

数学 I

01 数と式・集合と論理



<講義ノート>

数と式

(式の計算)

1 展開と因数分解

- (1) 展開
- (2) 因数分解

2 実数

- (1) 有理数・無理数
- (2) $\sqrt{\quad}$ の計算
- (3) 2重根号をはずす
- (4) 整数部分・小数部分
- (5) 対称式

3 絶対値

- (1) 基本
- (2) 応用

4 1次不等式

- (1) 基本
- (2) 応用
- (3) 絶対値つき

(集合と論理)

1 集合

2 論理

- (1) 命題と真偽
- (2) 否定
- (3) 逆・裏・対偶
- (4) 必要条件・十分条件
- (5) 背理法

(式の計算)

1. 展開と因数分解

(1) 展開

$$A(B+C) = AB + AC$$

$$(A+B)C = AC + BC$$

整式の積を単項式の和の形に表すこと。

例 $3x(2x+7) = 6x^2 + 21x$

(その1) 2次

乗法公式

① $(ax+b)(cx+d) = acx^2 + (ad+bc)x + bd$

②
$$\begin{cases} (a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \\ (a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2 \end{cases}$$

③ $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$

④ $(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca$

例1 次の式を展開せよ。

(1) $(5x-4)(2x+3)$

(2) $(3a+2b)^2$

(3) $(4x-5)^2$

(4) $(5x+3)(5x-3)$

(5) $(x-y+1)(x+y-1)$

(5) $(x-2y+3z)^2$

解)

(1) $(5x-4)(2x+3) = 10x^2 + 7 - 12 //$

(2) $(3a+2b)^2 = (3a)^2 + 2 \times 3a \times 2b + (2b)^2$
 $= 9a^2 + 12ab + 4b^2 //$

(3) $(4x-5)^2 = (4x)^2 - 2 \times 4x \times 5 + 5^2$
 $= 16x^2 - 40x + 25 //$

(4) $(5x+3)(5x-3) = (5x)^2 - 3^2$
 $= 25x^2 - 9 //$

(5) $(x-y+1)(x+y-1) = \{x-(y-1)\}\{x+(y-1)\}$
 $= x^2 - (y-1)^2$
 $= x^2 - (y^2 - 2y + 1)$
 $= x^2 - y^2 + 2y - 1 //$

(6) $(x-2y+3z)^2$
 $= x^2 + (-2y)^2 + (3z)^2 + 2 \times x \times (-2y) + 2 \times (-2y) \times 3z + 2 \times 3z \times x$
 $= x^2 + 4y^2 + 9z^2 - 4xy - 12yz + 6zx$

(その2) 3次

乗法公式

$$\textcircled{1} \begin{cases} (a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 \\ (a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3 \end{cases}$$

$$\textcircled{2} \begin{cases} (a+b)(a^2-ab+b^2) = a^3 + b^3 \\ (a-b)(a^2+ab+b^2) = a^3 - b^3 \end{cases}$$

例2 次の式を展開せよ。

$$(1) (a+3)^3$$

$$(2) (3x-4y)^3$$

$$(3) (3x+2y)(9x^2-6xy+4y^2)$$

$$(4) (2x-y)(4x^2+2xy+y^2)$$

解)

$$(1) (a+3)^3 = a^3 + 3 \times a^2 \times 3 + 3 \times a \times 3^2 + 3^3 \\ = a^3 + 9a^2 + 27a + 27 //$$

$$(2) (3x-4y)^3 = (3x)^3 - 3 \times (3x)^2 \times 4y + 3 \times 3x \times (4y)^2 - (4y)^3 \\ = 27x^3 - 108x^2y + 144xy^2 - 64y^3 //$$

$$(3) (3x+2y)(9x^2-6xy+4y^2) = (3x+2y)\{(3x)^2 - 3x \times 2y + (2y)^2\} \\ = (3x)^3 + (2y)^3 \\ = 27x^3 + 8y^3 //$$

$$(4) (2x-y)(4x^2+2xy+y^2) = (2x-y)\{(2x)^2 + 2x \times y + y^2\} \\ = (2x)^3 - y^3 \\ = 8x^3 - y^3 //$$

(その3)工夫

展開する順序・組み合わせを考える。

例3 次の式を展開せよ。

$$(1) (x-4)(x-2)(x+1)(x-1)$$

$$(2) (a-b)^2(a^2+ab+b^2)^2$$

解)

$$(1) (x-4)(x-2)(x+1)(x-1) \\ = (x-4)(x+1) \times (x-2)(x-1) \\ = (x^2-3x-4)(x^2-3x+2) \\ = (A-4)(A+2) \quad (x^2-3x=A \text{ とおく}) \\ = A^2-2A-8$$

$$= (x^2-3x)^2 - 2(x^2-3x) - 8 \\ = x^4 - 6x^3 + 9x^2 - 2x^2 + 6x - 8 \\ = x^4 - 6x^3 + 7x^2 + 6x - 8 //$$

$$(2) (a-b)^2(a^2+ab+b^2)^2$$

$$= \{(a-b)(a^2+ab+b^2)\}^2 \\ = (a^3-b^3)^2 \\ = (a^3)^2 - 2a^3b^3 + (b^3)^2 \\ = a^6 - 2a^3b^3 + b^6 //$$

(2) 因数分解

整式を1次以上の整式の積に表すこと。 例 $x^3+8=(x+2)(x^2-2x+4)$

手順

① 共通因数でくくる。

② 次数の低い文字について降べきの順に並べる。

③ 「置き換え」「たすきがけ」「公式」「エ夫」等行う。

[2次の公式] $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$

[3次の公式] $\begin{cases} a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3 = (a \pm b)^3 \\ a^3 \pm b^3 = (a \pm b)(a^2 \mp ab + b^2) \end{cases}$

複
号
同
順

<応用> $a^3+b^3+c^3-3abc=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$

例2 次の式を因数分解せよ。

(1) $a^3b - ab^3 = ab(a^2 - b^2)$

$= ab(a+b)(a-b) //$

(2) $(a^2 + 2a)^2 - 2(a^2 + 2a) - 3 = A^2 - 2A - 3 \quad (a^2 + 2a = A \text{ とおく})$

