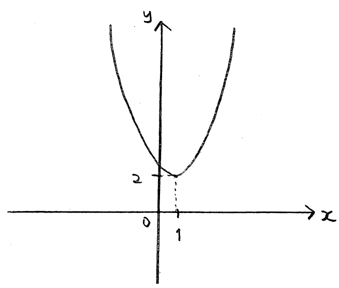
## 2. 2次関数の最大最小

> 関数$y=f(x)$について$x$のとりうる値の範囲をこの関数の「定義域」
> $x$がこの定義域内のすべてを動くときの$y$の値の範囲をこの関数の「値域」という。

例1 $y=x^2-2x+3$について、次の定義域における最大値・最小値を求めよ。

(1) すべての実数　(2) $0 \leqq x \leqq 3$
(3) $2 \leqq x \leqq 4$　(4) $-1 < x \leqq 2$

解) $y=x^2-2x+3$
$=(x-1)^2+2$　頂点$(1,2)$




(1) 最大値 なし
最小値 2 ($x=1$のとき)
(2) 最大値 6 ($x=3$のとき)
最小値 2 ($x=1$のとき)
(3) 最大値 11 ($x=4$のとき)
最小値 3 ($x=2$のとき)
(4) 最大値 なし
最小値 2 ($x=1$のとき)

例2 $m$を定数とする。
2次関数$y=x^2-2mx+4m-3$の最小値を$z$とする。
$z$を$m$の式で表せ。また、$m$の値が変化するときの$z$の最大値を求めよ。

解) $y=x^2-2mx+4m-3$
$=(x-m)^2-m^2+4m-3$
頂点$(m, -m^2+4m-3)$
$\therefore z=-m^2+4m-3$
よって、$z=-(m^2-4m+2^2-2^2)-3$
$=-\{(m-2)^2-4\}-3$
$=-(m-2)^2+1$
$z$の最大値 1 ($m=2$)

例3 $a>0$とする。
$y=ax^2-6ax+b$の定義域は$0 \leqq x \leqq 4$であり、その値域は$1 \leqq y \leqq 19$である。
このとき、定数$a$, $b$の値を求めよ。

解) $y=ax^2-6ax+b$
$=a(x^2-6x+3^2-3^2)+b$
$=a(x-3)^2-9a+b$
頂点$(3, -9a+b)$

題意より

$$\left.\begin{array}{l} f(0)=b=19 \\ f(3)=-9a+b=1 \end{array}\right\} \therefore a=2,\ b=19$$

(2) 条件つき（文字消去）

定義域チェックを忘れずに！

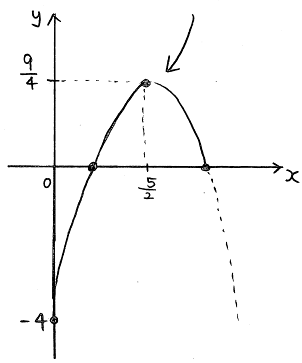
例　$x \geqq 0$ , $y \geqq 0$ , $x+y=4$ のとき
$(x-1)y$ の最大値およびそのときの $x, y$ の値を求めよ

解）$x \geqq 0$ , $y \geqq 0$ , $x+y=4$ … ① のとき

$$
\begin{aligned}
(x-1)y &= (x-1)(4-x) \quad \text{（①より）} \\
&= x^2+5x-4 \\
&= -\left\{x^2-5x+\left(\frac{5}{2}\right)^2-\left(\frac{5}{2}\right)^2\right\}-4 \\
&= -\left(x-\frac{5}{2}\right)^2+\frac{25}{4}-4 \\
&= -\left(x-\frac{5}{2}\right)^2+\frac{9}{4}
\end{aligned}
$$