$= (A+1)(A-3)$

$= (a^2 + 2a + 1)(a^2 + 2a - 3)$

$= (a+1)^2(a+3)(a-1) //$

(3) $2x^2 - 3x + 1 = (2x-1)(x-1) //$

(4) $6x^2 + x - 12 = (2x+3)(3x-4) //$

(5) $a^3 + 27b^3 = a^3 + (3b)^3$

$= (a+3b)\{a^2 - a \times 3b + (3b)^2\}$

$= (a+3b)(a^2 - 3ab + 9b^2) //$

(6) $2x^4 - 16x = 2x(x^3 - 8)$

$= 2x(x^3 - 2^3)$

$= 2x(x-2)(x^2 + x \times 2 + 2^2)$

$= 2x(x-2)(x^2 + 2x + 4) //$

(7) $2x^2 - xy - y^2 - 7x + y + 6 = 2x^2 - (y+7)x - y^2 + y + 6$

$= 2x^2 - (y+7)x - (y+2)(y-3)$

$= \{x - (y+2)\}(2x + y - 3)$

$= (x - y - 2)(2x + y - 3) //$

(8) $x^2(y-z) + y^2(z-x) + z^2(x-y) = (y-z)x^2 + y^2z - y^2x + z^2x - z^2y$

$= (y-z)x^2 - (y^2 - z^2)x + y^2z - z^2y$

$= (y-z)x^2 - (y-z)(y+z)x + yz(y-z)$

$= (y-z)\{x^2 - (y+z)x + yz\}$

$= (y-z)(x-y)(x-z) //$

(9) $x^4 + x^2 + 1 = x^4 + 2x^2 + 1 - x^2$

$= (x^2 + 1)^2 - x^2$

$= \{(x^2 + 1) + x\}\{(x^2 + 1) - x\}$

$= (x^2 + x + 1)(x^2 - x + 1) //$

<応用> $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = (a+b+c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca)$

証明

$$\begin{aligned} & a^3 + b^3 + c^3 - 3abc \\ &= (a+b)^3 - 3a^2b - 3ab^2 + c^3 - 3abc \\ &= (a+b)^3 + c^3 - 3ab(a+b+c) \\ &= \{(a+b)+c\}^3 - 3(a+b)^2c - 3(a+b)c^2 - 3ab(a+b+c) \\ &= (a+b+c)^3 - 3(a+b)c(a+b+c) - 3ab(a+b+c) \\ &= (a+b+c)\{(a+b+c)^2 - 3(a+b)c - 3ab\} \\ &= (a+b+c)\{a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca - 3ab - 3bc - 3ca\} \\ &= (a+b+c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca) \end{aligned}$$

(証明終)

2. 实数

(1)有理数・無理数

↳ 有理数でない実数 = 循環しない無限小数

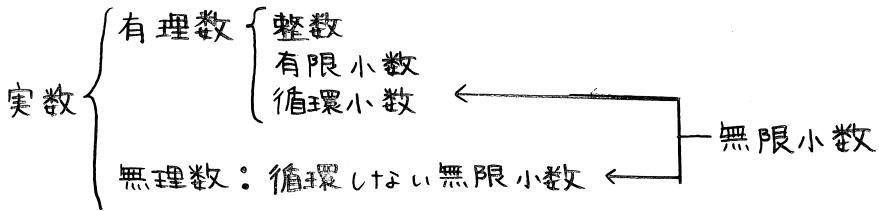
④例 $\sqrt{2}$, π など

↳ 整数 a と、0でない整数 b を用いて、 $\frac{a}{b}$ と表すことのできる数

$\cdots, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, \cdots$
 負の整数 正の整数 (自然数)

2つの有理数の
和・差・積・商
は有理数

例 $\frac{2}{3}, \frac{3}{11}, 4 = \frac{4}{1}, \frac{6}{8} = \frac{3}{4}$



例1 a, b を有理数とする。

$a + b\sqrt{3} = 1 + 2\sqrt{3}$ が成り立つとき、 a, b の値を求めよ。

解) $a + b\sqrt{3} = 1 + 2\sqrt{3}$
 $\Leftrightarrow a - 1 + (b - 2)\sqrt{3} = 0$

a, b は有理数なので、 $b-2=0$ かつ $a-1=0$
 $\therefore a=1, b=2$

例2 $(2+3\sqrt{2})x + (1-5\sqrt{2})y = 13$
を満足する有理数 x, y の値を求めよ。

解) $(2 + 3\sqrt{2})x + (1 - 5\sqrt{2})y = 13$
 $\Leftrightarrow 2x + 3\sqrt{2}x + y - 5\sqrt{2}y = 13$
 $\Leftrightarrow 2x + y + (3x - 5y)\sqrt{2} = 13$

x と y は有理数なので

$$\begin{cases} 2x + y = 13 & \dots (1) \\ 3x - 5y = 0 & \dots (2) \end{cases}$$

$$\textcircled{1} \times 5 + \textcircled{2} \quad 13x : 65$$

$$x = 5, \quad y = 3 //$$

(2) √ の計算

例1 次の式を計算せよ。

(1) $\sqrt{75} - 2\sqrt{12}$

(2) $(1 + \sqrt{2} + \sqrt{3})(1 - \sqrt{2} + \sqrt{3})$

(3) $\sqrt{\frac{32}{9}} - \sqrt{\frac{72}{25}}$

解) (1) $\sqrt{75} - 2\sqrt{12} = \sqrt{5^2 \times 3} - 2\sqrt{2^2 \times 3}$
 $= 5\sqrt{3} - 2 \times 2\sqrt{3}$
 $= \sqrt{3} //$

(2) $(1 + \sqrt{2} + \sqrt{3})(1 - \sqrt{2} + \sqrt{3}) = \{(1 + \sqrt{3}) + \sqrt{2}\}\{(1 + \sqrt{3}) - \sqrt{2}\}$
 $= (1 + \sqrt{3})^2 - \sqrt{2}^2$
 $= 1^2 + 2 \times 1 \times \sqrt{3} + \sqrt{3}^2 - 2$
 $= 1 + 2\sqrt{3} + 3 - 2 = 2 + 2\sqrt{3} //$

(3) $\sqrt{\frac{32}{9}} - \sqrt{\frac{72}{25}} = \frac{\sqrt{32}}{\sqrt{9}} - \frac{\sqrt{72}}{\sqrt{25}}$
 $= \frac{\sqrt{4^2 \times 2}}{3} - \frac{\sqrt{6^2 \times 2}}{5}$
 $= \frac{4\sqrt{2}}{3} - \frac{6\sqrt{2}}{5}$
 $= \frac{20\sqrt{2} - 18\sqrt{2}}{15} = \frac{2\sqrt{2}}{15} //$

例2 次の式を計算せよ。

(1) $\frac{1}{\sqrt{2}}$

(2) $\frac{10}{\sqrt{5}}$

(3) $\frac{2}{\sqrt{3}-1}$

(4) $\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{2\sqrt{3}-3\sqrt{2}}$

(5) $\frac{1}{1 + \sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{6}}$

(6) $\frac{1}{\sqrt{7} + \sqrt{5} + \sqrt{2}}$

解) (1) $\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2} \times \sqrt{2}}$
 $= \frac{\sqrt{2}}{2} //$

(2) $\frac{10}{\sqrt{5}} = \frac{10 \times \sqrt{5}}{\sqrt{5} \times \sqrt{5}}$
 $= \frac{10\sqrt{5}}{5} = 2\sqrt{5} //$

(3) $\frac{2}{\sqrt{3}-1} = \frac{2(\sqrt{3}+1)}{(\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}+1)}$
 $= \frac{2(\sqrt{3}+1)}{2}$
 $= \sqrt{3} + 1 //$

(4) $\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{2\sqrt{3}-3\sqrt{2}} = \frac{(\sqrt{3}-\sqrt{2})(2\sqrt{3}+3\sqrt{2})}{(2\sqrt{3}-3\sqrt{2})(2\sqrt{3}+3\sqrt{2})}$
 $= \frac{6+3\sqrt{6}-2\sqrt{6}-6}{12-18}$
 $= \frac{\sqrt{6}}{-6} = -\frac{\sqrt{6}}{6} //$

$$\begin{aligned}
 (5) \quad \frac{1}{1+\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{6}} &= \frac{1}{1+\sqrt{2}+\sqrt{3}(1+\sqrt{2})} \\
 &= \frac{1}{(1+\sqrt{2})(1+\sqrt{3})} \\
 &= \frac{(\sqrt{2}-1)(\sqrt{3}-1)}{(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}-1) \times (\sqrt{3}+1)(\sqrt{3}-1)} \\
 &= \frac{\sqrt{6}-\sqrt{3}-\sqrt{2}+1}{2} \quad "
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (6) \quad \frac{1}{\sqrt{7}+\sqrt{5}+\sqrt{2}} &= \frac{1}{(\sqrt{5}+\sqrt{2})+\sqrt{7}} \\
 &= \frac{(\sqrt{5}+\sqrt{2})-\sqrt{7}}{\{(\sqrt{5}+2)+\sqrt{7}\}\{(\sqrt{5}+\sqrt{2}-\sqrt{7})\}} \\
 &= \frac{\sqrt{5}+\sqrt{2}-\sqrt{7}}{(\sqrt{5}+\sqrt{2})^2-\sqrt{7}^2} \\
 &= \frac{\sqrt{5}+\sqrt{2}-\sqrt{7}}{2\sqrt{10}} \\
 &= \frac{\sqrt{50}+\sqrt{20}-\sqrt{70}}{20} \\
 &= \frac{5\sqrt{2}+2\sqrt{5}-\sqrt{70}}{20} \quad "
 \end{aligned}$$

(3) 2重根号をはずす

例1 $(\sqrt{7} + \sqrt{3})^2 = 10 + 2\sqrt{21} \longrightarrow \sqrt{10 + 2\sqrt{21}} = \sqrt{7} + \sqrt{3}$
 $(\sqrt{6} - \sqrt{2})^2 = 8 - 2\sqrt{12} \longrightarrow \sqrt{8 - 2\sqrt{12}} = \sqrt{6} - \sqrt{2}$
 $(\sqrt{a} \pm \sqrt{b})^2 = a + b \pm 2\sqrt{ab} \longrightarrow \sqrt{a + b \pm 2\sqrt{ab}} = \sqrt{a} \pm \sqrt{b}$
($a > b > 0$)

まとめ

$a > b > 0$ のとき
 複号同順
 $\sqrt{a + b \pm 2\sqrt{ab}} = \sqrt{a} \pm \sqrt{b}$

$$\left(\begin{array}{l} \sqrt{8 + 2\sqrt{15}} = \sqrt{5} + \sqrt{3} \\ \sqrt{9 - 2\sqrt{14}} = \sqrt{7} - \sqrt{2} \end{array} \right)$$

例2 次の2重根号をはずせ

(1) $\sqrt{11 + 2\sqrt{30}} = \sqrt{6} + \sqrt{5}$

(2) $\sqrt{12 - 2\sqrt{35}} = \sqrt{7} - \sqrt{5}$

(3) $\sqrt{11 + \sqrt{72}} = \sqrt{11 + 2\sqrt{18}}$
 $= \sqrt{9} + \sqrt{2}$
 $= 3 + \sqrt{2} //$

(4) $\sqrt{5 - \sqrt{21}} = \sqrt{5 - 2\sqrt{\frac{21}{4}}}$
 $= \sqrt{\frac{7}{2}} - \sqrt{\frac{3}{2}}$
 $= \frac{\sqrt{7}}{\sqrt{2}} - \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$
 $= \frac{\sqrt{7} - \sqrt{3}}{\sqrt{2}}$
 $= \frac{\sqrt{14} - \sqrt{6}}{2} //$