ただし、ここで $x \geqq 0$ かつ $y=4-x \geqq 0$ より
$0 \leqq x \leqq 4$ で考えて

$z=-\left(x-\frac{5}{2}\right)^2+\frac{9}{4}$ について




最大値 $\frac{9}{4}$ //
（そのとき $x=\frac{5}{2}$ , $y=\frac{3}{2}$ ）

最小値 $-4$ //
（そのとき $x=0$, $y=4$）

(2) 条件つき（置き換え）

定義域チェックを忘れずに！

例 $0 \leqq x \leqq 4$ のとき，関数 $y=(x^2-2x)^2-4(x^2-2x)+1$ の最大値，最小値を求めよ。

解）$y=(x^2-2x)^2-4(x^2-2x)+1$

$x^2-2x=t$ とおくと

$t=x^2-2x$

$=(x-1)^2-1$　より　$-1 \leqq t \leqq 8$

このもとで，

$y=t^2-4t+1$

$=(t-2)^2-3$

最大値 $33$ //

（そのとき $t=8$ より $x=4$）

最小値 $-3$ //

（そのとき $t=2$ より $x^2-2x=2 \iff x^2-2x-2=0$

$x=1\pm\sqrt{3}$

$0 \leqq x \leqq 4$ では $x=1+\sqrt{3}$ ）

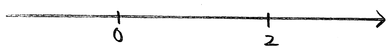
(3) 文字場合分け（グラフが動く）

例 $0 \leqq x \leqq 2$ のとき，2次関数 $f(x) = x^2 - 2ax$ の
最小値 $m$ と最大値 $M$ をそれぞれ求めよ。

解）まずは，$m$ について。

$$f(x) = x^2 - 2ax$$
$$= (x-a)^2 - a^2$$

$y = f(x)$ のグラフの頂点 $(a, -a^2)$




(i) $a < 0$ のとき　$m = f(0) = 0$
(ii) $0 \leqq a < 2$ のとき　$m = f(a) = -a^2$
(iii) $2 \leqq a$ のとき　$m = f(2) = 4 - 4a$

(i)〜(iii)より

$$m = \begin{cases} 0 & (a < 0) \\ -a^2 & (0 \leqq a < 2) \\ 4 - 4a & (2 \leqq a) \end{cases}$$ //

次に，$M$ について。

$f(x) = (x-a)^2 - a^2$　　$y = f(x)$ の頂点 $(a, -a^2)$


(i) $a < 1$ のとき　$M = f(2) = 4 - 4a$
(ii) $a = 1$ のとき　$M = f(0) = f(2) = 0$
(iii) $1 < a$ のとき　$M = f(0) = 0$

(i)〜(iii)より

$$M = \begin{cases} 4 - 4a & (a < 1 \text{ のとき})(x = 2 \text{ で}) \\ 0 & (a = 1 \text{ のとき})(x = 0, 2 \text{ で}) \\ 0 & (1 < a \text{ のとき})(x = 0 \text{ で}) \end{cases}$$ //

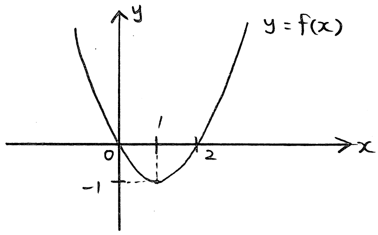
$$\left( = \begin{cases} 4 - 4a & (a < 1) \\ 0 & (1 \leqq a) \end{cases} \right)$$ //

(3) 文字場合分け（区間が動く）

例 $f(x)=x^2-2x$ について，$a \leqq x \leqq a+2$ のとき
$f(x)$ の最小値 $m$ および最大値 $M$ の値をそれぞれ求めよ。

解）$f(x)=(x-1)^2-1$　　　　$y=f(x)$ の頂点 $(1,-1)$

まずは $m$ について。

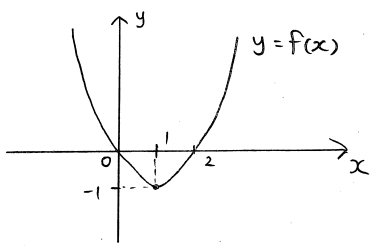



(i) $a<-1$ のとき　　$m=f(a+2)=(a+1)^2-1$
(ii) $-1 \leqq a < 1$ のとき　　$m=f(1)=-1$
(iii) $1 \leqq a$ のとき　　$m=f(a)=(a-1)^2-1$