(別解) $\sqrt{5 - \sqrt{21}} = \sqrt{\frac{10 - 2\sqrt{21}}{2}}$
 $= \frac{\sqrt{10 - 2\sqrt{21}}}{\sqrt{2}}$
 $= \frac{\sqrt{7} - \sqrt{3}}{\sqrt{2}}$
 $= \frac{\sqrt{14} - \sqrt{6}}{2} //$

(4) 整数部分・小数部分

(例) $\sqrt{2}$ ($\doteq 1.414$) の整数部分は 1, 小数部分は $\sqrt{2} - 1$
 $\sqrt{3}$ ($\doteq 1.732$) " 1, " $\sqrt{3} - 1$
 $\sqrt{5}$ ($\doteq 2.236$) " 2, " $\sqrt{5} - 2$
 $\sqrt{135}$ " 11, " $\sqrt{135} - 11$

(まとめ)

$$\begin{cases} \circ (\text{小数部分}) = (\text{その数}) - (\text{整数部分}) \\ \circ 0 \leq (\text{小数部分}) < 1 \end{cases}$$

(例1) $\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1}$ の整数部分を a , 小数部分を b とするとき,

a, b の値を求め, さらに $\frac{1}{a+b-1} + \frac{1}{b}$ の値を求めよ。

解) $\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1} = \frac{(\sqrt{3}+1)^2}{(\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}+1)}$
$$= \frac{4+2\sqrt{3}}{2}$$
$$= 2 + \sqrt{3} \doteq 3.732$$

よって $a = 3$ //

$$b = (2 + \sqrt{3}) - 3$$
$$= \sqrt{3} - 1 //$$

$$\begin{aligned} \text{よって } \frac{1}{a+b-1} + \frac{1}{b} &= \frac{1}{(2+\sqrt{3})-1} + \frac{1}{\sqrt{3}-1} \\ &= \frac{1}{\sqrt{3}+1} + \frac{1}{\sqrt{3}-1} \\ &= \frac{\sqrt{3}-1 + \sqrt{3}+1}{(\sqrt{3}+1)(\sqrt{3}-1)} \\ &= \frac{2\sqrt{3}}{2} \\ &= \sqrt{3} // \end{aligned}$$

(例2) $\sqrt{6+\sqrt{20}} = a + b$ (a は整数, $0 \leq b < 1$) とするとき,

$\frac{1}{b+1} - \frac{1}{a+b}$ の値を求めよ。

解) $\sqrt{6+\sqrt{20}} = \sqrt{6+2\sqrt{5}}$
$$= \sqrt{5} + 1 \doteq 3.236$$

よって $a = 3$, $b = (\sqrt{5} + 1) - 3 = \sqrt{5} - 2$

$$\begin{aligned} \text{このとき } \frac{1}{b+1} - \frac{1}{a+b} &= \frac{1}{(\sqrt{5}-2)+1} - \frac{1}{\sqrt{5}+1} \\ &= \frac{1}{\sqrt{5}-1} - \frac{1}{\sqrt{5}+1} \\ &= \frac{\sqrt{5}+1 - (\sqrt{5}-1)}{(\sqrt{5}-1)(\sqrt{5}+1)} \\ &= \frac{2}{4} = \frac{1}{2} // \end{aligned}$$

(5) 対称式
〈基本編〉

定義 x, y に関する式で文字 x と y を入れ替えても
もとの式と同じ式になるものを x と y の「対称式」という。

重要 x と y の対称式は、 $x+y$ と xy で表せる。

特に重要! この2つ

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = (x+y)^2 - 2xy \\ x^3 + y^3 = (x+y)^3 - 3xy(x+y) \end{cases}$$

④例 $x = \frac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$, $y = \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$ のとき, $x^3 + x^2y + xy^2 + y^3$ の値を求めよ。

解) $x+y$ と xy を先に求める!

$$x+y = \frac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$$

$$= \frac{\sqrt{3}+\sqrt{2} + \sqrt{3}-\sqrt{2}}{(\sqrt{3}-\sqrt{2})(\sqrt{3}+\sqrt{2})}$$

$$= 2\sqrt{3}$$

$$xy = \frac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{2}} \times \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$$

$$= 1$$

$$\begin{aligned} \therefore x^3 + x^2y + xy^2 + y^3 &= (x+y)^3 - 3xy(x+y) + xy(x+y) \\ &= (x+y)^3 - 2xy(x+y) \\ &= (2\sqrt{3})^3 - 2 \times 1 \times 2\sqrt{3} \\ &= 8 \times 3\sqrt{3} - 4\sqrt{3} \\ &= 24\sqrt{3} - 4\sqrt{3} \\ &= 20\sqrt{3} \text{ , } \end{aligned}$$

<応用編>

① $x^n + y^n$ ($n \geq 4$) も $x + y$ と xy で表す。

$$\begin{aligned} \circ x^4 + y^4 &= (x^2)^2 + (y^2)^2 \\ &= (x^2 + y^2)^2 - 2x^2y^2 \\ &= \{(x+y)^2 - 2xy\} - 2(xy)^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \circ x^5 + y^5 &= (x^2 + y^2)(x^3 + y^3) - (x^3y^2 + x^2y^3) \\ &= \{(x+y)^2 - 2xy\} \{(x+y)^3 - 3xy(x+y)\} - (xy)^2(x+y) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \circ x^6 + y^6 &= (x^2)^3 + (y^2)^3 \\ &= (x^2 + y^2)\{(x^2)^2 - x^2y^2 + (y^2)^2\} \\ &= (x^2 + y^2)(x^4 - y^4 - x^2y^2) \\ &= (x^2 + y^2)\{(x^2 + y^2)^2 - 3x^2y^2\} \\ &= (x^2 + y^2)^3 - 3x^2y^2(x^2 + y^2) \\ &= \{(x+y)^2 - 2xy\}^3 - 3(xy)^2\{(x+y)^2 - 2xy\} \end{aligned}$$

② $x^n + \frac{1}{x^n}$ ($n: 2$ 以上の整数) を、 $x + \frac{1}{x}$ で表す。

$$\begin{aligned} \circ x^2 + y^2 &= (x+y)^2 - 2xy \text{ について} \\ x^2 + \left(\frac{1}{x}\right)^2 &= \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 2x \times \frac{1}{x} \end{aligned}$$

$$\boxed{x^2 + \left(\frac{1}{x}\right)^2 = \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 2}$$

$$\begin{aligned} \circ x^3 + y^3 &= (x+y)^3 - 3xy(x+y) \text{ について} \\ x^3 + \left(\frac{1}{x}\right)^3 &= \left(x + \frac{1}{x}\right)^3 - 3x \times \frac{1}{x} \left(x + \frac{1}{x}\right) \end{aligned}$$

$$\boxed{x^3 + \left(\frac{1}{x}\right)^3 = \left(x + \frac{1}{x}\right)^3 - 3\left(x + \frac{1}{x}\right)}$$

③ 例) $x + \frac{1}{x} = 3$ のとき、 $x^2 + \frac{1}{x^2}$ 、 $x^3 + \frac{1}{x^3}$ の値を求めよ。

解)
$$\begin{aligned} x^2 + \frac{1}{x^2} &= \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 2 \\ &= 3^2 - 2 \\ &= 7 \text{ 〃} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x^3 + \frac{1}{x^3} &= \left(x + \frac{1}{x}\right)^3 - 3\left(x + \frac{1}{x}\right) \\ &= 3^3 - 3 \times 3 \\ &= 27 - 9 \\ &= 18 \text{ 〃} \end{aligned}$$

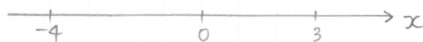
3. 絶対値

(1) 基本

定義 $|x|$ は、数直線上の 0 から x までの距離を表す。

例 1

$$\begin{aligned} |3| &= 3 \\ |-4| &= -(-4) \\ &= 4 \\ |0| &= 0 \end{aligned}$$



まとめ

$$|A| = \begin{cases} A & (A \geq 0) \\ -A & (A < 0) \end{cases}$$

例 2 次の式を簡単にせよ。

(1) $|2x-3|$

(2) $|4-3x|$

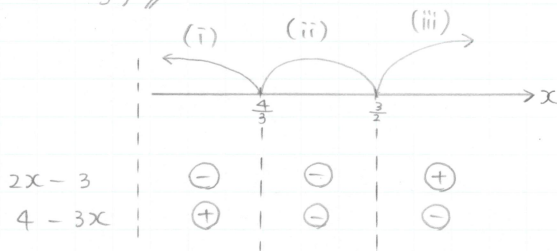
(3) $|2x-3| - |4-3x|$

解

$$(1) |2x-3| = \begin{cases} 2x-3 & (x \geq \frac{3}{2}) \\ -(2x-3) & (x < \frac{3}{2}) \end{cases} //$$

$$(2) |4-3x| = \begin{cases} -(4-3x) & (x \geq \frac{4}{3}) \\ 4-3x & (x < \frac{4}{3}) \end{cases} //$$

(3) $|2x-3| - |4-3x|$



(i) $x < \frac{4}{3}$ のとき $|2x-3| - |4-3x| = -(2x-3) - (4-3x) = x-1$

(ii) $\frac{4}{3} \leq x \leq \frac{3}{2}$ のとき $|2x-3| - |4-3x| = -(2x-3) + (4-3x) = -5x+7$

(iii) $\frac{3}{2} \leq x$ のとき $|2x-3| - |4-3x| = (2x-3) + (4-3x) = -x+1$

(i) ~ (iii) より

$$|2x-3| - |4-3x| = \begin{cases} x-1 & (x < \frac{4}{3}) \\ -5x+7 & (\frac{4}{3} \leq x \leq \frac{3}{2}) \\ -x+1 & (\frac{3}{2} \leq x) \end{cases} //$$

(2) 応用

① 2乗のルートは絶対値!

例1 $\sqrt{4^2} = 4$ $|4| = 4$
 $\sqrt{(-7)^2} = 7$ $|-7| = 7$

まとめ $\sqrt{A^2} = |A|$

例2 次の式を簡単にせよ。

$$\sqrt{x^2} + \sqrt{x^2 - 4x + 4}$$

解)

$$\begin{aligned} & \sqrt{x^2} + \sqrt{x^2 - 4x + 4} \\ &= \sqrt{x^2} + \sqrt{(x-2)^2} \\ &= |x| + |x-2| \end{aligned}$$

$$= \begin{cases} -x - (x-2) & (x < 0) \\ x - (x-2) & (0 \leq x < 2) \\ x + (x-2) & (2 \leq x) \end{cases}$$

$$= \begin{cases} -2x + 2 & (x < 0) \\ 2 & (0 \leq x < 2) \\ 2x - 2 & (2 \leq x) \end{cases}$$



$$\begin{aligned} |x| &= A \quad (>0) \\ \rightarrow x &= \pm A \end{aligned}$$

② 絶対値付きの方程式

例3 次の方程式を解け。

(1) $|4x - 3| = 1$

(2) $|3x + 1| = 4x$

解)

(1) $|4x - 3| = 1$

(i) $x \geq \frac{3}{4}$ のとき

$$4x - 3 = 1$$

$$\Leftrightarrow 4x = 4$$

$$\Leftrightarrow x = 1$$

(ii) $x < \frac{3}{4}$ のとき

$$-(4x - 3) = 1$$

$$\Leftrightarrow -4x + 3 = 1$$

$$\Leftrightarrow -4x = -2$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$$