(i)〜(iii) により

$$m=\begin{cases} a^2+2a & (a<1 \text{ のとき}) \\ -1 & (-1 \leqq a < 1 \text{ のとき}) \\ a^2-2a & (1 \leqq a \text{ のとき}) \end{cases}$$ //

次に，M について




(i) $a<0$ のとき　　$M=f(a)=(a-1)^2-1$
(ii) $a=0$ のとき　　$M=f(0)=f(2)=0$
(iii) $0<a$ のとき　　$M=f(a+2)=(a+1)^2-1$

(i)〜(iii) により

$$M=\begin{cases} a^2-2a & (a<0 \text{ のとき}) \ (x=a \text{ で}) \\ 0 & (a=0 \text{ のとき}) \ (x=0,2 \text{ で}) \\ a^2+2a & (0<a \text{ のとき}) \ (x=a+2 \text{ で}) \end{cases}$$

$$\left(=\begin{cases} a^2-2a & (a<0) \\ a^2+2a & (0 \leqq a) \end{cases} \text{//}\right)$$

(4) 2変数無関係

# 文字固定

例 $x$, $y$ の関数 $z = x^2 - 4xy + 5y^2 + 2y + 2$ について。
(1) $x$, $y$ がすべての実数値をとるとき、$z$ の最小値を求めよ。
また、そのときの $x$, $y$ の値を求めよ。
(2) $x$, $y$ が $x \geqq 0$, $y \geqq 0$ となるとき、$z$ の最小値を求めよ。
また、そのときの $x$, $y$ の値を求めよ。

解) $y$ を固定して考えると、

$$z = x^2 - 4yx + 5y^2 + 2y + 2$$
$$= (x - 2y)^2 + y^2 + 2y + 2$$

(1) $x = 2y$ のとき
$z$ の最小値は $y^2 + 2y + 2$
また、$y^2 + 2y + 2 = (y+1)^2 + 1$

$$z = (x - 2y)^2 + (y+1)^2 + 1 \geqq 1$$

$x - 2y = 0$ かつ $y + 1 = 0$, つまり $x = -2$, $y = -1$ のとき
$z$ の最小値 1 //

(2) $x \geqq 0$ ($, y \geqq 0$) のとき
$x = 2y$ で最小値 $y^2 + 2y + 2$
$y^2 + 2y + 2 = (y+1)^2 + 1$

$y = 0$ のとき最小値 2 //
$(x = 2y = 0)$

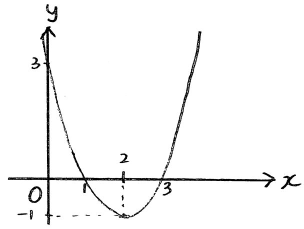
## 3. 2次関数の決定

(1) 2次関数を作る

例 $y = (x-2)^2 - 1$

$= x^2 - 4x + 3$

$= (x-1)(x-3)$




$\boxed{\text{2次関数の表現形}}$　　$a \neq 0$

$$\begin{cases} y = a(x-p)^2 + q \\ y = a(x-\alpha)(x-\beta) \\ y = ax^2 + bx + c \end{cases}$$

例′ 2次関数のグラフが次の条件を満たすときそれぞれの2次関数を求めよ。

(1) 頂点の座標が $(-2, 5)$ で点 $(0, 1)$ を通る。

(2) 軸の方程式が $x = 3$ で、2点 $(1, 2)$ $(4, -4)$ を通る。

(3) $x$ 軸と2点 $(1, 0)$, $(4, 0)$ で交わり $y$ 軸と点 $(0, -8)$ で交わる。

(4) 3点 $(3, 2)$, $(-1, 6)$, $(-2, 17)$ を通る。

解) (1) 求める2次関数を $y = a(x+2)^2 + 5$ とおく。$(a \neq 0)$

$(0, 1)$ を通るので $1 = a \times 4 + 5$　　$\therefore a = -1$

したがって $y = -(x+2)^2 + 5$

$= -x^2 - 4x + 1$ //

(2) 求める2次関数を $y = a(x-3)^2 + q$ とおく。$(a \neq 0)$

$(1, 2)$ を通るので　$2 = 4a + q$　…①

$(4, -4)$ を通るので　$-4 = a + q$　…②

①−②　$6 = 3a$　　$\therefore a = 2$

②から　$-4 = 2 + q$　　$q = -6$

したがって、$y = 2(x-3)^2 - 6$

$= 2x^2 - 12x + 12$ //

(3) 求める2次関数を $y = a(x-1)(x-4)$ とおく。$(a \neq 0)$

$(0, -8)$ を通るので　$-8 = a \times (-1) \times (-4)$

$= 4a$　　より　$a = -2$

したがって　$y = -2(x-1)(x-4)$

$= -2x^2 + 10x - 8$ //

(4) 求める2次関数を $y = ax^2 + bx + c$ とおく。$(a \neq 0)$

点 $(3, 2)$ を通るので　$2 = 9a + 3b + c$　…①

点 $(-1, 6)$ を通るので　$6 = a - b + c$　…②

点 $(-2, 17)$ を通るので　$17 = 4a - 2b + c$　…③

①−②　$-4 = 8a + 4b$　　$\therefore 2a + b = -1$　…④

③−②　$11 = 3a - b$　　$\therefore 3a - b = 11$　…⑤

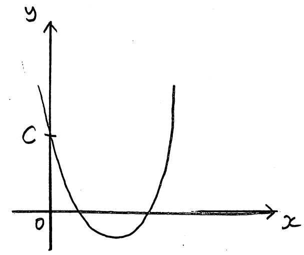
④+⑤　$5a = 10$　　$a = 2$

④から　$4 + b = -1$　　$b = -5$

②より　$6 = 2 + 5 + c$　　$c = -1$

$y = 2x^2 - 5x - 1$ //

## (2) 符号決定




例 右の図は $y=ax^2+bx+c$ のグラフの概形である。
このとき次の各式の符号を調べよ。

(1) $a$　　(2) $b$　　(3) $c$

(4) $b^2-4ac$　　(5) $a-b+c$

解) (1) 下に凸なので　$a>0$ 〃

(3) $x=0$ のとき　$y=c$　　$\therefore c>0$

ここで $y=ax^2+bx+c$

$$
\begin{aligned}
&= a\left(x^2+\frac{b}{a}x\right)+c \\
&= a\left\{x^2+\frac{b}{a}x+\left(\frac{b}{2a}\right)^2-\left(\frac{b}{2a}\right)^2\right\}+c \\
&= a\left\{\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2}{4a^2}\right\}+c \\
&= a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2}{4a}+c \\
&= a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a}
\end{aligned}
$$