(i)(ii)より $x = 1, \frac{1}{2}$ //

(別解) $4x - 3 = \pm 1$

$$4x = 3 \pm 1$$

$$= 4, 2$$

$$x = 1, \frac{1}{2}$$

(2) $|3x + 1| = 4x$

(i) $x \geq -\frac{1}{3}$ のとき

$$3x + 1 = 4x$$

$$\Leftrightarrow x = 1$$

(ii) $x < -\frac{1}{3}$ のとき

$$-(3x + 1) = 4x$$

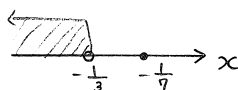
$$\Leftrightarrow -3x - 1 = 4x$$

$$\Leftrightarrow -7x = 1$$

$$\Leftrightarrow x = -\frac{1}{7} \quad (\text{不適})$$

(i)(ii)により

$$x = 1 //$$



4.1 次不等式

(1) 基本

例1 次の不等式を解け。

(1) $2x > 4$

解)

$$x > \frac{4}{2}$$
$$\therefore x > 2 //$$

(2) $-3x > -6$

解)

$$x < \frac{-6}{-3}$$
$$\therefore x < 2 //$$

まとめ

$$a > 0 \text{ のとき } \begin{cases} ax \geq b \Leftrightarrow x \geq \frac{b}{a} \\ ax \leq b \Leftrightarrow x \leq \frac{b}{a} \end{cases}$$

$$a < 0 \text{ のとき } \begin{cases} ax \geq b \Leftrightarrow x \leq \frac{b}{a} \\ ax \leq b \Leftrightarrow x \geq \frac{b}{a} \end{cases}$$

例2

$$\begin{cases} 4x - 3 \leq 6x + 1 \quad \dots ① \\ \frac{2x-1}{4} < \frac{x+1}{3} - x \quad \dots ② \end{cases}$$

を同時に満たす整数 x の値をすべて求めよ。

解)

① について, $4x - 6x \leq 1 + 3$

$$\Leftrightarrow -2x \leq 4$$

$$\Leftrightarrow x \geq \frac{4}{-2} = -2 \quad \dots ①'$$

② について, $3(2x-1) < 4(x+1) - 12x$

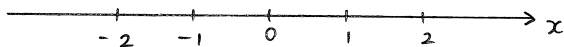
$$\Leftrightarrow 6x - 3 < 4x + 4 - 12x$$

$$\Leftrightarrow 6x - 4x + 12x < 4 + 3$$

$$\Leftrightarrow 14x < 7$$

$$\Leftrightarrow x < \frac{7}{14} = \frac{1}{2} \quad \dots ②'$$

①' かつ ②' より



$$-2 \leq x < \frac{1}{2}$$

これを満たす整数は、

$$-2, -1, 0 //$$

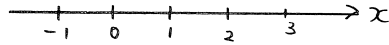
(2) 応用

① 整数値の個数

例1 $x+3 > 2(x-a)$ をみたす自然数 x がちょうど2個となるような a の値の範囲を求めよ。

解)

$$\begin{aligned}x+3 &> 2(x-a) \\ \Leftrightarrow x+3 &> 2x-2a \\ \Leftrightarrow -x &> -2a-3 \\ \Leftrightarrow x &< 2a+3\end{aligned}$$



これをみたす自然数 x がちょうど2個となるには、

$$\begin{aligned}2 &< 2a+3 \leq 3 \\ \Leftrightarrow -1 &< 2a \leq 0 \\ \Leftrightarrow -\frac{1}{2} &< a \leq 0\end{aligned}$$

② 文字場合分け

例2 x について不等式 $ax+1 > x-3$ を解け。

解)

$$\begin{aligned}ax+1 &> x-3 \\ \Leftrightarrow (a-1)x &> -4\end{aligned}$$

$$(i) a-1 > 0 \Leftrightarrow a > 1 \text{ のとき} \\ x > \frac{-4}{a-1}$$

$$(ii) a-1 < 0 \Leftrightarrow a < 1 \text{ のとき} \\ x < \frac{-4}{a-1}$$

$$(iii) a-1 = 0 \Leftrightarrow a = 1 \text{ のとき} \\ 0 > -4 \\ x \text{ はすべての実数}$$

(i)~(iii) より

$$\begin{cases} a > 1 \text{ のとき } x > \frac{-4}{a-1} \\ a < 1 \text{ のとき } x < \frac{-4}{a-1} \\ a = 1 \text{ のとき } x \text{ はすべての実数} \end{cases}$$

(補題)

$ax+1 < x-3$ を解け。

解)

$$(a-1)x < -4$$

$$\begin{cases} a > 1 \text{ のとき } x < \frac{-4}{a-1} \\ a < 1 \text{ のとき } x > \frac{-4}{a-1} \\ a = 1 \text{ のとき } 0 < -4 \end{cases}$$

解なし //

(3) 絶対値つき

(例) 次の不等式を解け。

(1) $|x-1| < 5$

(2) $|3x-23| < x+1$

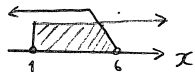
(3) $|x-1| + |x+3| \leq 5$

解)

(1) $|x-1| < 5$

(i) $x \geq 1$ のとき

$$x-1 < 5 \Leftrightarrow x < 6$$



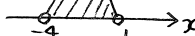
$$\text{よって } 1 \leq x < 6$$

(ii) $x < 1$ のとき

$$-(x-1) < 5 \Leftrightarrow -x+1 < 5$$

$$\Leftrightarrow -x < 4$$

$$\Leftrightarrow x > -4$$



$$\text{よって } -4 < x < 1$$

(i)(ii) より



$$-4 < x < 6 //$$

(別解) $-5 < x-1 < 5$

$$-4 < x < 6 //$$

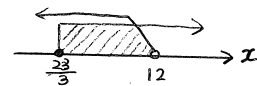
(2) $|3x-23| < x+1$

(i) $x \geq \frac{23}{3}$ のとき

$$3x-23 < x+1$$

$$\Leftrightarrow 2x < 24$$

$$\Leftrightarrow x < 12$$



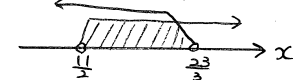
$$\text{よって } \frac{23}{3} \leq x < 12$$

(ii) $x < \frac{23}{3}$ のとき

$$-3x+23 < x+1$$

$$\Leftrightarrow -4x < -22$$

$$\Leftrightarrow x > \frac{-22}{-4} = \frac{11}{2}$$



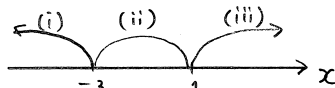
$$\text{よって } \frac{11}{2} < x < \frac{23}{3}$$