頂点は、$\left(-\dfrac{b}{2a},\ -\dfrac{b^2-4ac}{4a}\right)$

(2) $-\dfrac{b}{2a}>0$　より　$b<0$ 〃

(4) $-\dfrac{b^2-4ac}{4a}<0$　より　$b^2-4ac>0$ 〃

(5) $x=-1$ のとき　$y=a-b+c$
グラフより　$a-b+c>0$ 〃

# 4. 2次方程式

## (1) 基本

問 $2x^2+5x-3=0$

$(2x-1)(x+3)=0$

$x=\frac{1}{2},\ -3$ //

$x=\frac{-5\pm\sqrt{5^2-4\times2\times(-3)}}{4}$

$=\frac{-5\pm7}{4}$

$=\frac{2}{4},\ \frac{-12}{4}\ =\frac{1}{2},\ -3$ //

$\boxed{\text{解の公式}}$

2次方程式 $ax^2+bx+c=0\ (a\neq0)$ について

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

$$\left(=\frac{-b'\pm\sqrt{b'^2-ac}}{a}\right)$$

証明

$ax^2+bx+c=0$

$\Leftrightarrow a(x^2+\frac{b}{a}x)+c=0$

$\Leftrightarrow a\left\{(x+\frac{b}{2a})^2-(\frac{b}{2a})^2\right\}+c=0$

$\Leftrightarrow a(x+\frac{b}{2a})^2-\frac{b^2}{4a}+c=0$

$\Leftrightarrow a(x+\frac{b}{2a})^2=\frac{b^2-4ac}{4a}$

$\Leftrightarrow (x+\frac{b}{2a})^2=\frac{b^2-4ac}{4a^2}$

$\Leftrightarrow x+\frac{b}{2a}=\pm\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

$\Leftrightarrow x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

$b=2b'$ のとき

$x=\frac{-2b'\pm\sqrt{(2b')^2-4ac}}{2a}$

$=\frac{-2b'\pm\sqrt{4(b'^2-ac)}}{2a}$

$=\frac{-b'\pm\sqrt{b'^2-ac}}{a}$

判別式を $D\ (=b^2-4ac)$

とすると ① は

$D>0$ のとき　異なる2つの実数解
$D=0$ のとき　(実数の) 重解をもつ
$D<0$ のとき　実数解をもたない

$x^2+3x+7=0$

$D=3^2-4\times1\times7$

$=-19<0$　　解なし。

例1 2次方程式 $x^2+2x-k+3=0$
の実数解の個数を調べよ。($k$: 定数)

解) 判別式を $D$ とすると

$D/4=1^2-1\times(-k+3)$

$=k-2$

$k>2$ のとき　異なる2つの実数解をもつ。
$k=2$ のとき　ただ1つの実数解 (重解) をもつ。
$k<2$ のとき　実数解をもたない。
//

例2 2次方程式 $x^2+kx+8=0$ が重解をもつように定数 $k$ の値を定めよ。
また、そのときの重解を求めよ。

解) 判別式を $D$ とすると、

$D=k^2-4(k+8)$

$=k^2-4k-32$

$=(k+4)(k-8)=0$

$\therefore k=-4,\ 8$

○ $k=-4$ のとき

$x^2-4x+4=0$

$\Leftrightarrow (x-2)^2=0$

$x=2$ (重解)

○ $k=8$ のとき

$x^2+8x+16=0$

$\Leftrightarrow (x+4)^2=0$

$x=-4$ (重解)

$k=-4$ のとき 重解 $x=2$ //
$k=8$ のとき 重解 $x=-4$ //

## (2) 2次関数のグラフとx軸との関係

**例1** 次の関数のグラフとx軸との共有点のx座標を求めよ。

(1) $y = x^2 - 4x + 2$　　(2) $y = -x^2 + 10x - 25$

(3) $y = 3x^2 - 2x + 1$

解) (1) $y = x^2 - 4x + 2$ と $y=0$ を代入

$$x^2 - 4x + 2 = 0$$
$$x = 2 \pm \sqrt{2}$$

(2) $y = -x^2 + 10x - 25$ と $y=0$ を代入

$$-x^2 + 10x - 25 = 0$$
$$\Leftrightarrow x^2 - 10x + 25 = 0$$
$$x = 5 \pm \sqrt{0}$$
$$= 5 〃$$

(3) $y = 3x^2 - 2x + 1$ と $y = 0$ を代入

$$3x^2 - 2x + 1 = 0$$
$$x = \frac{1 \pm \sqrt{-2}}{3}$$

なし 〃

2次関数 $y = ax^2 + bx + c$ のグラフのx軸は、
2次方程式 $ax^2 + bx + c = 0$ の判別式を $D = b^2 - 4ac$ とすると

$$\begin{cases} D > 0 \text{ のとき} & \text{異なる2点で交わる} \\ D = 0 \text{ のとき} & \text{1点(接点)で接する} \\ D < 0 \text{ のとき} & \text{共有点をもたない} \end{cases}$$

**例2** 次の2次関数のグラフとx軸の共有点の個数を求めよ。

(1) $y = 3x^2 + 5x - 3$　　(2) $y = 9x^2 + 12x + 4$

(3) $y = \frac{1}{2}x^2 - x + 1$

解) (1) $3x^2 + 5x - 3 = 0$ の判別式をDとすると

$$D = 5^2 - 4 \times 3 \times (-3)$$
$$= 61 > 0$$

2コ 〃

(2) $9x^2 + 12x + 4 = 0$ の判別式をDとすると

$$D/4 = 6^2 - 9 \times 4 = 0$$

1コ 〃

(3) $\frac{1}{2}x^2 - x + 1 = 0$ の判別式をDとすると.

$$D = (-1)^2 - 4 \times \frac{1}{2} \times 1$$
$$= -1 < 0$$

0コ。

**例3** 放物線 $y = x^2 - 6x + k$ とx軸との共有点の個数は、
定数kの値によってどのように変わるか?

解) $x^2 - 6x + k = 0$ の判別式をDとすると

$$D/4 = (-3)^2 - 1 + k$$
$$= 9 - k$$

$$\begin{cases} k < 9 \text{ のとき} & 2コ \\ k = 9 \text{ のとき} & 1コ \\ k > 9 \text{ のとき} & 0コ 〃 \end{cases}$$

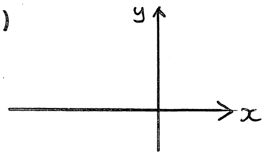
## (3) 解の配置

「判別式」「軸」「端点」を調べる。

(例1) $x$についての2次方程式 $x^2+2px+2p+8=0$ が
次の解をもつように定数$p$の値の範囲を定めよ。
(1) 異なる2つの負の解　　(2) 1より大きい2つの解
(3) 符号が異なる2つの解

解) $x^2+2px+2p+8=0$ ……①
$f(x)=x^2+2px+2p+8$ とおくと、
①の解は、$y=f(x)$のグラフと$x$軸との共有点の$x$座標。

(1)




(i) ①の判別式をDとすると

$$\frac{D}{4}=p^2-(2p+8)$$
$$=p^2-2p-8$$
$$=(p-4)(p+2)>0$$
$$\therefore p<-2,\ 4<p$$

(ii) $f(x)=(x+p)^2-p^2+2p+8$ より
$y=f(x)$の軸は $x=-p\ (<0)$
$-p<0$ より、$p>0$

(iii) $f(0)=2p+8>0$
$$\therefore p>-4$$

(i) かつ (ii) かつ (iii) により、


$p>4$ //

(2)


(i) $D\geqq 0$ より
$(p+2)(p-4)\geqq 0$
$\therefore p\leqq -2,\ 4\leqq p$

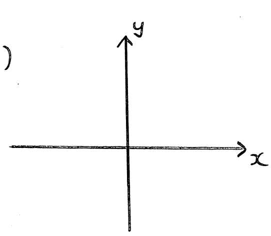
(ii) 軸 $x=-p>1$ より
$p<-1$

(iii) $f(1)=1+2p+2p+8$
$=4p+9>0$
$\therefore p>-\frac{9}{4}$

(i) かつ (ii) かつ (iii) により、


$-\frac{9}{4}<p\leqq -2$ //

(3)




$f(0)=2p+8<0$ より
$p<-4$ //

## 5、2次不等式

### (1) 基本

グラフを利用！

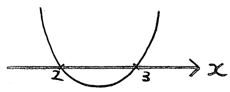
例 次の2次不等式を解け。

(1) $x^2-5x+6>0$
(2) $x^2 \leqq 4$
(3) $x^2+3x-2<0$
(4) $-x^2+2x+1<0$
(5) $x^2-14x+49 \leqq 0$
(6) $-4x^2+4x-1<0$
(7) $x^2-4x+5>0$
(8) $-2x^2+4x-5>0$