(i)(ii) より



$$\frac{11}{2} < x < 12 //$$

(3) $|x-1| + |x+3| \leq 5$



$$\begin{array}{l} x-1 \\ x+3 \end{array}$$

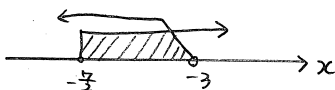
(i) $x < -3$ のとき

$$-(x-1)-(x+3) \leq 5$$

$$\Leftrightarrow -2x-2 \leq 5$$

$$\Leftrightarrow -2x \leq 7$$

$$\Leftrightarrow x \geq -\frac{7}{2}$$



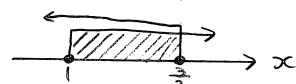
$$\text{よって } -\frac{7}{2} \leq x < -3$$

(iii) $1 \leq x$ のとき

$$x-1+x+3 \leq 5$$

$$\Leftrightarrow 2x \leq 3$$

$$\Leftrightarrow x \leq \frac{3}{2}$$



$$\text{よって } 1 \leq x \leq \frac{3}{2}$$

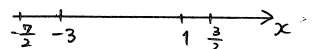
(ii) $-3 \leq x < 1$ のとき

$$-(x-1)+x+3 \leq 5$$

$$\Leftrightarrow 4 \leq 5$$

$$\text{よって } -3 \leq x < 1$$

(i) ~ (iii) より



$$-\frac{7}{2} \leq x \leq \frac{3}{2} //$$

(集合と論理)

1. 集合

[基本事項] 集合と要素

- $x \in A \leftarrow x$ は集合 A の要素
- $y \notin A \leftarrow y$ は集合 A の要素ではない
- 空集合 $\phi \leftarrow$ 要素をもたない集合
- 全体集合 $U \leftarrow$ もとになる全体の集合

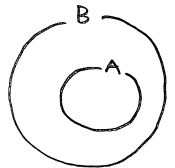
⑦ 集合が1から7までの整数を要素にもつとき

$$\begin{aligned} A &= \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\} \\ &= \{x \mid x \text{ は } 7 \text{ 以下の自然数}\} \\ &= \{x \mid 1 \leq x \leq 7, x \text{ は整数}\} \end{aligned}$$

(集合どうしの関係)

① 集合の包含関係

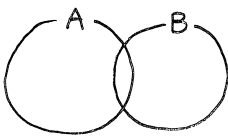
右の図のように、集合 A が集合 B に含まれるとき、
 $A \subset B$ (集合 A は集合 B の部分集合) と表す。



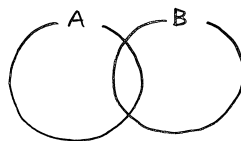
また、集合 A と集合 B の要素がすべて一致しているとき、
 $A = B$ ($A \subset B$ と $A \supset B$ の両方が成り立つ) と表す。

② 共通部分・和集合

集合 A, B について、



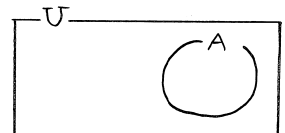
$A \cap B$



$A \cup B$

③ 補集合

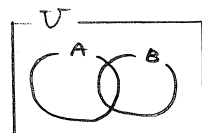
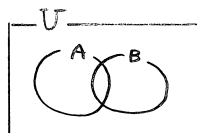
全体集合を U , 集合 A をその部分集合とする。
このとき、 U の要素ではあるが、 A の要素ではない
すべての要素の集合を A の補集合という。



④ ド・モルガンの法則

$$\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$$

$$\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$$



例1 $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ を全体集合とする。

U の部分集合 A, B について

$$A \cap B = \{2\} \quad \bar{A} \cap B = \{4, 6, 8\}, \quad \bar{A} \cap \bar{B} = \{1, 9\}$$

であるとき、次の集合を求めよ。

(1) $A \cup B$

(2) B

(3) $A \cap \bar{B}$

解)

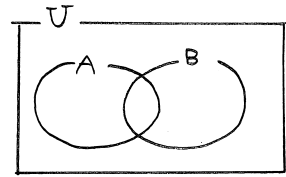
(1) ド・モルガンの法則により、

$$\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B} = \{1, 9\}$$

$$\therefore A \cup B = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$$

(2) 図から、 $B = \{2, 4, 6, 8\}$

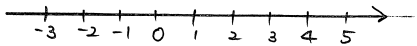
(3) 図から $A \cap \bar{B} = \{3, 5, 7\}$



例2 次の集合 A, B について、 $A \cap B, A \cup B$ を求めよ。

$$A = \{x \mid -1 < x < 2\}, \{x \mid x \leq 0 \text{ または } 4 < x\}$$

解)



$$A \cap B = \{x \mid -1 < x \leq 0\}$$

$$A \cup B = \{x \mid x < 2, 4 < x\}$$

2. 論理

(1) 命題と真偽

└→正しいか正しくないかが判定できる式や文

多くの場合、命題は、2つの条件 P, Q を用いて

「 P ならば Q 」 ($P \Rightarrow Q$)

①例「 $x > 1 \Rightarrow x > 0$ 」は真。

の形で表される。

②例「 $x > 120$ の x に数値を代入すると、命題になる。

代表的な「命題」の型

・ P ならば Q 」型 (①例 など)

・ 条件の文字に数値代入」型

③例「 $\sqrt{2}$ は無理数である。

④問 次の各命題について、真であれば証明し、偽であれば反例をあげよ。

(1) 実数 x について、 $\sqrt{x^2}$ と x は等しい。 → 偽 (反例: $x = -1$)

(2) 実数 a について、 $|2a - 1| = a$ ならば、 $a = 1$ である。

→ 偽 (反例: $a = \frac{1}{3}$)

⑤補 命題「 P ならば Q か Q ならば P 」を

$P \Leftrightarrow Q$

と書く。

(P と Q は
同値)

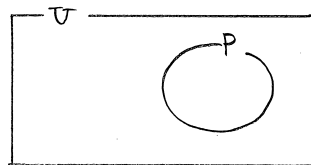
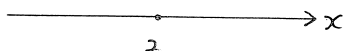
(2) 否定 ＜条件の否定＞