---

解) (1) $x^2-5x+6>0$

$(x-2)(x-3)>0$

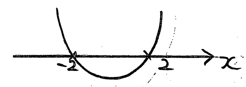



$x<2,\ 3<x$ //

(2) $x^2 \leqq 4$

$\Leftrightarrow x^2-4 \leqq 0$

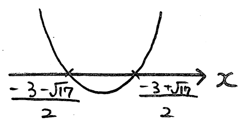
$\Leftrightarrow (x+2)(x-2) \leqq 0$




$-2 \leqq x \leqq 2$ //

(3) $x^2+3x-2<0$

$\left( x^2+3x-2=0 \text{ とすると } x=\frac{-3\pm\sqrt{17}}{2} \right)$

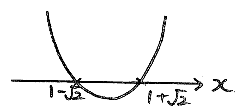



$\frac{-3-\sqrt{17}}{2}<x<\frac{-3+\sqrt{17}}{2}$ //

(4) $-x^2+2x+1<0$

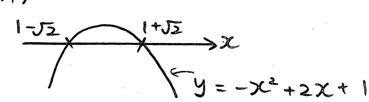
$\Leftrightarrow x^2-2x-1>0$

$\left( x^2-2x-1=0 \text{ とおくと } x=1\pm\sqrt{2} \right)$



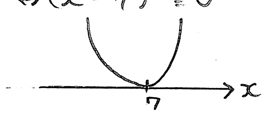

$x<1-\sqrt{2},\ 1+\sqrt{2}<x$ //

(別解)




(5) $x^2-14x+49 \leqq 0$

$\Leftrightarrow (x-7)^2 \leqq 0$

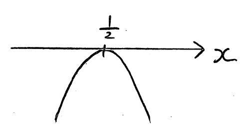



$x=7$ //

(6) $-4x^2+4x-1<0$

$\Leftrightarrow -(4x^2-4x+1)<0$

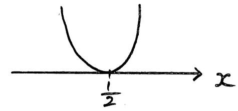
$\Leftrightarrow -(2x-1)^2<0$




$x$は$\frac{1}{2}$以外のすべての実数 //

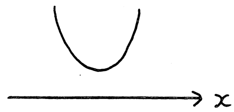
$\left(x \neq \frac{1}{2}\right)$ $\left(x<\frac{1}{2},\ \frac{1}{2}<x\right)$

(別解) $(2x-1)^2>0$



(7) $x^2-4x+5>0$

$\left( \begin{array}{l} x^2-4x+5=0 \text{ とおくと} \\ x=2\pm\sqrt{-1} \end{array} \right)$

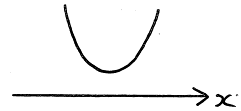


$x$ はすべての実数〃

(8) $-2x^2+4x-5>0$

$\Leftrightarrow 2x^2-4x+5<0$

$\left( \begin{array}{l} 2x^2-4x+5=0 \text{ とおくと} \\ x=\dfrac{2\pm\sqrt{-6}}{2} \end{array} \right)$

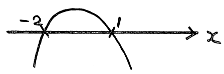


解なし〃

## (2) 係数決定

**例** $x$の2次不等式 $ax^2+bx+c>0$ の解が $-2<x<1$ のとき
(1) 不等式 $bx^2+cx+a \geqq 0$ を解け。
(2) 不等式 $cx^2-ax-b>0$ を解け。

解) $ax^2+bx+c>0$




題意より、$a<0$ …① のもと

$ax^2+bx+c>0$

$\Leftrightarrow a(x+2)(x-1)>0$

$\Leftrightarrow ax^2+ax-2a>0$

したがって

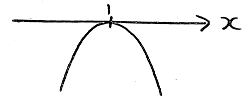
$b=a$ かつ $c=-2a$ …②

(1) $bx^2+cx+a \geqq 0$

②より

$ax^2-2ax+a \geqq 0$

$\Leftrightarrow a(x-1)^2 \geqq 0$




$x=1$ //

(2) $cx^2-ax-b>0$

②より

$-2ax^2-ax-a>0$

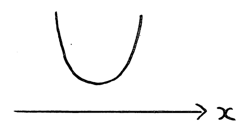
$\Leftrightarrow 2ax^2+ax+a<0$

$\Leftrightarrow a(2x^2+x+1)<0$

①より

$2x^2+x+1>0$

$\left( \begin{array}{l} 2x^2+x+1=0 \text{ とおくと、} \\ x=\dfrac{-1\pm\sqrt{-7}}{4} \end{array} \right)$

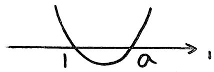


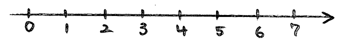

$x$はすべての実数。

## (3) 整数値の個数

例1 $(x-1)(x-a) \leqq 0$ （ただし $a>1$）
をみたす $x$ の整数値が4コになるような定数 $a$ の値の範囲を求めよ。

解) $(x-1)(x-a) \leqq 0$



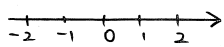

$1 \leqq x \leqq a$

$4 \leqq a < 5$ //

例2 $x^2-(a-3)x-2a+2<0$
をみたす $x$ の整数値がただ1つあるような定数 $a$ の値の範囲を求めよ。

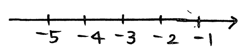
解) $x^2-(a-3)x-2a+2<0$
$\Leftrightarrow x^2-(a-3)x-2(a-1)<0$
$\Leftrightarrow (x+2)\{x-(a-1)\}<0$

(i) $a>-1$ のとき




$-1<a-1 \leqq 0$
$\Leftrightarrow 0<a \leqq 1$

(ii) $a<-1$ のとき




$-4 \leqq a-1<-3$
$\Leftrightarrow -3 \leqq a<-2$

(i),(ii) より
$-3 \leqq a<-2$, $0<a \leqq 1$ //

## (4)絶対不等式

（不等式に含まれる文字が、どのような値をとっても成り立つような不等式）

**例1** すべての$x$に対して、$x^2+(m-1)x+1 \geqq 0$が成り立つような$m$の範囲を求めよ。

解）すべての$x$に対して $x^2+(m-1)x+1 \geqq 0$ が成り立つ。

$\longrightarrow x$

$x^2+(m-1)x+1=0$ について
判別式を$D$とすると

$$D=(m-1)^2-4 \leqq 0$$
$$\therefore m^2-2m-3 \leqq 0$$
$$\Leftrightarrow (m-3)(m+1) \leqq 0$$
$$\Leftrightarrow -1 \leqq m \leqq 3$$ 〃

**例2** すべての実数$x$について $(a-2)x^2+2(a-1)x+3a-5>0$ が成り立つように、定数$a$の値の範囲を定めよ。

解）すべての実数$x$について $(a-2)x^2+2(a-1)x+3a-5>0$

$\longrightarrow x$

$a=2$とすると $2x+1>0$ より $x>\frac{1}{2}$ 不適。
このもとで題意をみたすのは、
$a>2$ …① かつ $(a-2)x^2+2(a-1)x+3a-5=0$
の判別式を$D$とすると、$D<0$ …②

②より
$$D/4=(a-1)^2-(a-2)(3a-5)$$
$$=a^2-2a+1-(3a^2-11a+10)$$
$$=-2a^2+9a-9$$
$$=-(2a^2-9a+9)$$
$$=-(a-3)(2a-3)<0$$
$$\therefore (a-3)(2a-3)>0$$
$$a<\frac{3}{2},\ 3<a \quad \cdots ②'$$

①かつ②'より

$\longrightarrow a$

$a>3$ 〃