→文字を用いた式や文 例えば「 $x > 2$ 」や「 x は自然数」など

全体集合 U に対し、条件 P を表すものの集合を P とすると

条件 P の否定「 P でない」を表すものの集合は、その補集合 $\bar{P}$ である。

例1 条件 P :「 $x > 2$ 」の否定は「 $x \leq 2$ 」



2つの条件 P, Q を表すものの集合をそれぞれ P, Q とすると、

条件「 P かつ Q 」の否定は「 $\bar{P}$ または $\bar{Q}$ 」

条件「 P または Q 」の否定は「 $\bar{P}$ かつ $\bar{Q}$ 」

例2 「整数 m, n はともに奇数」の否定は、

「整数 m は偶数または整数 n は偶数」、

(もしくは、「整数 m, n の少なくとも一方は偶数」)。

＜命題の否定＞

→正しいか正しくないかが判定できる式や文

例3 「自然数 n について、 n が偶数ならば、 n^2+2 は6の倍数」の

否定「自然数 n について、 n が偶数であるが、 n^2+2 が6の倍数でないものがある」

命題「 P ならば Q 」の 否定「 P であっても Q でないものがある」

例4 「すべての正の偶数 n について、 n^2+2 は6の倍数」

否定「ある正の偶数 n について、 n^2+2 は6の倍数でない」

命題「すべての x について P 」の 否定「ある x について $\bar{P}$ 」

命題「ある x について P 」の 否定「すべての x について $\bar{P}$ 」

(3) 逆・裏・対偶

命題「 P ならば Q である」

逆「 Q ならば P である」

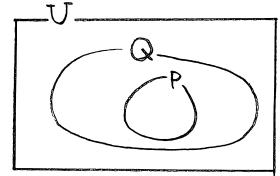
裏「 $\bar{P}$ ならば $\bar{Q}$ である」

対偶「 $\bar{Q}$ ならば $\bar{P}$ である」

命題「 P ならば Q である」が真のとき

P, Q の真理集合をそれぞれ P, Q とすると $\Rightarrow$

$$\begin{cases} \text{「} P \Rightarrow Q \text{」が真 } P \subset Q \\ \text{「} \bar{Q} \Rightarrow \bar{P} \text{」が真 } \bar{Q} \subset \bar{P} \end{cases}$$



命題と対偶の真偽は一致する!
(逆と裏)

④例 命題「 $x \geq 1$ かつ $y \geq 1$ ならば、 $x + y \geq 2$ である」

について、逆・裏・対偶を述べ、その真偽を調べよ

--- 解 ---
命題「 $x \geq 1$ かつ $y \geq 1$ ならば、 $x + y \geq 2$ 」は真。

逆「 $x + y \geq 2$ ならば、 $x \geq 1$ かつ $y \geq 1$ 」は偽。(反例: $x=3, y=0$)

裏「 $x < 1$ または $y < 1$ ならば $x + y < 2$ 」は偽。

対偶「 $x + y < 2$ ならば $x < 1$ または $y < 1$ 」は真。〃

(4) 必要条件・十分条件

命題「 P ならば Q である」が真であるとき、

$$\begin{cases} P \text{ は } Q \text{ であるための「十分条件」である} \\ Q \text{ は } P \text{ であるための「必要条件」である} \end{cases}$$

という。

また、 $P \Leftrightarrow Q$ が成り立つとき、

$$\begin{cases} P \text{ は } Q \text{ であるための必要十分条件} \\ Q \text{ は } P \text{ であるための必要十分条件} \end{cases}$$

例) 次の空欄に当てはまる(a)～(d)の記号を答えよ。

ただし、 x, y は実数とする。

[選択肢]

(1) $x > 3$ は、 $x^2 > 9$ であるための 。

(a) 必要十分条件である

(2) $x = 1$ は $xy = 1$ であるための 。

(b) 十分条件だが必要条件でない

(3) $x = y = 0$ は $x^2 + y^2 = 0$ であるための 。

(c) 必要条件だが十分条件でない

(4) $ax = ay$ は $a = 0$ であるための 。

(d) 必要条件でも十分条件でもない

解

(1) $P: x > 3$

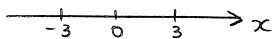
$Q: x^2 > 9$ とすると

$Q: x^2 > 9$ について

$$x^2 - 9 > 0$$

$$\Leftrightarrow (x+3)(x-3) > 0$$

$$\Leftrightarrow x < -3, 3 < x$$



$$\begin{cases} P \Rightarrow Q & \text{O} \\ Q \Rightarrow P & \text{X} \end{cases}$$

(2) $P: x = 1$

$Q: xy = 1$ とすると、

$$\begin{cases} P \Rightarrow Q & \text{X (反例: } x=1, y=0) \\ Q \Rightarrow P & \text{X (反例: } x=2, y=\frac{1}{2}) \end{cases}$$

(3) $P: x = y = 0$

$Q: x^2 + y^2 = 0$ とすると、 $P \Leftrightarrow Q$

(4) $P: ax = ay$

$Q: a = 0$ とすると

$$\begin{cases} P \Rightarrow Q & \text{X (反例: } a=1, x=2, y=2) \\ Q \Rightarrow P & \text{O} \end{cases}$$

(5) 背理法

ある命題に対して、その命題が成り立たないと仮定し、
矛盾が生じることを示すことにより、その命題を証明する証明法。

①例 $\sqrt{2}$ が無理数であることを、背理法を用いて証明せよ。

証明 $\sqrt{2}$ が有理数であると仮定すると

$$\sqrt{2} = \frac{p}{q} \quad (p \text{ と } q \text{ は互いに素な自然数})$$

とおける。分母を払いい、両辺を2乗すると、

$$p = \sqrt{2} q \quad \text{から,} \quad p^2 = 2q^2 \quad \dots \text{①}$$

よって p^2 は2の倍数。

したがって、 p も2の倍数だから、 $p = 2h$ (h は自然数) とおける。

$$\text{これを①に代入して、} (2h)^2 = 2q^2 \Leftrightarrow 4h^2 = 2q^2$$

$$2h^2 = q^2$$

よって、 q^2 は2の倍数。

したがって、 q も2の倍数。

これは、 p と q が互いに素であることに矛盾する。

よって、 $\sqrt{2}$ は無理数

(証明終)